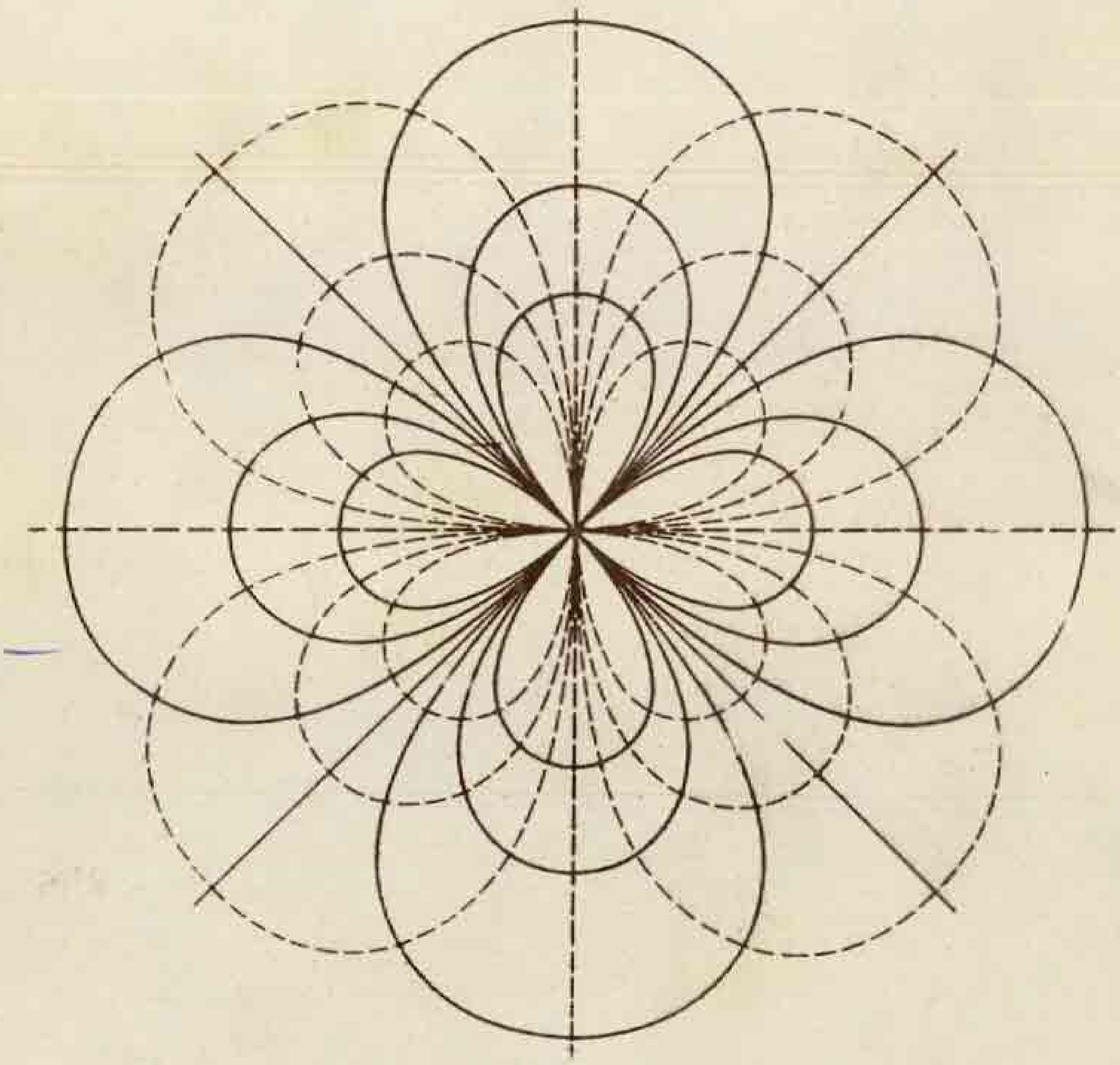
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 3 רחובות, חשון תשכ"ז, נובמבר 1966 מס 3

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

עם הוצאת חוברת זו, היא הראשונה לשנת הלימודים תשכ"ז, אנו מאחלים לכל קוראינו, תלמידים, מורים, וחובבים כאחד, שנה מענינת ומבורכת.

