רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 3 ירושלים, סיון תש״ט, יוני 1949 חוברת 2

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, כנסת החדשה, ירושלים

המחיר 250 מ״ל

משפט-עזר על הרדיקל ושמושיו

יעקב לויצקי

1. הקדמה.

במאמר זה נשתמש במושג הרדיקל כפי שהוגדר תחלה על-ידי ארטין [1][1], דהינו כסכום כל האידאלים האפיסים[2] של החוג (סמון: $N(S)=$ רדיקל של החוג S). נטפל תחלה בשאלה: יהי S חוג רצונבי ויהי A אידיאל שמאלי[3] ב S. מה טיבו של $N(A)$ במקרה ש $N(S)=0$? תשובה לשאלה זו תנתן על-ידי משפט-העזר אשר יוכח בסעיף השני של המאמר. ביעילותו של משפט-עזר זה נוכח בסעיף השלישי של מאמרנו, בו נדון בחוגים המקימים זהות פולינומיאלית (בקצור: חוגי-זהות). חשיבותם של חוגים אלה הודגשה תחלה במאמרו של קפלנסקי [3]. מסקנותינו בסעיף השלישי קשורות במושגים הבאים:

א) הרדיקל התחתון [2] (סמון: $L(S)=$ רדיקל תחתון של חוג S). זהו אידיאל דו-צדדי המוגדר כמשותף[4] של כל האידיאלים A המקימים את התנאי $N(S/A)=0$. בר [2] הוכיח כי $N(S/L(S))=0$.

ב) הרדיקל העליון [2] (סמון: $U(S)=$ רדיקל עליון של חוג S). זהו אידיאל דו-צדדי המוגדר כסכום כל האידיאלים הניליים הדו-צדדיים. קטה [4] הוכיח כי $U(S)$ הנהו חוג ניליי וכי $N(S/U(S))=0$.

ג) מן ההגדרות הנ"ל נובע כי $U(S)\geq L(S)$. אם $U(S)=L(S)$, יקרא ערכם המשותף של הרדיקל התחתון והרדיקל העליון בשם "הרדיקל במובנו של בר" ויסומן ב $B(S)$. יש חוגים אשר בהם $B(S)$ איננו קים.

ד) הרדיקל האפיס למחצה[5] [5] (סמון: $N'(S)=$ הרדיקל האפיס למחצה של חוג S). זהו אידיאל דו-צדדי המוגדר כסכום כל האידיאלים הדו-צדדיים האפיסים למחצה. ב [5] הוכח כי אף $N'(S)$ עצמו הנהו אפיס למחצה. כמו כן הוכח שם כי $N'(S/N'(S))=0$. מכאן נובע כי גם $N(S/N'(S))=0$. מן האמור לעיל קל להוציא את אי-השויון

$$U(S)\geq N'(S)\geq L(S)\geq N(S) \qquad (1)$$

ה) אם הרדיקל העליון $U(S)$ מכיל את כל האידיאלים הניליים החד-צדדיים של החוג, יקרא $U(S)$ בשם הרדיקל לפי קטה [4] ויסומן במקרה זה גם ב $K(S)$. עד עתה טרם הצליחו למצא חוג אשר בו $K(S)$ איננו קים.

קפלנסקי הוכיח (ראה [3], משפט 5) כי כל אלגברה נילית המקימת זהות פולינומיאלית אשר מקדמיה שיכים לשדה המקדמים של האלגברה הנה אפיסה למחצה. הוא גם רומז שם על אפשרות הרחבת המשפט הזה לחוגי-זהות כלליים. ממשפטו של קפלנסקי לגבי חוגים נובע כי בכל חוג-זהות קים הרדיקל לפי קטה ומתקים השויון $K(S)=N'(S)$.

בסעיף 3 של המאמר הנוכחי נוכיח כי כל אידיאל חד-צדדי נילי של חוג-זהות S שיך לרדיקל התחתון $L(S)$ (ראה סעיף 3, משפט 5). ממשפט זה נובעות המסקנות הבאות: 1) קים הרדיקל $K(S)$ לפי קטה. 2) קים הרדיקל

---

1) המספרים בסוגרים [ ] מתכונים לרשימת המאמרים אשר בסוף המאמר.
2) אפיס=nilpotent.
3) במאמר הנוכחי נטפל באידיאלים שמאליים. משפטים אנלוגיים נכונים כמובן גם לגבי אידיאלים ימניים.
4) משותף=crosscut.
5) אפיס למחצה=semi-nilpotent.

$B(S)$ לפי בר. 3) מתקיימים השויונות $K(S)=N'(S)=B(S)$. 4) כל חוג-זהות נילי מתלכד עם הרדיקל התחתון שלו. מכיון שלפי אי-השויונות (1) הרדיקל התחתון הנהו אפיס למחצה (ראה גם ד, לעיל) הרי מכילה מסקנתנו 4) את המשפט המצוטט לעיל של קפלנסקי ומהוה לאמתו של דבר החרפה נכרת של משפט זה.

2. משפט-עזר על הרדיקל.

יהי S חוג רצוני, ויהי T חוג חלקי של S. קבוצת כל האברים x המקימת את התנאים $x\epsilon T$, $T.x=0$ תקרא בשם המאפס הימני[6] של T ותסומן ב $M(T)$. קל להוכח כי $M(T)$ הנהו אידאל דו-צדדי ב T וכי $(M(T))^2=0$.

משפט-עזר. אם החוג S מקים את התנאי $N(S)=0$, ואם A הנהו אידאל שמאלי ב S, אז הרדיקל $N(A)$ של A מתלכד עם המאפס הימני $M(A)$ של A.

הוכחה. מכיון ש $M(A)$ הנהו אידאל דו-צדדי ב A המקים את התנאי $(M(A))^2=0$, נובע כי $M(A)\subseteq N(A)$. נסמן עתה ב x אבר רצוני של $N(A)$. לפי הגדרת הרדיקל קים מספר טבעי n כך ש $(Ax)^n=0$. מכיון ש Ax הנהו אידאל שמאלי אפיס ב S, הרי $Ax\subseteq N(S)$. אבל $N(S)=0$ (הנחת המשפט) ולפיכך $Ax=0$. שויון זה אומר כי $x\epsilon M(A)$. בזה הוכח אי-השויון $N(A)\subseteq M(A)$ אשר בצרוף עם אי-השויון $M(A)\subseteq N(A)$ אשר הוכח לפני כן הוא נותן $M(A)=N(A)$, מש"ל.

מסקנה א. אם A הוא אידאל שמאלי בחוג S, ואם $N(S)=0$, אז $N(A)$ או שוה ל 0 או ש $N(A)$ הוא חוג אפיס בעל האינדקס 2. על כל פנים $(N(A))^2=0$.

מסקנה ב. אם A הוא אידאל דו-צדדי בחוג S, ואם $N(S)=0$, אז $N(A)=0$.

ואמנם, במקרה זה קים $N(A)S\subseteq AS\subseteq A$ ומכאן נקבל, בהתחשבנו עם השויון $AN(A)S=0$, את אי-השויון $N(A)S\subseteq N(A)$. מאידך, $ASN(A)\subseteq AN(A)=0$, ומכיון ש $SN(A)\subseteq N(A)$, הרי ש $SN(A)\subseteq N(A)$. הוכח אפוא כי $N(A)$ הוא אידאל דו-צדדי ב S. אבל (מסקנה א) $(N(A))^2=0$ ולכן $N(A)\subseteq N(S)$. בשים לב להנחה (התאפסות $N(S)$) נובע אפוא $N(A)=0$, מש"ל.

הערה א. לגבי חוגים פשוטים למחצה נכון גם הפוכה של מסקנה ב, כלומר: אם A הוא אידאל ימני או שמאלי, ואם $N(A)=0$, אז A הוא אידאל דו-צדדי.

הערה ב. קל להוכח כי אמתותם של משפט-העזר ושתי המסקנות הנ"ל לא תפגע אם נמיר בכל מקום את הרדיקל $N(S)$ ברדיקל האפיס למחצה $N'(S)$[7].

מסקנה ג. אם $N(S)=0$ ואם A הוא אידאל שמאלי השונה מ 0, אז

$$A/N(A)=A/U(A);\quad 0\subset A/U(A) \qquad (2)$$

ואמנם, מ $(N(A))^2=0$ נובע כי $N(A)=U(A)$ (ראה [2]). נניח עתה כי $A/U(A)=0$, כלומר $A=U(A)$, אזי נקבל $A^2=0$ ולכן $A\subseteq N(S)$. אבל $N(S)=0$ ולכן גם $A=0$, בנגוד להנחתנו. לכן $0\subset A/U(A)$, מש"ל.

3. על חוגי-זהות.

כל חוג קומוטטיבי מקים את הזהות הפולינומיאלית מן המעלה השניה $xy-yx=0$. כל אלגברה בעלת בסיס סופי מקימת זהות פולינומיאלית מסוימת אשר מקדמיה שיכים לשדה המקדמים של האלגברה[8]. בכדי לכלול בדיון דלהלן גם את האלגבראות, נדרוש כי המקדמים של הזהויות המתקיימות על-ידי חוגי-הזהות אשר בהם נטפל יהיו אברי תחום D בעל התכונות הבאות:

א) התחום D הנהו קבוצה חלקית של חוג האנדומורפיזמים E של החבורה האדיטיבית המוגדרת על-ידי החוג הנתון S.

---

6) מאפס ימני=right annihilator.
7) הערה זו ראויה לתשומת-לב בקשר עם הוכחת משפט קפלנסקי המצוטט לעיל.
8) נוספות על חוגי-זהות יוכל הקורא למצא במאמרו של קפלנסקי [3].

ב) אם $d\in D$, $s_1,s_2\in S$, אז $d(s_1s_2)=(ds_1)s_2=s_1(ds_2)$.

ג) אם $d\in D$, אז או $d\cdot S=0$ (כלומר d הוא האנדומורפיסמוס האפסי המעתיק כל אבר של S על האפס) או ש d הוא אוטומורפיסמוס. במקרה השני נדרש כי יחד עם d גם האנדומורפיסמוס ההפכי d^{-1} ישתיך ל D.

ד) התחום D מכיל את שלושת האנדומורפיסמים 0, ±1, ואם $d\in D$ אז גם $-d\in D$.

חוג חלקי A של החוג S יקרא מ ו ת ר ל ג ב י D או בקצור מ ו ת ר אם בשביל כל d השיך ל D קים $d\cdot A\subseteq A$.

קל להוכח באמתותם של המשפטים הבאים:

משפט 1. אם $a\in S$, אז האידאלים aS, SaS, Sa הנם מותרים.

משפט 2. אם A הוא חוג חלקי מותר של החוג S, ואם $0\neq d\in D$, אז $d\cdot A=A$.[9]

משפט 3. יהי A אידאל דו-צדדי מותר של חוג S, אז כל אוטומורפיסמוס של S השיך ל D הוא גם אוטומורפיסמוס של חוג-המנה S/A. התחום D שומר אפוא על התכונות א-ד דלעיל גם כתחום אנדומורפיסמים של החוג S/A.

בעקבות קפלנסקי [3] הננו מניחים כי הפולינומים המהוים את האגפים השמאליים בזהויות

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \qquad (3)$$

הנם אברים של ה א ל ג ב ר ה ה ח פ ש י ת $E(x_1\ldots x_n)$ הנוצרת על-ידי הגדלים הלא-מסוימים $x_1,\ldots,x_n$ מעל לחוג האנדומורפיסמים E, אך אנו נתבונן רק בפולינומים כאלה אשר מקדמיהם שיכים ל D ואשר אברם החפשי הוא האפס של E. אנו נדרש כמו-כן שלפחות אחד ממקדמי הפולינום f יהיה שונה מ 0. אם הזהות (3) אינה לינארית באחד הגדלים הלא-מסוימים, למשל x_1, אזי נפעיל את הטרנספורמציה (ראה למשל 2 ב [3])

$$g(u,t,x_2,\ldots,x_n)=f(u+t,x_2,\ldots,x_n)-f(u,x_2,\ldots,x_n)-f(t,x_2,\ldots,x_n)$$

כך נקבל את הזהות $g(u,t,x_2,\ldots,x_n)=0$ אשר מעלתה לגבי u וכן גם לגבי t נמוכה ממעלת (3) לגבי x_1. אשר למעלה הכללית של g, הרי על כל פנים אין היא גבוהה מן המעלה הכללית של (3), ואם מקדמי הזהות (3) שיכים ל D, אז, כפי שקל להוכח, גם מקדמי g שיכים ל D. אם אחד הגדלים הלא-מסוימים, למשל x_1, אינו מופיע בכל המחוברים[10] של הפולינום באגף השמאלי של (3), ואם נסמן ב $h(x_2,\ldots,x_n)$ את סכום כל המחוברים אשר בהם אין x_1 מופיע, אז ברור כי גם הזהות $h(x_2,\ldots,x_n)=0$ מתקימת ב S. כתוצאה מן האמור לעיל אנו מקבלים:

משפט 4. כל חוג-זהות S מקים זהות שצורתה

$$\sum_{(i)\in\Pi} d_{(i)}x_{i_1}\cdots x_{i_n}=0 \qquad (4)$$

באשר Π היא קבוצת תמורות של n המספרים $1,2,\ldots,n$; $d_{(i)}\in D$, בשביל כל התמורות (i) השיכות ל Π. לפחות אחד המקדמים ב (4) שונה מ 0.

נוכיח עתה את המשפט הראשי של סעיף זה:

משפט 5. כל אידאל נילי חד-צדדי של חוג-זהות S שיך לרדיקל התחתון L(S) של החוג S.

הוכחה. נסתכל בחוג-המנה $\bar{S}=S/L(S)$. אנו יודעים כי $N(\bar{S})=0$ (ראה סעיף 1, א). משפטנו יהיה מוכח אם נצליח להראות כי ב $\bar{S}$ אין אידאלים חד-צדדיים ניליים פרט ל 0. אין זה מגביל את הכלליות אם נסתפק בהוכחת העובדה ש $\bar{S}$

---

9) כי הרי $dA\subseteq A=d(d^{-1}A)\subseteq d\cdot A$.

10) מחוברים=monomials.

אינו מכיל אידאלים ניליים שמאליים פרט ל 0. נניח בנגוד לטענתנו כי $\bar{S}$ מכיל אידאל נילי שמאלי השונה מ 0. אזי ברור כי $\bar{S}$ מכיל אבר a המקים את התנאים: $a\neq0$, $a^2=0$ והאידאל השמאלי $\bar{S}a$ הנהו אידאל שמאלי נילי. ברור כי $\bar{S}a\neq0$, כי לו היה $\bar{S}a=0$, היינו מקבלים $a\in M(\bar{S})$. אבל $N(\bar{S})=0$ ולכן על-סמך משפט-העזר בסעיף 2 היינו מקבלים $a\in M(\bar{S})=N(\bar{S})=0$, כלומר $a=0$ והיא לא כן. בזה הוכח כי אמנם $\bar{S}a\neq0$. על-סמך המשפטים 1-3 אנו יודעים כי תחום האנדומורפיסמים D של חוג-הזהות S עובר בירושה לחוגים $\bar{S}$ ו $\bar{S}a$ ואגב כך הוא שומר על התכונות א-ד כפי שנוסחו לעיל. על-סמך משפט 4 הננו רשאים להניח כי החוג S מקים זהות שצורתה (4) וכי זהות זו עוברת בירושה לחוג $\bar{S}a$ ושומרת אגב כך על מקדמיה השונים מ 0 ולכן גם על מעלתה. נניח – מבלי להגביל על-ידי כך את הכלליות – כי x_1 מופיע כגורם ראשון לפחות באחד המחוברים של (4), אזי נוכל לכתב

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_1g(x_2,\dots,x_n)+h(x_1,\dots,x_n) \qquad (5)$$

ולהניח כי שום מחובר של $h(x_1,\dots,x_n)$ איננו מכיל את x_1 כגורם ראשון (ראה הוכחת קפלנסקי למשפטו המצוטט בסעיף 1). מכיון ש $a^2=0$ הרי ברור ש $h(x_1,\dots,x_n)$ יתאפס אם נציג את האבר a במקום x_1 ובהתאמה אברים רצוניים $a_2,\dots,a_n$ של $\bar{S}a$ במקום $x_2,\dots,x_n$. בהתחשב עם התכונה ב של התחום D (ראה בראשית סעיף זה) נובע מ (5) כי $ag(a_2,\dots,a_n)=0$ ולכן גם $\bar{S}ag(a_2,\dots,a_n)=0$. לפיכך $g(a_2,\dots,a_n)\in M(\bar{S}a)$. מכיון שיחד עם $\bar{S}a$ גם החוג $M(\bar{S}a)$ הנהו חוג מותר[11] והיות ו $M(\bar{S}a)$ הנהו אידאל דו-צדדי ב $\bar{S}a$ הננו מקבלים על-סמך ההומומורפיסמוס

$$\bar{S}a\simeq\bar{S}a/M(\bar{S}a)=\bar{\bar{S}}$$

ועל-סמך $g(a_2,\dots,a_n)\in M(\bar{S}a)$ כי החוג $\bar{\bar{S}}$, המקבל בירושה את התחום D כתחום אנדומורפיסמים, מקים את הזהות

$$g(x_2,\dots,x_n)=0 \qquad (6)$$

מכיון ש $N(\bar{S}a)=0$, נובע על-סמך משפט-העזר בסעיף 2 כי $M(\bar{S}a)=N(\bar{S}a)$ ועל-סמך $(M(\bar{S}a))^2=0$ נובע מכאן (השוה בר [2]) כי $N(\bar{S}a)=U(\bar{S}a)$. לפיכך $\bar{\bar{S}}=\bar{S}a/U(\bar{S}a)$. מכיון ש $\bar{S}a\neq0$ ו $U(\bar{S}a)=0$ נובע ממסקנה 3 למשפט-העזר בסעיף 2 כי $\bar{\bar{S}}\neq0$. היות ועל-סמך משפט 3 כל אנדומורפיסמוס השיך ל D והשונה מ 0 כאנדומורפיסמוס של S נשאר שונה מ 0 גם כאנדומורפיסמוס של $\bar{\bar{S}}$, נובע מזה כי החוג $\bar{\bar{S}}$ הנהו חוג-זהות המקים זהות פולינומיאלית – הלא היא הזהות (6) – אשר לא כל מקדמיה שוים ל 0 ואשר מעלתה נמוכה מן הזהות (4) המתקימת על-ידי החוג $\bar{S}$. את התהליך אשר הפעלנו לעיל על החוג $\bar{S}$ ועל הזהות (4) המתקימת על ידו נוכל עתה להפעיל על החוג $\bar{\bar{S}}$ ועל הזהות (6) המתקימת על ידו וכך להמשיך עד לאין סוף[13]. מכיון שמעלות הזהויות (4), (6) וכו' הולכות וקטנות – הגענו לידי סתירה. סתירה זו קבלנו כתוצאה מן ההנחה כי חוג-הזהות $\bar{S}$ מכיל אידאלים חד-צדדיים ניליים השונים מ 0. הנחה זו היא אפוא מופרכת ועל-ידי כך מוכח משפטנו במלואו[14].

---

11) אם A הנהו חוג חלקי מותר של $\bar{S}$ אזי בשביל כל d השיך ל D מקבלים מ $A\cdot M(A)=0$ את השויון $0=d(AM(A))=AdM(A)$ ולכן $dM(A)\subseteq M(A)$.

12) הומומורפיסמוס מותר לגבי D = D-homomorphism.

13) מכיון ש $\bar{\bar{S}}\neq0$ נובע כי מעלת (4) גדולה מ 2. מסבה דומה גם מעלת (6) גדולה מ 2 וכו'. כן חשוב לציין כי החוג $\bar{S}a$ ולכן גם $\bar{\bar{S}}$ וכו' הם חוגים נ י ל י י ם.

14) שיטה אחרת מובילה למסקנות חריפות יותר. אלה תפורסמנה במקום אחר.

ספרות.

[1] E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Hamb. Abh. 5 (1927), 251-260.

[2] R. Baer, Radical ideals, Amer. J. Math. 65 (1943), 537-568.

[3] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bulletin Amer. Math. Soc. 54 (1948), 575-580.

[4] G. Koethe, Die Struktur der Ringe etc. Math. Zeitschr. 32 (1930), 161-186.

[5] J. Levitzki, On the radical of a general ring, Bulletin Amer. Math. Soc. 49 (1943), 461-466.