אנו גאים ושמחים על ההתרחבות המתמדת (אם גם איטית) של קהל הקוראים ונשתדל לשרת אותם באמונה. מספר המאמרים והבעיות המוצעים ע"י הקוראים הולך וגדל ואנו מקוים כי תופעה זו תמשיך גם בעתיד. לא תמיד נוכל לפרסם את כל המגיע מיד עם קבלתו, כי ישנם שיקולים הקשורים במבחר מאוזן של תוכן החוברות, פתרון בעית הפסיפס של התאמת המאמרים למסגרת בהתחשב באורכם, ועוד. אבל הרוב המכריע של החומר המתקבל ראוי בהחלט לפרסום ונשתדל לקיים את המימרא "אין לך דבר שאין לו מקום".

ב ע י ה

לרגל יום העצמאות שיגרה כל עיר בישראל ברכה לעיר הקרובה אליה ביותר (נניח כי לא היו שני זוגות ערים במרחקים שווים). בסוף התברר כי אף עיר לא קבלה יותר מחמש ברכות כאלה. מה אפשר ללמוד מעובדה זו על פיזור האוכלוסיה במדינה?

(פתרון הבעיה בעמוד 6)

משחק ה-15

מאת
צבי הראל, חיפה

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

I

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

II

רבים מן הקוראים מכירים בודאי את משחק ה-15; קופסה רבועה קטנה ובתוכה 15 רבועים ממוספרים הנתנים להזזה. הבעיות הידועות בקשר למשחק הן בדרך כלל מעבר בעזרת סדרת הזזות ממערך אחד למערך נתון שני. אולם, בעיות אלה אינן תמיד בנות-פתרון. לבעיות כאלה, ובעיקר לבעיה של המעבר ממערך II למערך I (ראה ציור), מקדש מאמר זה.

בתחילה - מספר פרטים על תולדות הבעיה, לקוחים מתוך כתביו של סמואל לויד:

"תושבים ותיקים של ממלכת הפקחות והחריפות זוכרים בודאי, שבראשית שנות השמונים אלצתי את כל יושבי תבל "לאמץ את כח-מחשבתם" בשל קופסת רבועים הנתנים להזזה, שנתפרסמה בשם "המשחק ב-15". 15 רבועים סודרו בקופסה רבועה בסדר רגיל, ורק הרבועים 14, 15 - הוחלפו מקומותיהם (מערך II).

עיקרה של הבעיה הוא בזה, שעל המשחק להזיז את הרבועים זה אחר זה ולהביא אותם לידי מצב הקין, כך שהרבועים 14, 15 יחזרו למקומם (מערך I).

איש לא זכה בפרס של 1000 דולר, שנקבע לפותר, אם כי הכל עמלו אל כך ללא-לאות. ספרו ספורים משעשעים על חנוונים, ששכחו לפתח את חנויותיהם ועל פקידים מכובדים אשר עמלו וטרחו לאור פנסי הרחוב, בחפשם פתרון לבעיה. איש לא רצה לוותר על מציאת פתרון, שכן הכל היו בטוחים בהצלחתם. קציני-צי, שתפקידם לכוון את תנועת האניות, היו שטופים במשחק ואניותיהם עלו על שרטונים; נהגי-קטרים לא עצרו את הרכבות בתחנות; החוואים זנחו את מחרשותיהם."

* *
*

פתרון לבעיתו של לויד לא נמצא, וזמן קצר לאחר 1880 הוכח כי הבעיה אינה בת פתרון. יתר על כן, מתוך המספר הגדול של הבעיות הקשורות למשחק ה-15, מחציתן אינן נתנות לפתרון בעזרת כל תחבולה שבעולם. ההוכחה המקובלת לכך לקוחה מתחום האלגברה הגבוהה (תורת

הדטרמיננטים). ההוכחה שאביא כאן היא אלמנטרית יותר, אעפ"י שאין הדבר פוגע בדיוקה.

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

III

לפני שנגש להוכחה עצמה, יש לברר מושג מסוים, והוא "הפרעות" (משתמשים בו גם בתורת התמורות ובתורת הדטרמיננטים).

במערך I נמצאים 15 הרבועים בסדרם התקין. אולם, במערך אחר, יתכן כי רבוע שמספרו גדול, יקדים רבוע שמספרו קטן ממנו. לקדום כזה ביחס לסדר התקין קוראים "הפרעה". כך למשל אין במערך I כל הפרעה, במערך II יש הפרעה אחת (15 לפני 14), ואלו במערך III יש שש הפרעות (9 לפני 8; 14 לפני 12, 13 ו-11; 12 לפני 11; 13 לפני 11). באופן כזה אפשר למצוא את מספר ההפרעות בכל מערך ומערך. את מספר ההפרעות במערך מסוים A נסמן להלן ב- T(A).

* *
*

נטפל כעת במערך כללי L, ובמערך המתקבל ממנו ע"י הזזת רבוע - L'.

נסמן: $r_o(L)$ - השורה שבה נמצא המקום הריק במערך L. סמון דומה קיים גם לגבי המערך L'.

<u>נגדיר:</u> $f(L) = (-1)^{\{T(L) + r_o(L)\}}$

<u>משפט:</u> $f(L) = f(L')$

<u>הוכחה:</u> ייתכנו שני מקרים:

<u>א.</u> <u>הזזת הרבוע היתה אפקית.</u>

במקרה זה לא נשתנה מספר ההפרעות, וגם המקום הריק נשאר באותה שורה.

ז"א
$$T(L) = T(L')$$
$$r_o(L) = r_o(L')$$
$$f(L) = f(L')$$

מש"ל.

ב. <u>הזזת הרבוע היתה אנכית</u>

נסמן את המקומות שבהם עלולים להימצא רבועים במספרים 1 עד 16, לפי הסדר התקין. נניח שהזזנו את הרבוע n, מהמקום α למקום α_0 (שהיה בתחילה ריק), כאשר $\alpha = \alpha_0 \pm 4$ (בהתאם לכוון הזזת הרבוע – $\begin{matrix}\text{למעלה}\\ \text{למטה}\end{matrix}$).

השנוי במספר ההפרעות שנגרם ע"י הזזת הרבוע n, שווה להפרש בין מספר ההפרעות שנבעו מהרבוע n במערך L' לבין אותו מספר במערך L. (הפרעות מהרבוע n – הכוונה שרבוע זה הקדים רבועים שמספריהם קטנה מ- n והקדם ע"י רבועים שמספריהם גדולים מ- n).

<u>במערך L</u>: הרבוע n נמצא ב- $\alpha = \alpha_0 \pm 4$, המקום הריק נמצא ב-α_0.

נניח שאת הרבוע n מקדימים N רבועים שמספריהם גדולים מ- n.

בסה"כ מקדימים אותו $\begin{matrix}\alpha - 2\\ \alpha - 1\end{matrix}$ ז"א $\begin{matrix}\alpha_0 + 2\\ \alpha_0 - 5\end{matrix}$ רבועים (במקרה העליון, נמצא המקום הריק מעל לרבוע n, לכן נמצאים לפני הרבוע n $\alpha - 2$ רבועים, אף על פי שיש שם $\alpha-1$ מקומות). לכן מתוכם יש $\begin{matrix}\alpha_0+2-N\\ \alpha_0-5-N\end{matrix}$ רבועים שמספריהם קטנים מ- n. יש בסה"כ n-1 רבועים שמספריהם קטנים מ- n ולכן נמצאים אחרי הרבוע n, $\begin{matrix}n-1-(\alpha_0+2-N)\\ n-1-(\alpha_0-5-N)\end{matrix}$ ז"א $\begin{matrix}N+n-\alpha_0-3\\ N+n-\alpha_0+4\end{matrix}$ רבועים שמספריהם קטנים מ- n.