מכפלת סדרות

בעלות נוסחת-נסיגה ליניארית משותפת מסדר 2

דב ירדן ותאודור מוצקין

1. הערות מוקדמות. סדרת-נסיגה (R_n) מסדר r בעלת *סקלה מתחלפת* $a_0,\dots,a_r$ באשר $a_0,\dots,a_r$ הם מספרים מרוכבים כלשהם ו $a_0a_r\neq 0$, היא סדרה שבשבילה

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i a_i R_{n+i}=0 \quad (n=\dots,-1,0,1,\dots).$$

נתבונן ב $k-1$ $(k>1)$ סדרות-נסיגה $(W_n^{(i)})$ $(i=1,\dots,k-1)$ מסדר 2 בעלות סקלה מתחלפת משותפת a,b,c. מטרתנו הראשית היא להוכיח כי $(P_n)=(\prod_{i=1}^{k-1} W_n^{(i)})$ [1] היא סדרת-נסיגה מסדר k, ולמצא את סקלתה המתחלפת s_i $(i=0,\dots,k)$.

סדרת-הנסיגה *היסודית* (U_n) בעלת הסקלה המתחלפת a,b,c מוגדרת על-ידי $U_0=0,\ U_1=1$. נקרא ל $\binom{k}{i}_U=U_kU_{k-1}\cdots U_{k-i+1}/U_1U_2\cdots U_i$ ו $\binom{k}{0}_U=1$ *מקדם בינומיאלי* מכלל הנוצר מתוך הסדרה (U_n).

נסמן ב (α^n) ו (β^n) את שתי הסדרות *הגאומטריות* בעלות הסקלה המתחלפת a,b,c כלומר α ו β מקיימים את המשואה

$$a-bx+cx^2=0.$$

הואיל ו $((\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta))$, כצרוף ליניארי של (α^n) ו (β^n), יש לה בעליל אותה סקלה כמו (U_n), והיא מקבלת את הערכים 0,1 בשביל $n=0,1$, יהיה לנו:

$$U_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\dots+\beta^{n-1}, \tag{1}$$

אם $\beta\neq\alpha$. לסבות דומות בשביל $\beta=\alpha$

$$U_n=n\alpha^{n-1}. \tag{1'}$$

מ (1) או (1')

$$U_k=\alpha^{k-i}U_i+\beta^iU_{k-i}.$$

בכפלנו ב $\binom{k}{i}_U(1/U_k)$, יהיה לנו

$$\binom{k}{i}_U=\alpha^{k-i}\binom{k-1}{i-1}_U+\beta^i\binom{k-1}{i}_U. \tag{2}$$

אם $S_{k,i}$ מסמן את סכום כל המכפלות של i $(i\leq k)$ אברים שונים של הסדרה

$$\alpha^{k-1},\alpha^{k-2}\beta,\dots,\beta^{k-1}, \tag{3}$$

$(S_{k,0}=1)$, אז

$$S_{k,i}=\alpha^{k-1}\beta^{i-1}S_{k-1,i-1}+\beta^iS_{k-1,i}. \tag{4}$$

באמת, סכום אותן המכפלות שבהן α^{k-1} הוא אחד מן הגורמים הוא בעליל $\alpha^{k-1}\beta^{i-1}S_{k-1,i-1}$, בעוד שסכום המכפלות האחרות הוא $\beta^iS_{k-1,i}$.

---

1) ביתר כלליות, מכפלת k סדרות-נסיגה מסדר $r+1$ בעלות סקלה מתחלפת משותפת היא סדרת-נסיגה מסדר $\binom{k+r}{r}$, שהיה מענין לקבע את סקלתה.

אם $\alpha\beta=1$, יהיה לפי (2)

$$\binom{k}{i}_U=\alpha^{k-1}\beta^{i-1}\binom{k-1}{i-1}_U+\beta^{i}\binom{k-1}{i}_U. \qquad (4')$$

הואיל ו- $S_{k,k}=(\alpha\beta)^{\binom{k}{2}}=\binom{k}{k}_U$ ו $S_{k,0}=\binom{k}{0}_U$, יוצא לפי (4) ו (4') כי בשביל $\alpha\beta=1$,

$$S_{k,i}=\binom{k}{i}_U. \qquad (5)$$

אם $\lambda\neq0$, תהיה $\lambda^r a_0,\lambda^{r-1}a_1,\dots,a_r$ הסקלה המתחלפת של $(\lambda^{n-1}R_n)$. לכן אפשר לבטא את הכמויות השיכות ל $(\overline{W}_n^{(i)}=\lambda^{n-1}W_n^{(i)})$ על-ידי הכמויות השיכות ל $(W_n^{(i)})$ כדלקמן:

$$\bar{a}=\lambda^2 a,\ \bar{b}=\lambda b,\ \bar{c}=c;\ \bar{\alpha}=\lambda\alpha,\ \bar{\beta}=\lambda\beta; \qquad (6)$$
$$\overline{U}_n=\lambda^{n-1}U_n,\ \binom{k}{i}_{\overline{U}}=\lambda^{i(k-i)}\binom{k}{i}_U;\ \overline{P}_n=\lambda^{(k-1)(n-1)}P_n,\ \bar{s}_i=\lambda^{(k-1)(k-i)}s_i.$$

2. משפט 1. הסדרה $(P_n=\prod_{i=1}^{k-1}W_n^{(i)})$ שאברה ה n-י הוא מכפלת האברים ה n-יים של k-1 $(k>1)$ סדרות-נסיגה $(W_n^{(1)}),\dots,(W_n^{(k-1)})$ בעלות הסקלה המתחלפת המשותפת a,b,c $(ac\neq0)$, היא סדרת-נסיגה מסדר k בעלת הסקלה המתחלפת

$$s_i=\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U \quad (i=0,\dots,k),$$

זאת-אומרת, יהיה

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U P_{n+i}=0. \qquad (7)$$

וכן

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a^{\binom{k-i}{2}}c^{\binom{i}{2}}\binom{k}{i}_{U'}P_{n+i}=0, \qquad (7')$$

באשר (U'_n) היא סדרת-הנסיגה היסודית בעלת הסקלה המתחלפת 1,b,ac.

במקרה ש $P_n=U_n\cdots U_{n-k+2}/U_1\cdots U_{k-1}=\binom{n}{k-1}_U$, מקבלים מ (7)

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U\binom{n+i}{k-1}_U=0. \qquad (8)$$

כמה מפשוטי המקרים נרשמו בספרות:

(1) בשביל $a=c=b-1=1$, $(W_n)=(A+(n-1)D)$ היא פ ר ו ג ר ס י ה א ר ת מ ט י ת, $\binom{k}{i}_U=\binom{k}{i}$, ו (7) נותן [2]

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(A+(n+i-1)D)^{k-1}=0. \qquad (9)$$

הנוסחה הכללית יותר

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\prod_{j=1}^{k-1}(A_j+(n+i-1)D_j)=0$$

דומה להיות חדשה.

(2) בשביל $A=1$, $D=0$, מקבלים מ (9)

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}=0. \text{ [3]}$$

(3) בשביל $a=c=b-1=1$, מקבלים מ (8)

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{k-1}=0. \text{ [4]}$$

(4) בשביל $-a=b=c=1$, $P_n=U_n^2$, זאת-אומרת בשביל הרבועים של מ ס פ ר י פ ב ו נ צ' י 0,1,1,2,..., מקבלים מ (7)

$$2(U_n^2+U_{n+1}^2)=U_{n-1}^2+U_{n+2}^2. \text{ [5]}$$

כבר הנוסחה הבאה אחריה

$$U_{n+2}^3+U_{n-2}^3=6U_n^3+3(U_{n+1}^3-U_{n-1}^3)$$

דומה להיות חדשה.

---

2) I. M. Ryzhik, Tablicy integralov, summ, riadov i proizvedenij, 1943, עמוד 264, נוסחה 7 בשביל $\alpha=-x$.

3) שם ע' 252, נוסחה 10.

4) שם ע' 254, נוסחה 36 בשביל $h=-1$.

הוכחה. יהי ראשית $a=c=1$, $\alpha\neq\beta$. אז נוכל לכתוב $W_n^{(i)}=A_i\alpha^n+B_i\beta^n$,
$P_n=\prod_{i=1}^{k-1}(A_i\alpha^n+B_i\beta^n)$, כלומר P_n הוא צרוף ליניארי של פרוגרסיות גאומטריות בעלות המנות (3). יוצא אפוא כי (P_n) היא סדרת-נסיגה מסדר k, שסקלתה מרכבת ממקדמי המשואה

$$s_0-s_1x+s_2x^2+\dots+(-1)^k s_k x^k=0,$$

בעלת השרשים (3). ואולם, לפי (5), $s_i=S_{k,i}=\binom{k}{i}_U$, מכאן (7) בשביל $a=c=1$, $\alpha\neq\beta$.

אם $\alpha=\beta$, זאת-אומרת $b=\pm 2$, נוכל לומר כי (7) כשהיא נתפסת כזהות אלגברית במשתנה b, בעלת $W_0^{(i)}$, $W_1^{(i)}$ קבועים k, n, $a=c=1$, (לאחר בטוי $W_n^{(i)},\dots,W_{n+k}^{(i)}$ ו $U_2,\dots,U_k$ כפולינומים ב b) קימת תמיד, הואיל והיא קימת ב $b\neq\pm 2$.

במקרה a,c $(ac\neq 0)$ רציונליים נשים ב (6) $\lambda=(\frac{c}{a})^{1/2}$, כך ש $\bar a=\bar c$ ו $\bar s_i=\binom{k}{i}_{\bar U}$. מכאן

$$s_i=\lambda^{-(k-1)(k-i)}\bar s_i=\lambda^{-(k-1)(k-i)}\binom{k}{i}_{\bar U}=\lambda^{-(k-1)(k-i)+i(k-i)}\binom{k}{i}_U$$
$$=\lambda^{-2\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U=\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U.$$

בשימנו $c=\lambda$, נקבל:

$$s_i=\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U=\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}c^{-i(k-i)}\binom{k}{i}_{U'}=a^{\binom{k-i}{2}}c^{\binom{i}{2}-\binom{k}{2}}\binom{k}{i}_{U'},$$

מכאן (7').

3. **משפט 2.** כל מקדם בינומיאלי מכלל $U_k\dots U_{k-i+1}/U_1\dots U_i$, $k\geq 0$, הנוצר מתוך סדרת-נסיגה יסודית (U_n) בעלת הסקלה המתחלפת $a,b,1$, באשר a,b שלמים, הוא מספר שלם.

הוכחה ראשונה. ברור כי $\binom{n}{0}_U=1$ ו $\binom{n}{1}_U=U_n$ הם מספרים שלמים לכל $n\geq 0$. יהיו $\binom{n}{0}_U,\dots,\binom{n}{k-2}_U$ מספרים שלמים לכל $n\geq 0$. אז נראה כי גם $\binom{n}{k-1}_U$ הוא מספר שלם לכל $n\geq 0$. זה נובע מתוך (8), באשר כל המקדמים $a^{\binom{k-1}{2}}\binom{k}{i}_U$ (לרבות $\binom{k}{k-1}_U=U_k$) הם מספרים שלמים והאחרון שבהם שוה 1, הואיל ו $\binom{n}{k-1}_U$ שוה 0 בשביל $n=0,\dots,k-2$ ו 1 בשביל $n=k-1$.

הוכחה שניה. שוב $\binom{k-1}{0}_U=1$ ו $\binom{k-1}{1}_U=U_{k-1}$ הם מספרים שלמים לכל $k\geq 0$. בהנחה כי $\binom{k-1}{i-1}_U$ ו $\binom{k-1}{i}_U$ הם מספרים שלמים, נראה לפי (2), הואיל ו α,β הם מספרים אלגבריים שלמים בשביל $c=1$ ו a,b שלמים, והואיל ו $\binom{k}{i}_U=U_k\dots U_{k-i+1}/U_1\dots U_i$ הוא רציונלי, כי $\binom{k}{i}_U$ הוא מספר שלם.

---

6) שלמות $\binom{k}{i}$ הוכחה על-ידי ב. פסקל, כתבים, 3, 1908, ע' 278-282.
השוה L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers I, 269.
שלמות $\binom{k}{i}_U$ הוכחה על-ידי
P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie II, 1910, 81;
R. D. Carmichael, On the Numerical Factors of the Arithmetic Forms $\alpha^n\pm\beta^n$, Annals of Mathematics (2) 15, 1913-1914, 40,
בשביל $c=1$ ו a,b שלמים זרים ביניהם. ואולם הוכחותיהם (השונות מהוכחותינו וזו מזו) יפות ל a,b שלמים כלליים. Carmichael מצטט את הוכחת
É. Lucas, Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques, American Journal of Mathematics 1, 1878, 203,
שהנה, אמנם, בלתי מספקת.

על שמונת "מעגלי פוירבך" במשולש

פסח חברוני

a) יהא ABC משולש נתון (ציור 1). את הקטעים AB,AC,BC אנו מסמנים ב $\bar{c},\bar{b},\bar{a}$. את הקוים הישרים הנושאים את הקטעים האלה אנו מסמנים ב c,b,a. תהא H נקודת החתוך של גבהי המשולש. את הקטעים HB,HA ו HC אנו מסמנים ב $\bar{h}(c),\bar{h}(b),\bar{h}(a)$. את הקוים הישרים הנושאים את הקטעים האלה אנו מסמנים ב h(c),h(b),h(a). את נקודת החתוך של a ו h(a) אנו מסמנים ב A'. הגדרה דומה תתקים בשביל B' ו C'. אנו רושמים את שלושת המעגלים שקטריהם הם $\bar{b},\bar{a}$ ו $\bar{c}$ ואנו מסמנים אותם ב C(b),C(a) ו C(c). וכמו כן אנו רושמים את שלושת המעגלים שקטריהם הם $\bar{h}(b),\bar{h}(a)$ ו $\bar{h}(c)$ ומסמנים אותם ב K(c),K(b),K(a).

b) מנקודת ההשקפה של הגאומטריה של הרדיוסים ההפוכים, ו ה י א ה י א נ ק ו ד ת ה ה ש ק פ ה ש ל נ ו ב מ א מ ר ז ה, האין-סוף של המישור מהוה נקודה. אנו מסמנים אותה ב U ולפי זה יש לנו מערכת של שמונה נקודות

1) A, B, C, A', B', C', H, U.

מנקודת ההשקפה של הגאומטריה הנ"ל מהוים הקוים הישרים

2) a, b, c, h(a), h(b), h(c)

ששה מעגלים העוברים דרך U, ואם נצרף למעגלים (2 את המעגלים

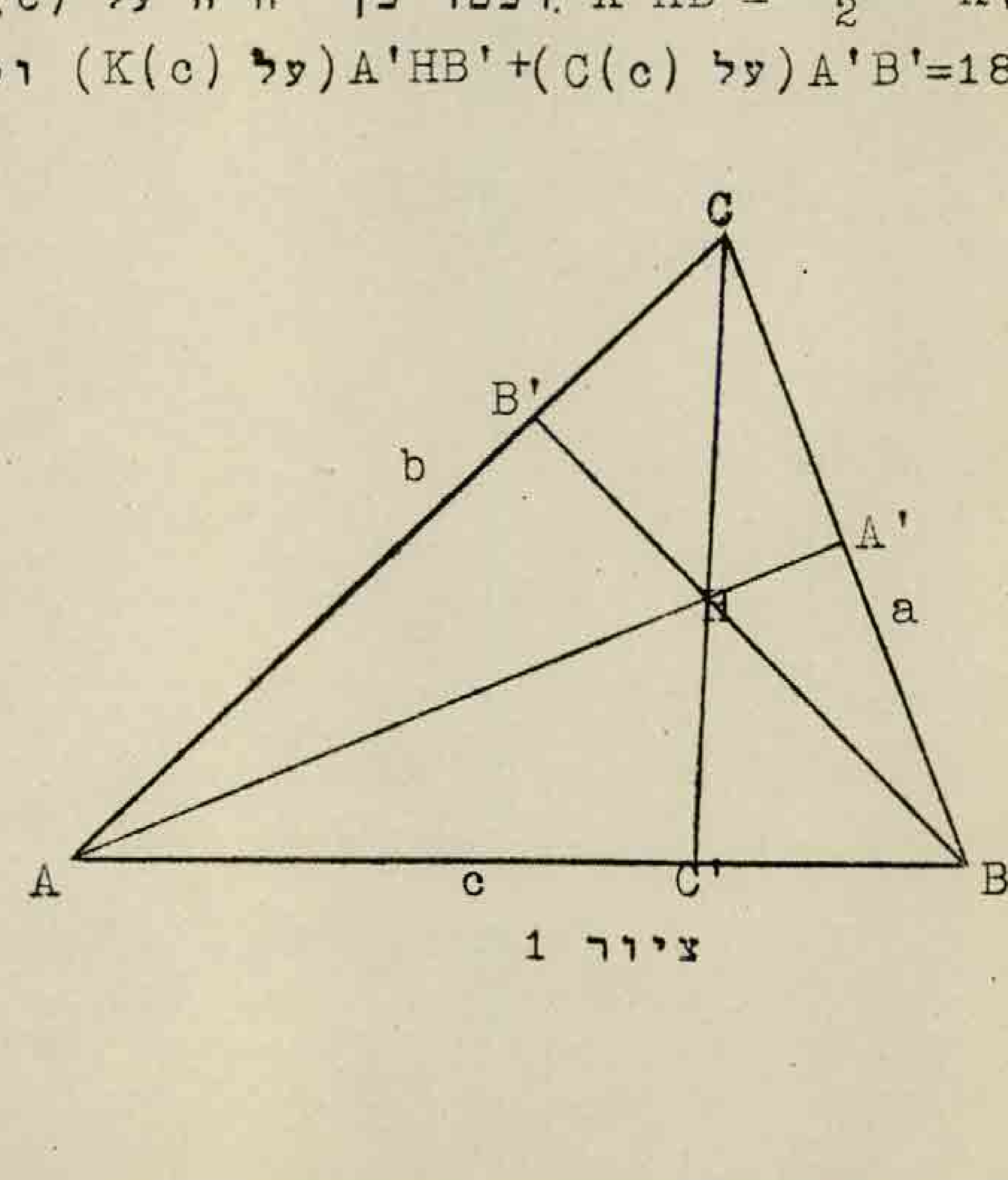
2') C(a), C(b), C(c), K(a), K(b), K(c)

תהיה לנו בסך הכל מערכת של שנים עשר מעגלים

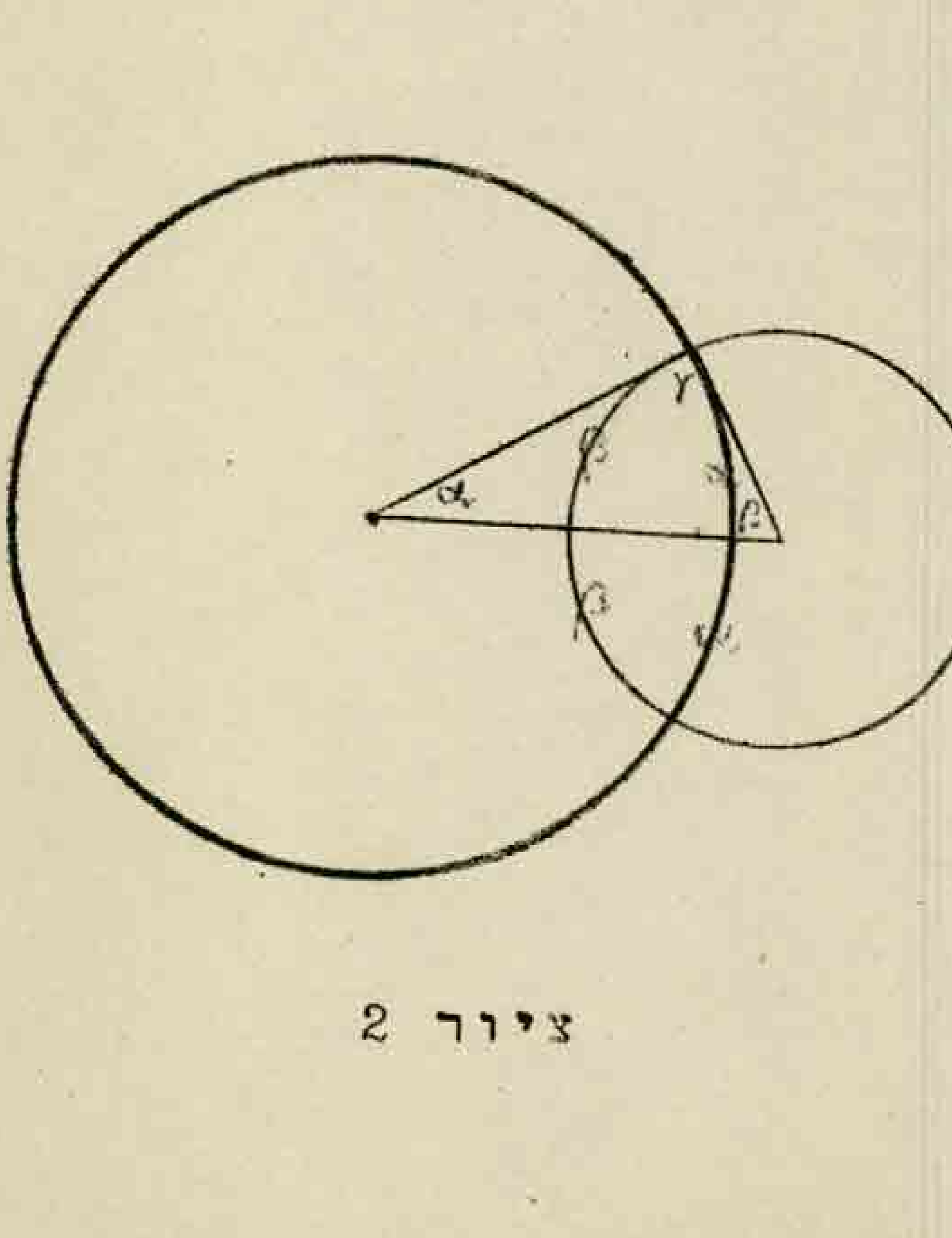
3) a, b, c, h(a), h(b), h(c), C(a), C(b), C(c), K(a), K(b), K(c).

c) **משפט א.** C(c) ו K(c) חותכים זה את זה בזוית ישרה.