בסה"כ נובעות מרבוע n במערך L

$\begin{matrix}2N+n-\alpha_0-3\\ 2N+n-\alpha_0+4\end{matrix}$ הפרעות

<u>במערך L'</u>: הרבוע n נמצא ב- α_0, המקום הריק נמצא ב- $\alpha_0 \pm 4$.

נניח שאת הרבוע n מקדימים N' רבועים שמספריהם גדולים מ- n. בסה"כ מקדימים אותו $\begin{matrix}\alpha_0-1\\ \alpha_0-2\end{matrix}$ רבועים ולכן מתוכם יש $\begin{matrix}\alpha_0-1-N'\\ \alpha_0-2-N'\end{matrix}$ רבועים שמספריהם קטנים מ-n, ולכן נמצאים, אחרי הריבוע n, $\begin{matrix}n-1-(\alpha_0-1-N')\\ n-1-(\alpha_0-2-N')\end{matrix}$ ז"א $\begin{matrix}N'+n-\alpha_0\\ N'+n-\alpha_0+1\end{matrix}$ ריבועים שמספריהם קטנים מ-n.

בסה"כ נובעות מהרבוע n במערך L'

$$2N'+n-\alpha_0$$
הפרעות $2N'+n-\alpha_0+1$

לסכום, יהיה השנוי במספר ההפרעות

$$T(L') - T(L) = \begin{matrix} 2N'+n-\alpha_0-(2N+n-\alpha_0-3) \\ 2N'+n-\alpha_0-1-(2N+n-\alpha_0+4) \end{matrix} = 2(N'-N) \pm 3$$

כמוכן
$$r_0(L') - r_0(L) = \pm 1$$

או
$$[T(L')+r_0(L')] - [T(L)+r_0(L)] = 2(N'-N) \pm 4$$

המספר האחרון זוגי, לכן
$$(-1)^{\{T(L')+r_0(L')\}} = (-1)^{\{T(L)+r_0(L)\}}$$

או
$$f(L') = f(L)$$

מש"ל

מפאת חשיבותו הרבה של המשפט בחקירת משחק ה-15 ננסחהו מחדש:

המשפט היסודי של משחק ה-15: במשך כל פעולותנו בקופסת 15 רבועים, יישאר הבטוי $(-1)^{T+r_0}$ קבוע

מהמשפט היסודי נובעת ישר אי האפשרות של פתרון בעיות רבות הקשורות למשחק ה-15. כל אימת שהבטוי $(-1)^{T+r_0}$ לגבי המערך הראשוני שונה מזה שלגבי המערך שאליו צריך להגיע, המעבר הוא בלתי אפשרי, והבעיה לא נתנת לפתרון בשום אופן.

באופן מיוחד בלתי אפשרי פתרונה של בעיתו של לויד:

עבור המערך I - $r_0 = 4$, $T = 0$ ומכאן $(-1)^{T+r_0} = 1$

עבור המערך II - $r_0 = 4$, $T = 1$ ומכאן $(-1)^{T+r_0} = -1$

לכן $f(I) = -f(II)$ והמעבר ממערך II למערך I הוא בלתי אפשרי.

ולסיום המאמר, אביא שלש בעיות בנות פתרון:

<u>בעיה מס. 1</u>: בצאתך מהמערך II, ערוך את הרבועים בסדרם התקין, כשאתה משאיר משבצת פנויה בפנה השמאלית העליונה (מערך IV).

<u>בעיה מס. 2</u>: בצאתך מהמערך II, סובב את הקופסה רבע סבוב והעתק את הרבועים עד הגיעך למערך V.