<u>הוכחה.</u> בשביל להוכיח כי שני מעגלים חותכים זה את זה בזוית ישרה יספיק להוכיח, כי סכום הקשתות שהם חותכים זה מזה (כל אחת נמדדת במספר המעלות שעליה) שוה ל 180^0, ראה בציור 2. שהרי אם $2\alpha+2\beta=180^0$ יהיה $\alpha+\beta=90^0$ ואם כן $\gamma=90^0$. והנה בציור 3 יהיה $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$. מלבד זה יהיה על K(c) $A'HB'=\frac{\alpha'+\beta'}{2}$.וכמו כן יהיה על C(c) $B'A'=180^0-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$ ואם כן $A'B'=180^0$ (על C(c))+$A'HB'$(על K(c)) ומשפטנו מוכח.



ציור 1



ציור 2

כמובן מותר לנסח את משפט א גם כך:

משפט א. C(a) חותך את K(a)
C(b) חותך את K(b)
C(c) חותך את K(c) בזוית ישרה.

d) אם נשלים את הציור 1 על ידי זה שנכניס בתוכו את המעגלים (2' נכיר בקלות, אם נביא בחשבון את משפט א, את המשפט הבא:

משפט ב. שמונה הנקודות (1 ושנים עשר המעגלים (3 מהוים קונפיגורציה אשר תמלאנה בה התכונות הבאות:

$\bar{a}$) דרך כל נקודה עוברים ששה מעגלים.

$\bar{b}$) על כל מעגל מונחות ארבע נקודות.

$\bar{c}$) תהא P איזו נקודה שהיא מן המערכת (1. עמדתם של ששת המעגלים העוברים דרך P לגבי שאר הנקודות (חוץ מ P) שב (1 מתוארת כדלקמן: שבע הנקודות מתפלגות לארבע "עקריות" שאנו מסמנים אותן ב Q,R,S,T ו"צדדיות" שאנו מסמנים אותן ב X,Y,Z. ששת המעגלים מהוים את ה"צלעות" של המרובע השלם QRST (Vollständiges Viereck) באפן שדרך כל אחת מהנקודות האלה עוברים שלושה מששת המעגלים. כל שתי צלעות נגדיות של המרובע הנ"ל נחתכות בזוית ישרה באחת הנקודות X,Y,Z. דרך כל אחת מהנקודות X,Y ו Z עוברים לפי זה רק שני מעגלים.

e) ממשפט ב אנו מסיקים

משפט ג. אם נבחר איזו נקודה P מן המערכת (1 (השונה מ U) כמרכז של טרנספורמציה על פי רדיוסים הפוכים, אז יעברו אותם ששת המעגלים שבמערכת (3, העוברים דרך P, לששה קוים ישרים המהוים משולש וגבהיו. שאר המעגלים שב (3 ימלאו במשולש זה את התפקידים של המעגלים
C(a), C(b), C(c), K(a), K(b), K(c).

f) אם נוסיף להכניס בציור 1 את מעגל פוירבך, יעבור, כידוע, דרך תשע נקודות שהן A',B',C' והאמצעים של הקטעים

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{h}(a)$, $\bar{h}(b)$, $\bar{h}(c)$. 4)

הקטעים האלה הם כל קטעי החבור האפשריים של המרובע ABCH. ABCH מהוה ביחס ל U צורה כצורה המתוארת ב d) פסקה $\bar{c}$) ביחס ל P. A'B'C' הן הנקודות הצדדיות, ולפי זה תפקידם הוא אינוריאנטי ביחס לטרנספורמציה לפי רדיוסים הפוכים. ואשר לאמצעים של הקטעים (4, אפשר להגדירם כנקודות ההרמוניות הרביעיות של U ביחס לזוגות של שתי נקודות (וזוגות כאלה ישנם ששה) הלקוחות מתוך ארבע הנקודות A,B,C,H ומכיון שתכונה זו (להיות הנקודה הרביעית ההרמונית ביחס לשלוש נקודות נתונות על גבי מעגל) אינה משתנה כידוע על ידי טרנספורמציה על פי רדיוסים הפוכים הרי שהגדרתנו של כל תשע הנקודות שעל גבי מעגל פוירבך הגדרה אינוריאנטית היא.

g) תהא P נקודה אחת מתוך המערכת (1 השונה מ U (בחירה כזאת אפשר לעשות בשבעה אופנים שונים). נרשום סביב P כמרכז מעגל L ברדיוס r ונעשה טרנספורמציה W על פי הרדיוסים ההפוכים באופן ש L ישאר במקומו. ששת המעגלים שעברו לפני הטרנספורמציה W דרך P יהוו לפי משפט ג משולש (ישר צלעות) וגבהיו. את המשולש הזה נסמן ב M(P). ל M(P) אנו יכולים לרשום את מעגל פוירבך $\bar{F}$(P). אם נוציא כעת לפועל שוב את הטרנספורמציה W הנ"ל ישוב

המצב להיות כשהיה, שהרי כידוע $W^2=1$. רק שנוי אחד יחול בצורה. המעגל $\overline{F}(P)$ של פוירבך שרשמנו אותו בשביל $M(P)$ יעבור כעת להיות מעגל נוסף שאנו מסמנים אותו ב $F(P)$. הוא יעביר אתו את תשע הנקודות שהיו עליו בהיותו (לפני הוצאת W בפעם שניה לפועל) המעגל $\overline{F}(P)$ של פוירבך של המשולש $M(P)$ וישכן עליו. אם נגדיר בהתאם לנאמר לעיל ב f) את תשע הנקודות שעל גבי $\overline{F}(P)$ בצורה אינוריאנטית ביחס לטרנספורמציה על פי רדיוסים הפוכים, הרי שגם $F(P)$ ישא עליו את תשע הנקודות שתפקידן מפני האינוריאנציה הנזכרת נשאר כשהיה. עובדה זו מצדיקה לקרוא גם את המעגל $F(P)$ מעגל פוירבך. ובשים לב לכך שלפי האמור לעיל נוכל לבחור את P בשבעה אופנים שונים, הרי נקבל ביחד עם מעגל פוירבך המוגדר בספרות ההנדסה (ואשר בהתאם עם הקודם רצוי לסמנו ב $F(U)$) ש מ ו נ ה מ ע ג ל י פ ו י ר ב ך. כלומר:

משפט ד. ל כ ל מ ש ו ל ש A B C (ציור 1) י ש נ ם ש מ ו נ ה מ ע ג ל י פ ו י ר ב ך שהם

5) $F(A),\ F(B),\ F(C),\ F(A'),\ F(B'),\ F(C'),\ F(H),\ F(U).$

מקבלים אותם באופן זה: תהא P נקודה אחת איזו שהיא מן המערכת (1. בהתאם ל $\overline{c}$ שב d) מתחלקות כל שאר הנקודות שב (1 לארבע "עקריות" Q,R,S,T ושלוש "צדדיות" Z,Y,X. דרך כל צדדית עוברים רק שנים משטת המעגלים העוברים דרך P והם נצבים זה לזה. דרך Y,X ו Z עובר $F(P)$. מלבד זה חותך המעגל $F(P)$ את כל אחד מששת המעגלים הנ"ל בנקודה אחת שהיא הרמונית ל P ביחס לשתי הנקודות העקריות המונחות עליו.

h) הערות. א. כל שבעת מעגלי פוירבך $F(P)$ המנויים ב (5 והשונים מ $F(U)$ יהפכו למעגלי פוירבך במובן הרגיל על ידי כך שנעשה בכל פעם טרנספורמציה על פי הרדיוסים ההפוכים שבסיסה יהיה מעגל בעל המרכז P.

ב. כשם שמעגל פוירבך במובן הרגיל משיק לששה עשר מעגלים (כל המעגלים המשיקים מבפנים ומבחוץ של ארבעת המשולשים ABC,ABH,BCH,CAH, כך גם כל אחד משאר מעגלי פוירבך $F(P)$ המנויים ב (5 משיק ל 16 מעגלים. 16 מעגלים אלה הם המשיקים מבפנים ומבחוץ של ארבעת המשולשים (העקומים) RST,QST,QRT,QRS (עין משפט ד).

i) <u>דוגמה א.</u> נקח לדוגמה P=A (ראה ציור 4). הנקודות הצדדיות תהיינה במקרה זה H,C,B. הנקודות העקריות תהיינה A',B',C',U. דרך A עוברים המעגלים h(a),c,b. הנקודות העקריות על b הן B' ו U; על c C' ו U ועל h(a) A' ו U. את הנקודות ההרמוניות הרביעיות לA ביחס לשלושת זוגות הנקודות האלה נסמן ב C",B" ו A". מכיון ש U מונחת באין סוף הרי

6) $A''A'=A'A,\ B''B'=B'A,\ C''C'=C'A.$

ולפי זה נקבל בשביל $F(A)$ את העובדה הבאה:

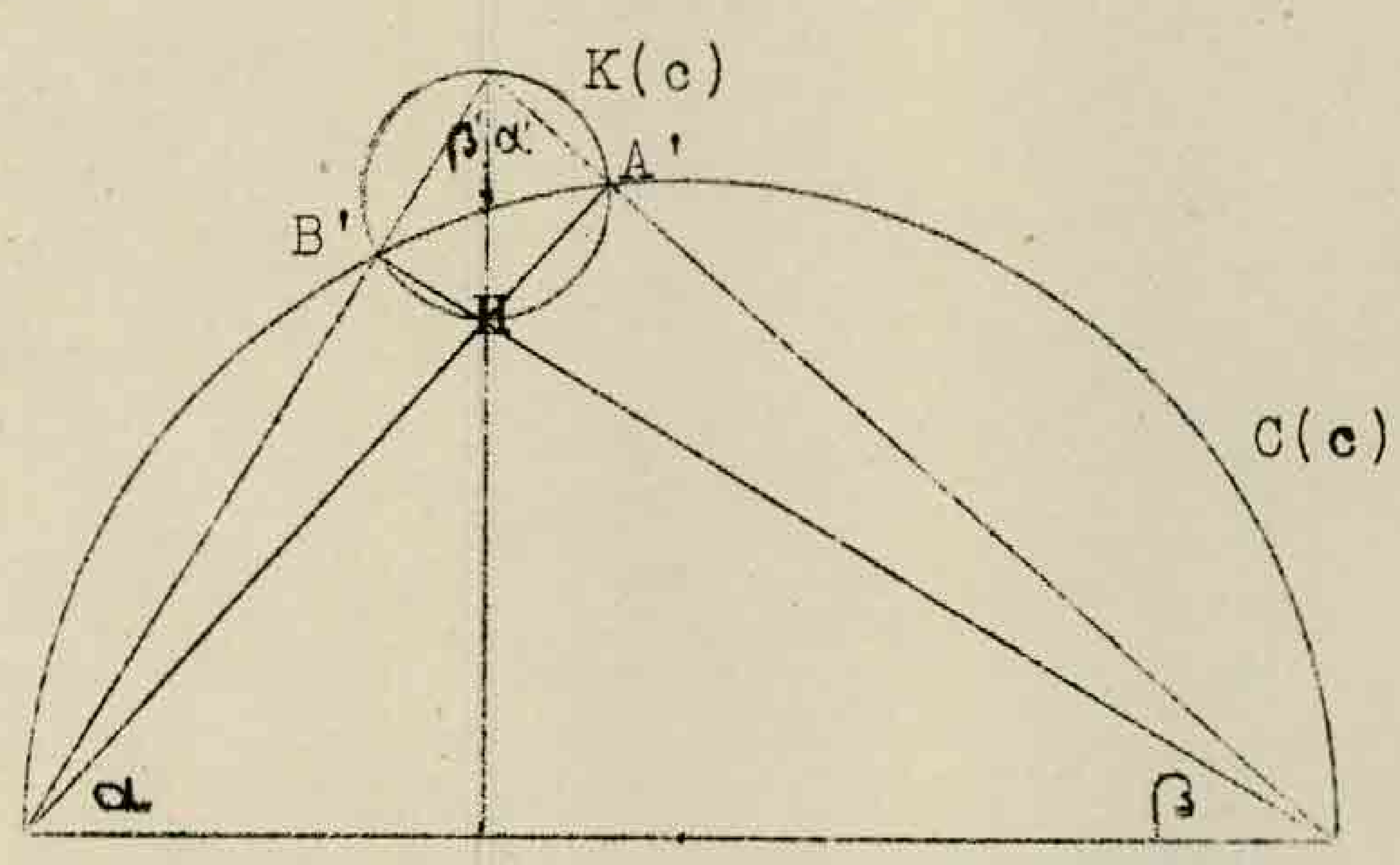
משפט ה. $F(A)$ עובר דרך שש הנקודות H,C,B,A",B",C". שלוש האחרונות מוגדרות על ידי המשואות (6. מעגל זה חותך את C(b) בנקודה B" שהיא הרמונית ל A ביחס לנקודות A' ו C'. הוא גם חותך את C(c) בנקודה C" שהיא הרמונית ל A ביחס לנקודות A' ו B'. הוא גם חותך את K(a) בנקודה A" שהיא הרמונית ל A ביחס לנקודות B' ו C'.

j) <u>דוגמה ב.</u> נקח לדוגמה P=H . הנקודות הצדדיות תהיינה במקרה זה A,B,C. הנקודות העקריות תהיינה A',B',C',U ולפי זה יהיה מעגל פוירבך $F(H)$ אידנטי עם המעגל החוסם את המשולש. המעגלים

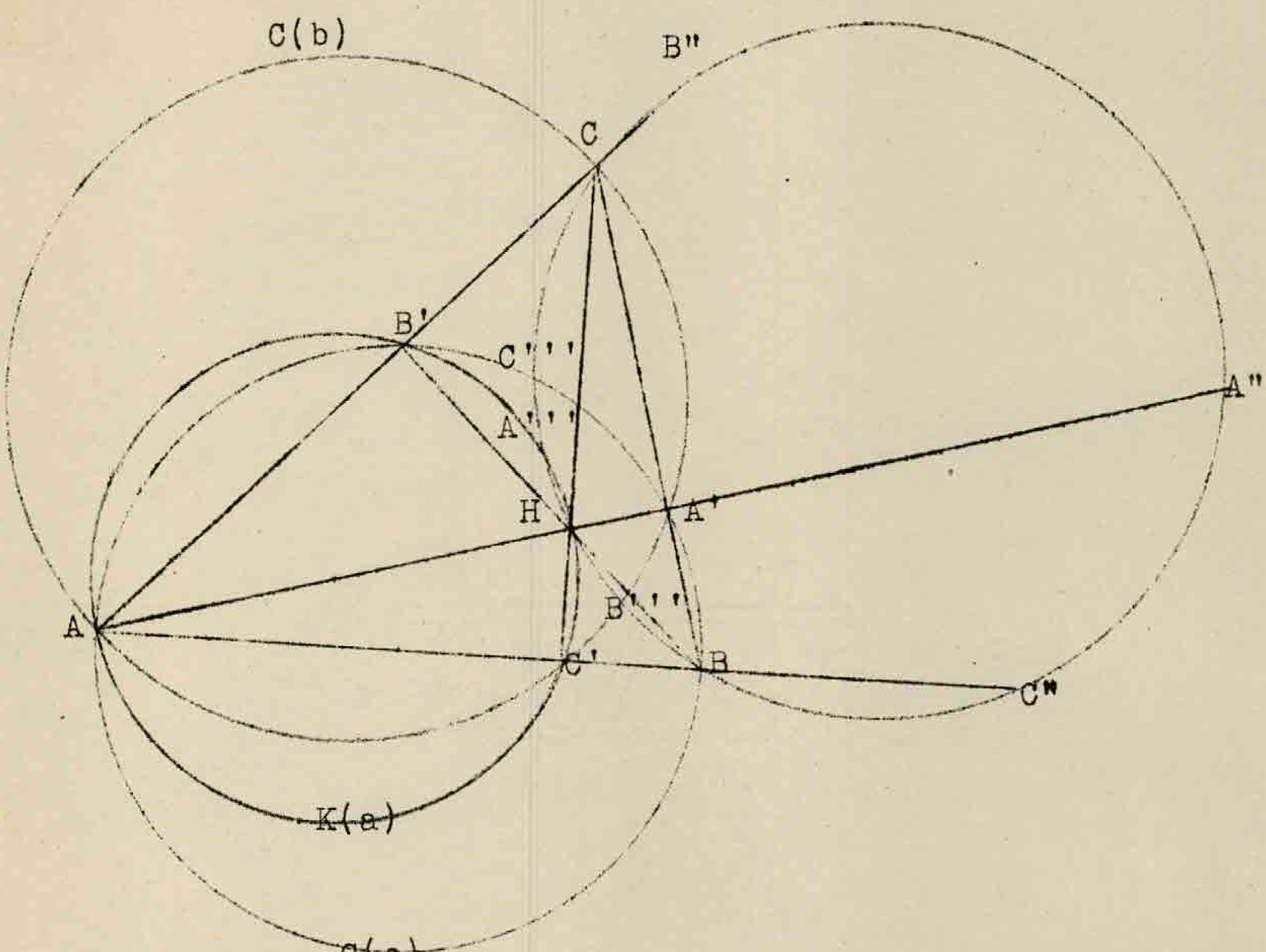
העוברים דרך H הם K(c),K(b),K(a),h(c),h(b),h(a). הנקודות העקריות על h(a) הן U,A', על h(b) U,B', על h(c) U,C'. ולפי זה פוגש F(H) את ההמשכים של $\bar{h}(a),\bar{h}(b),\bar{h}(c)$ בנקודות A",B",C" באופן ש HA'=A'A", HB'=B'B", HC'=C'C" (משפט ידוע בהנדסה). הוא גם חותך את K(a),K(b),K(c) בנקודות A''',B''',C''' באופן שכל אחת מרביעיות הנקודות A'''B'HC', B'''C'HA', C'''A'HB' הרמוניות הן. אבל במקרה דידן, שמעגל פוירבך הוא המעגל החוסם את המשולש, כדאי להעמיק יותר. ידוע כי מעגל פוירבך במובן הקלסי (כלומר F(U)) משיק ל 16 מעגלים. אנו נקבל אותם על ידי כך שנרשום לכל אחד מן המשולשים ABC, ABH, ACH, BCH את ארבעת המעגלים המשיקים לצלעותיהם. אם נבדוק היטב ונמצא את 16 המעגלים המתאימים להם במקרה של F(H) תתברר לנו צדקת המשפט הבא:

משפט ו. המעגל החוסם את המשולש משיק ל 16 המעגלים המוגדרים כדלקמן:

4 מהם על ידי הדרישה שכל אחד מהם ישיק לכל אחד מהמעגלים K(a),K(b),K(c);
4 מהם על ידי הדרישה שכל אחד מהם ישיק לכל אחד מהמעגלים K(a),h(b),h(c);
4 מהם על ידי הדרישה שכל אחד מהם ישיק לכל אחד מהמעגלים K(b),h(c),h(a);
4 מהם על ידי הדרישה שכל אחד מהם ישיק לכל אחד מהמעגלים K(c),h(a),h(b).