<u>בעיה מס. 3</u>: בצאתך מהמערך II, העתק את הרבועים כך שתיצור "רבוע קסם", כלומר, שסכום המספרים בכל הכוונים יגיע ל- 30.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

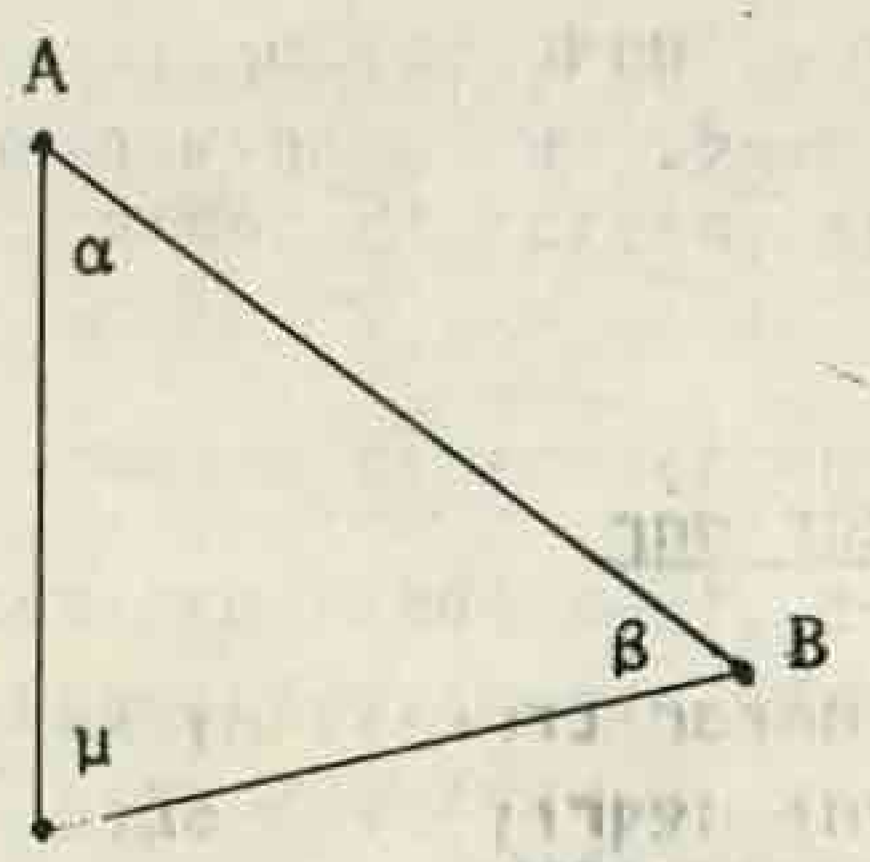
IV

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

V

(פתרונות בעמוד 16)

<u>פתרון הבעיה מעמוד 1</u>



אין להסיק שום מסקנה כי, ללא קשר בצורת פיזור האוכלוסיה, אפשר להוכיח כי אי-אפשר בכלל שתהיה עיר שהיא הקרובה ביותר לכל אחת מ-6 ערים אחרות. כי נניח ש- M היא הקרובה ביותר ל-A וגם ל- B (ראה ציור). ברור אז כי $AM < AB$ ולכן $\mu > \beta$. כמו כך $\mu > \alpha$.

מזה נובע כי

$$180° = \alpha + \beta + \mu < 3\mu$$

ולכן $\mu > 60°$ ולא יוכלו להיות יותר מחמש זויות כאלה בנקודה M.

צורתו המתמטית של מגדל " א י פ ל "