ציור 3



ציור 4

על המערכות של פונקציות צ ׳ ב י ש ב השיכות לאינטרבל מסוים

ברוך גרמנסקי

א. יהי I: $a<x<b$ אינטרבל פתוח, סופי או אינסופי, של המשתנה הממשי x ותהי $f_k(x)$, $k=0,1,\dots$ סדרה נתונה של פונקציות ממשיות המוגדרות באינטרבל I ורציפות בכל מקום בו. אנו קוראים לסדרה $f_k(x)$, $k=0,1,\dots$ מערכת של צ ׳ ב י ש ב - ב ר נ ש ט י ן (בקצור מערכת-.T.-B) לגבי I אם יש לה התכונה הבאה:

(α) מספר נקודות האפס באינטרבל I של הצרוף הלינארי (ה„פולינום")

$$P(x)=a_of_o(x)+a_1f_1(x)+\dots+a_nf_n(x) \tag{1}$$

שבו n הוא מספר שלם אי-שלילי רצוני ו a_i, $0\leq i\leq n$ הם מספרים ממשיים רצוניים, אינו עולה על n פרט למקרה

$$a_o=a_1=\dots=a_n=0 \tag{2}$$

כאן כל נקודת אפס ξ נחשבת פעם אחת אם $P(x)$ משנה את סימנו כאשר x עובר דרך ξ והיא נחשבת פעמים אם $P(x)$ אינו משנה את סימנו כאשר x עובר דרך ξ.

ס. ב ר נ ש ט י ן בספרו:

"Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle", Paris 1926

עין במערכות כנ"ל בחפשו פונקציות מקורבות מהמבנה (1) הנותנות אפרוכסימציה אופטימלית במובנו של צ ׳ ב י ש ב לפונקציה $f(x)$ נתונה המוגדרת ורציפה ב I, אמנם בהגבילו את הסדרה $f_k(x)$, $k=0,1,\dots$ בהגבלה הנוספת שאבריה יהיו פונקציות חסומות ב I.

ב. פרופ׳ פ ק ט ה בסמינריון על הנושא „אפרוכסימציה ואינטרפולציה" שהתקים לפני כעשר שנים התנה תנאי פחות מגביל לגבי הסדרות $f_k(x)$, $k=0,1,\dots$ מהתנאי (α) בדרשו:

(β) לצרוף הלינארי (1) לא תהיינה ב I יותר מ n נקודות אפס שונות זו מזו פרט מאשר במקרה (2). כאן כל נקודת אפס של הצרוף הלינארי (1) נחשבת פעם אחת בין אם $P(x)$ משנה בה את הסימן ובין אם הוא איננו משנה בה את סימנו.

מטרת העבודה הנוכחית היא להראות שקבוצת הסדרות של פונקציות המקימות את הדרישה (β), שנקרא להן מערכות צ ׳ ב י ש ב - פ ק ט ה (בקצור מערכות-.T.-F), ושברור שהיא מכילה את קבוצת מערכות-.T.-B בתור קבוצה חלקית, היא לא יותר רחבה מהקבוצה האחרונה, כי אם מתלכדת אתה. במלים אחרות, אנחנו מראים ששתי ההגדרות של שתי המערכות, זו של .T.-B וזו של .T.-F הן אקויבלנטיות, כלומר שקים המשפט הבא:

משפט. כ ל מ ע ר כ ת - .T.-B ה י א ג ם מ ע ר כ ת - .T.-F ו ל ה פ ך כ ל מ ע ר כ ת - .T.-F ה י א ג ם מ ע ר כ ת - .T.-B א ו ב מ ל י ם א ח ר ו ת: ה ק ב ו צ ה ש ל מ ע ר כ ו ת - .T.-B מ ז ד ה י ת ע ם ק ב ו צ ת מ ע ר כ ו ת - .T.-F.

ג. בתור נקודת יציאה לאמות משפטנו זה תשמש העובדה שקל להוכיחה שתנאי הכרחי לכך שהסדרה $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ תהיה מערכת-.T.-F לגבי האינטרבל I ועל אחת כמה וכמה מערכת-.T.-B הוא שהדטרמיננטה

$$D(x_0,x_1,\ldots,x_n;\ f_0,f_1,\ldots,f_n) \equiv \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{3}$$

תהיה שונה מאפס בשביל כל n שלם אי-שלילי, $n=0,1,\ldots$ ובשביל כל מערכת של $n+1$ מספרים x_k, $0\le k\le n$ שונים זה מזה מתוך I. מהמשפט שלנו יצא שתנאי זה הוא לא רק הכרחי, כי אם גם מספיק כדי ש $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ תהוה מערכת-.T.-B ולא כל שכן מערכת-.T.-F לגבי האינטרבל I.

ד. כדי להמשיך את הוכחת המשפט שלנו אנחנו צריכים את הלמה הבאה.

למה. יהי n מספר רצוני שלם ובלתי-שלילי ותהי $\varphi_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n$ סדרה סופית של פונקציות המוגדרות באינטרבל הפתוח I: $a<x<b$ והרציפות בו והמקימות בו את התנאי

$$D(x_0,\ldots,x_k;\ \varphi_0,\ldots,\varphi_k)\neq 0,\quad k=0,1,\ldots,n \tag{3'}$$

בשביל כל מערכת של נקודות x_l, $l=0,1,\ldots,k$ השונות זו מזו; אם יש אז לפולינום $P(x)=a_0\varphi_0(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)$ עם מקדמים a_m, $m=0,1,\ldots,k$ שאינם מתאפסים כולם $k\geq 1$ נקודות אפס שונות ב ל י שנוי סימן (במקרה הנתון על יד נקודות אפס אחרות ע ם שנוי סימן), אזי אפשר למצוא פולינום שני $Q(x)=b_0\varphi_0(x)+\ldots+b_n\varphi_n(x)$ עם מקדמים b_m, $m=0,1,\ldots,n$ שאף הם אינם מתאפסים כולם באופן שלפולינום החדש תהיינה ל כ ל ה פ ח ו ת k נקודות אפס יותר מל $P(x)$.

ה. **הוכחה של הלמה.** אנחנו מעירים בראשונה שלכל פולינום $P(x)$ עם מקדמים שלא כולם מתאפסים יש בגלל (3') רק נקודות אפס מבודדות. אנחנו מסמנים את נקודות האפס של $P(x)$ (השונות ביניהן) ב $x_1,x_2,\ldots,x_m$, $m\leq n$, אותן נקודות אפס של $P(x)$ שבהן $P(x)$ מתאפס בלי שנוי סימן ב $y_1,y_2,\ldots,y_k$, $k\leq m$. מהן תהיינה $y_{r_1},y_{r_2},\ldots,y_{r_i}$ אותן נקודות האפס שבסביבתן $P(x)$ הוא חיובי ו $y_{s_1},y_{s_2},\ldots,y_{s_j}$ אותן נקודות האפס שבסביבתן $P(x)$ הוא שלילי. אנחנו מראים בראשונה שיש פולינום $P_1(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$ שהוא שלילי בנקודות $y_{r_1},y_{r_2},\ldots,y_{r_i}$, שהוא חיובי בנקודות $y_{s_1},y_{s_2},\ldots,y_{s_j}$ ושבשאר נקודות האפס של $P(x)$ הוא מתאפס.

יסמן q_h, $h=1,2,\ldots,m$ את היחידה החיובית, את היחידה השלילית או את המספר אפס בהתאם לכך אם x_h הוא אחד מה y_s, אחד מה y_r או אחת מנקודות האפס הנשארות של $P(x)$. אזי למערכת של m המשואות הליניאריות

$$\sum_{v=0}^{m-1} c_v\varphi_v(x_h)=q_h,\quad h=1,\ldots,m \tag{4}$$

ב m הנעלמים c_k, $k=0,1,\dots,m-1$ יש, בגלל (3'), פתרון אחד ויחיד במספרים ממשיים שבברור לא כולם אפסים.

יהי אפוא $P_1(x)=c_0\varphi_0(x)+\dots+c_{m-1}\varphi_{m-1}(x)$ פולינום שנוצר בעזרת פתרון $c_0,\dots,c_{m-1}$ של (2). אנחנו יוצרים את קבוצת הפולינומים:

$$Q(x;\vartheta)=P(x)+\vartheta(P_1(x)-P(x)),\quad 0\le\vartheta\le 1. \tag{5}$$

בשביל $\vartheta=0$ מקבלים $Q(x;0)=P(x)$, בשביל $\vartheta=1$: $Q(x;1)=P_1(x)$ וביתר הדברים תלוי $Q(x;\vartheta)$ באופן ליניארי ב ϑ. לכן קיים

$$\operatorname{sgn} Q(x_h;\vartheta)=q_h,\quad h=1,\dots,m, \tag{6}$$

בשביל כל $0<\vartheta\le 1$ ומזה נובע (בהביאנו בחשבון ש $k\ge 1$ ושלכן גם לכל הפחות אחד מהמספרים i או j הוא לכל הפחות שוה ל 1) שהפולינום $Q(x;\vartheta)$ הוא בשביל כל $0<\vartheta\le 1$ בעל מקדמים שאינם מתאפסים כולם. אנחנו מראים עכשיו שישנו ערך $\vartheta=\vartheta_0$, $0<\vartheta_0\le 1$ שבשבילו יש לפולינום $Q(x;\vartheta_0)$ לכל הפחות k נקודות אפס יותר מלפולינום $P(x)$ ועל ידי כך נשלים את הוכחת הלמה שלנו.

אנחנו בוחרים מספר $\delta>0$ די קטן באופן כזה שכל האינטרבלים הסגורים $|x-x_h|\le\delta$, $h=1,\dots,m$ עם נקודות האפס x_h, $h=1,\dots,m$ של $P(x)$ בתור נקודות המרכז ועם האורך 2δ יהיו מופרדים אחד מהשני. אנחנו יוצרים:

$$\max_{0\le y_t-x\le\delta}|P(x)|=M'_t(\delta)=M'_t,\quad t=1,\dots,k \tag{7}$$

$$\max_{0\le x-y_t\le\delta}|P(x)|=M''_t(\delta)=M''_t,\quad t=1,\dots,k \tag{8}$$

הלאה אנחנו מציבים: $M=M(\delta)=\operatorname{Min}(M'_1,\dots,M'_k;\ M''_1,\dots,M''_k)$. נסמן כמו כן את האינטרבל $0\le y_t-x\le\delta$, $t=1,\dots,k$ ב I'_t ואת האינטרבל $0\le x-y_t\le\delta$, $t=1,\dots,k$ ב I''_t. אנחנו קובעים עכשיו $\vartheta=\vartheta_0$ עם $0<\vartheta_0\le 1$ באופן כזה ש

$$|Q(x;\vartheta_0)-P(x)|<M \tag{9}$$

בכל הנקודות של האינטרבלים I'_t ו I''_t הנזכרים זה עתה. ברור שזה אפשרי כפי שזה נובע מההגדרה (5) של $Q(x;\vartheta)$. $Q(x;\vartheta_0)$ הריהו אז הפולינום המבוקש על ידנו.

כדי להראות זאת נסתכל באותן נקודות u'_t ו u''_t של האינטרבלים הסגורים I'_t ו I''_t שבהן $|P(x)|$ מקבל את המכסימה הנזכרים לעיל M'_t ו M''_t:

$$P(u'_t)=M'_t,\quad t=1,\dots,k \tag{10}$$

$$P(u''_t)=M''_t,\quad t=1,\dots,k \tag{11}$$

אנחנו רואים עכשיו שהפולינום $Q(x;\vartheta_0)$ הוא בנקודות

$u'_{r_1},u'_{r_2},\dots,u'_{r_i}$ ו $u''_{r_1},u''_{r_2},\dots,u''_{r_i}$ עודנו חיובי בעוד שבנקודות

$u'_{s_1},u'_{s_2},\dots,u'_{s_j}$ ו $u''_{s_1},u''_{s_2},\dots,u''_{s_j}$ הוא עודנו שלילי. זה נובע מתוך כך

שלפי (7) קיים:

$$|Q(u'_t;\vartheta_0)-P(u'_t)|<M<M'_t \tag{12}$$

$$|Q(u''_t;\vartheta_0)-P(u''_t)|<M<M''_t \tag{13}$$

מצד שני יש לפולינום $Q(x;\vartheta_0)$ בנקודות y_t, $t=1,\dots,k$ הסימן $\operatorname{sgn} q_t$. לכן $Q(x;\vartheta_0)$ משנה גם באינטרבלים I'_t וגם באינטרבלים I''_t, $t=1,\dots,k$ את הסימן ומזה נובע שיש בתוך האינטרבלים האלה לכל הפחות 2k נקודות ש ו נ ו ת שבהן הפולינום $Q(x;\vartheta_0)$ מתאפס. ש $Q(x;\vartheta_0)$ מתאפס בנקודות האפס של $P(x)$ עם שנוי סימן, את זה כבר ראינו למעלה. לכן יש ל $Q(x;\vartheta_0)$ לכל הפחות k נקודות אפס יותר מל $P(x)$ ובזה הושלמה ההוכחה של הלמה.

ו. **הוכחה של המשפט.** בכל אופן נכון שכל מערכת-.T.-B השייכת ל I היא גם מערכת-.T.-F השייכת ל I, כי הדרישה המאפיינת את מערכות-.T.-B היא יותר חזקה מהדרישה המאפיינת את מערכות-.T.-F. אנחנו צריכים אפוא להוכיח רק שכל מערכת-.T.-F השייכת ל I היא גם מערכת-.T.-B השייכת ל I. תהא אפוא $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ מערכת-.T.-F. אז התנאי (1), כפי שהעירונו בהתחלה, ממולא ולכן אנו יכולים להשתמש בלמה שלנו בשביל כל $n\geqslant 0$, n שלם. אנחנו יוצרים במערכת זאת את הפולינום הרצוני $P(x)=a_0f_0(x)+\ldots+a_nf_n(x)$ עם מקדמים שאינם מתאפסים כולם ומראים שגם אז, אם אנחנו סופרים את נקודות האפס שלו בלי שנוי סימן בהן (אם ישנן) שתי פעמים ואת שאר נקודות האפס שלו (אם ישנן) פעם אחת, מן הנמנע הוא שהספירה תתן יותר מ n נקודות אפס. ועל ידי כך יהיה מוכח ש $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ היא גם מערכת-.T.-B.

ובאמת, במקרה ההפוך תהיינה ל $P(x)$ לכל הפחות $n+1$ נקודות אפס אם נספור את כל k נקודות האפס שלו בלי שנוי סימן בהן שתי פעמים. אבל אז אפשר למצוא, לפי הלמה, פולינום $Q(x)$ אחר באותה מערכת של פונקציות שיש לו לכל הפחות k נקודות אפס שונות יותר מל-$P(x)$. ל $Q(x)$ היו אז לכל הפחות $n+1$ נקודות אפס שונות אם נספור כ ל נקודת אפס שלו פעם אחת, וזה היה עומד בסתירה עם ההנחה ש $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ היא מערכת-.T.-F. כך הראינו של-$P(x)$ יש לכל היותר n נקודות אפס גם כאשר אנחנו סופרים את נקודות האפס שלו בלי שנוי סימן בהן שתי פעמים, ועל ידי זה המשפט שלנו מוכח בשלמותו.

On the eight "Feuerbach circles" attached to a triangle

Pessach Hebroni

(Summary)

a) Let ABC be a triangle, AA', BB', CC' its heights, H its orthocentre. We consider the figure from the point of view of the geometry of reciprocal radii. Call U the point at infinity of its plane. We have here 8 points P: A, B, C, A', B', C', H, U. Draw 6 circles with diameters D: AB, BC, CA, HA, HB, HC. The lines containing the diameters D we consider as an other 6 circles, and so we get a configuration of 8 points P and 12 circles with the following properties: α) on each circle there are 4 points, β) on each point there are 6 circles, γ) the 6 circles on each point form a "complete quadrangle"; two opposing sides of such a quadrangle are orthogonal.

b) Draw the Feuerbach circle relative to ABC; this cicle contains A', B', C' and the centres of the segments D. It is also tangent to 16 circles; these are all circles tangent to any three of the lines containing the segments D. The 9 points and 16 circles above can easily be defined in a form which is invariant w. r. t. Inversion Geometry.

c) By an inversion W with any of the 8 points P other than U as centre, the 6 circles through that point became a straight lined triangle M, and its heights. Call the corresponding Feuerbach circle $\underline{F}(P)$. Repeating the inversion W we revert to the original figure and $\overline{F}(P)$ becames a circle $F(\underline{P})$. The images of the 9 Feuerbach points and 16 Feuerbach circles of $\overline{F}(P)$ are invariantly related to $F(P)$ and our whole configuration, and $F(P)$ becomes thus equivalent to the original Feuerbach circle $F(U)$. There are thus 8 "Feuerbach" circles attached to a triangle. Especially, taking P=H, we have:

The circumcircle of a triangle is tangent to 16 circles, each of which is tangent to three of the six circles whose diameters are: HA, HB, HC, AA', BB', CC'.

On function systems of Tchebyscheff belonging to a given interval

Baruch Germansky

(Summary)

The infinite sequence of real valued functions $f_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ defined and continuous in the open interval I: $a<x<b$ is called a Tchebyscheff system in the sense of B e r n s t e i n (T.-B.-system) for I if the generalized polynomial $P(x)=a_of_o(x)+\ldots+a_nf_n(x)$ with real coefficients $a_o,\ldots,a_n$ not all vanishing has at most n zeros in I, when zeros ξ at which $P(x)$ does not change its sign are counted twice, while it is called a Tchebyscheff system in the sense of F e k e t e (T.-F.-system) when polynomials $P(x)$ as described before have in I n zeros at most, each zero being counted once even when $P(x)$ does not change its sign at them. It is clear that every T.-B.-system is also a T.-F.-system. In the present note it is shown that also the converse is true, the proof being based on the following

Lemma. From every polynomial of a T.-B.-system for I possessing (among others) k distinct zeros in I at which $P(x)=\sum_{v=0}^{n} a_vf_v(x)$ does not change its sign, one can deduce a second polynomial $Q(x)=\sum_{v=0}^{n} b_vf_v(x)$ of the same T.-B.-system possessing in I at least k distinct zeros more than $P(x)$.

A lemma on the radical and an application

Jakob **Levitzki**

(Summary)

In the present note we use the term radical to denote the sum of all nilpotent ideals of a ring S (Notation: N(S)=radical of S). In §2 the following lemma is proved: If N(S)=0 and A is a left ideal, then N(A)=M(A), where M(A) is the left annihilator of A (i. e. the set of all elements x such that $x \varepsilon A$ and Ax=0). By using this lemma we prove in §3 that each right or left nil-ideal of a ring which satisfies a polynomial identity (in short: PI-ring) belongs to the lower radical of S. As a consequence of this theorem it follows that in each PI-ring the radicals in the sense of Koethe and in the sense of Baer exist, and coincide with each other. Hence, each PI-nil-ring coincides with its lower radical. Since the lower radical of a ring is semi-nilpotent, this consequence includes a theorem due to Kaplansky [3] who proved that each PI-nil-ring is semi-nilpotent.

The product of sequences
with a common linear recursion formula of order 2

Dov Jarden and Theodor Motzkin

(Summary)

A recurring sequence (R_n) of order r with the alternating scale $a_o,\dots,a_r$, where $a_o,\dots,a_r$ are arbitrary complex numbers with $a_o a_r \neq 0$, is a sequence for which

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i a_i R_{n+i}=0 \quad (n=\dots,-1,0,1,\dots).$$

We consider k-1 (k>1) recurring sequences $(W_n^{(i)})$ (i=1,...,k-1) of order 2 with the common alternating scale a,b,c. The fundamental recurring sequence (U_n) with the alternating scale a,b,c is defined by $U_o=0$, $U_1=1$. We call $\binom{k}{i}_U=U_kU_{k-1}\cdots U_{k-i+1}/U_1U_2\cdots U_i$, and $\binom{k}{0}_U=1$, a generalized binomial coefficient formed from the sequence (U_n).

Theorem 1. The sequence $(P_n=\prod_{i=1}^{k-1} W_n^{(i)})$ whose n-th term is the product of the n-th terms of k-1 (k>1) recurring sequences $(W_n^{(1)}),\dots,(W_n^{(k-1)})$ with the common alternating scale a,b,c (ac≠0), is a recurring sequence of order k, with the alternating scale

$$s_i=\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U \quad (i=0,\dots,k),$$

i. e. we have

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\frac{a}{c}\right)^{\binom{k-i}{2}}\binom{k}{i}_U P_{n+i}=0.$$

Theorem 2. For the fundamental recurring sequence (U_n) with the alternating scale a,b,1, where a and b are integers, every generalized binomial coefficient $\binom{k}{i}_U=U_kU_{k-1}\cdots U_{k-i+1}/U_1U_2\cdots U_i$, $k \geqslant 0$, is an integer.

RIVEON LEMATEMATIKA

A QUARTERLY JOURNAL

INTENDED TO PROMOTE MATHEMATICAL RESEARCH
AMONG STUDENTS OF MATHEMATICS.

DOV JARDEN, EDITOR

Volume 3 Jerusalem, June 1949 Number 2

CONTENTS

Editor's address: Dov Jarden, Kneset Hachadasha, Jerusalem, Israel