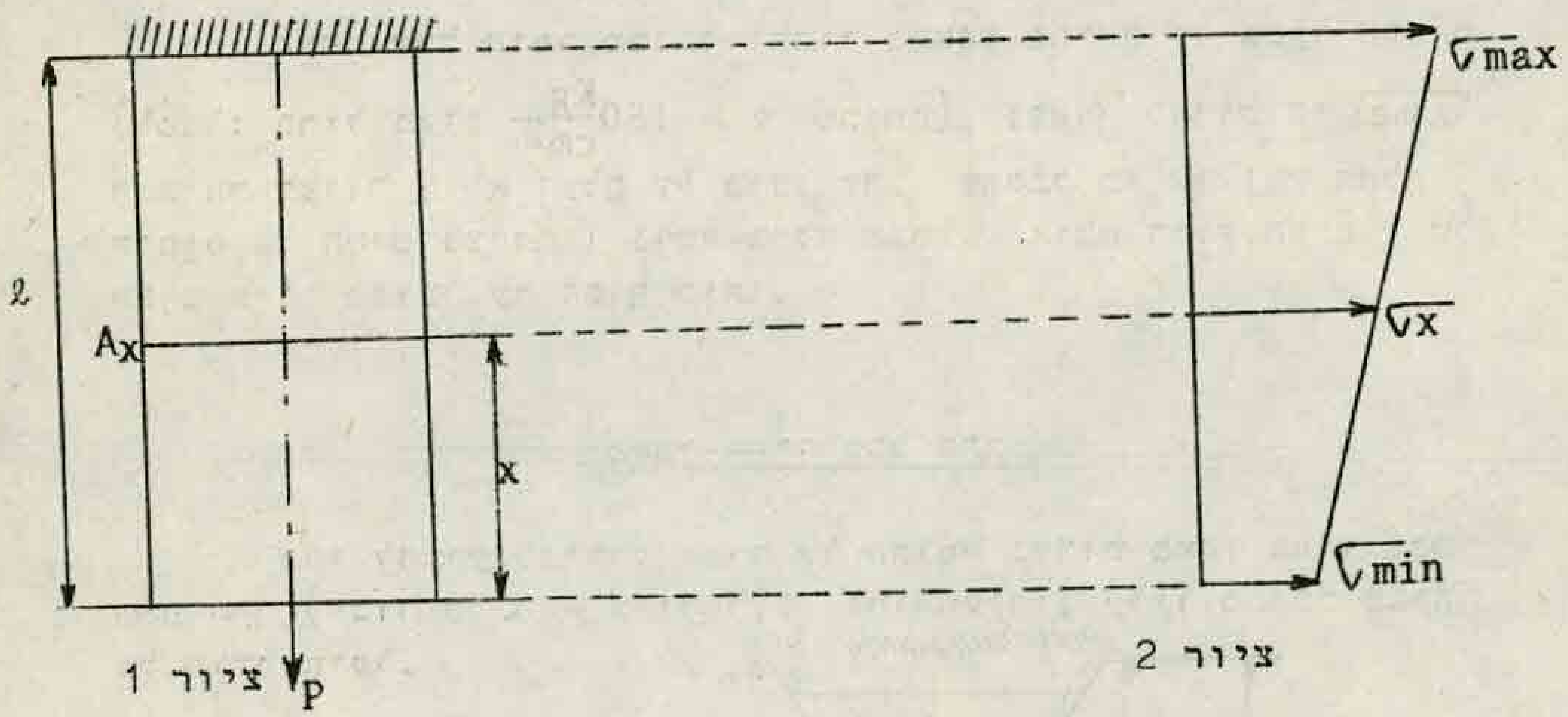
מאת: ט. רייך, ר. אבן

צורות המבנים אשר אנו רגילים לראותם הינן בדרך כלל מלבניות או מרובעות ומתנשאות לגובה מעל הקרקע. מעטים המבנים המשמשים הן למטרות מגורים והן למטרות תעשיתיות השונים מצורה זו של מנסרה מלבנית או גליל זקוף.

ענין מיוחד יש בצורה של מגדל איפל המפורסם אשר בטבורה של פריס.

לשם ניתוח צורתו של המגדל המפורסם, נבצע את השיקולים המתמטיים והטכנולוגיים הבאים:

מאמץ מתיחה על מוט אחיד



ציור 1

ציור 2

כח P פועל למתיחת המוט ℓ (ציור 1). אם ניתן להזניח משקלו של המוט לעומת P הרי הכח ליחידת שטח או המאמץ σ הוא:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (1)$$

כאשר A הוא שטח החתך.

לגבי מוט אשר לא ניתן להזניח משקלו בהשוואה לכח P יהיה המאמץ שונה עבור כל שטח החתך.

עבור חתך במרחק x מקצה המוט:

$$G = Ax\rho$$

G = משקל

ρ = משקל סגולי

$$\sigma = \frac{P + Ax\rho}{A} = \frac{P}{A} + \rho \cdot x \qquad (2)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{(x=0)} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{(x=\ell)} = \frac{P}{A} + \rho \cdot \ell$$

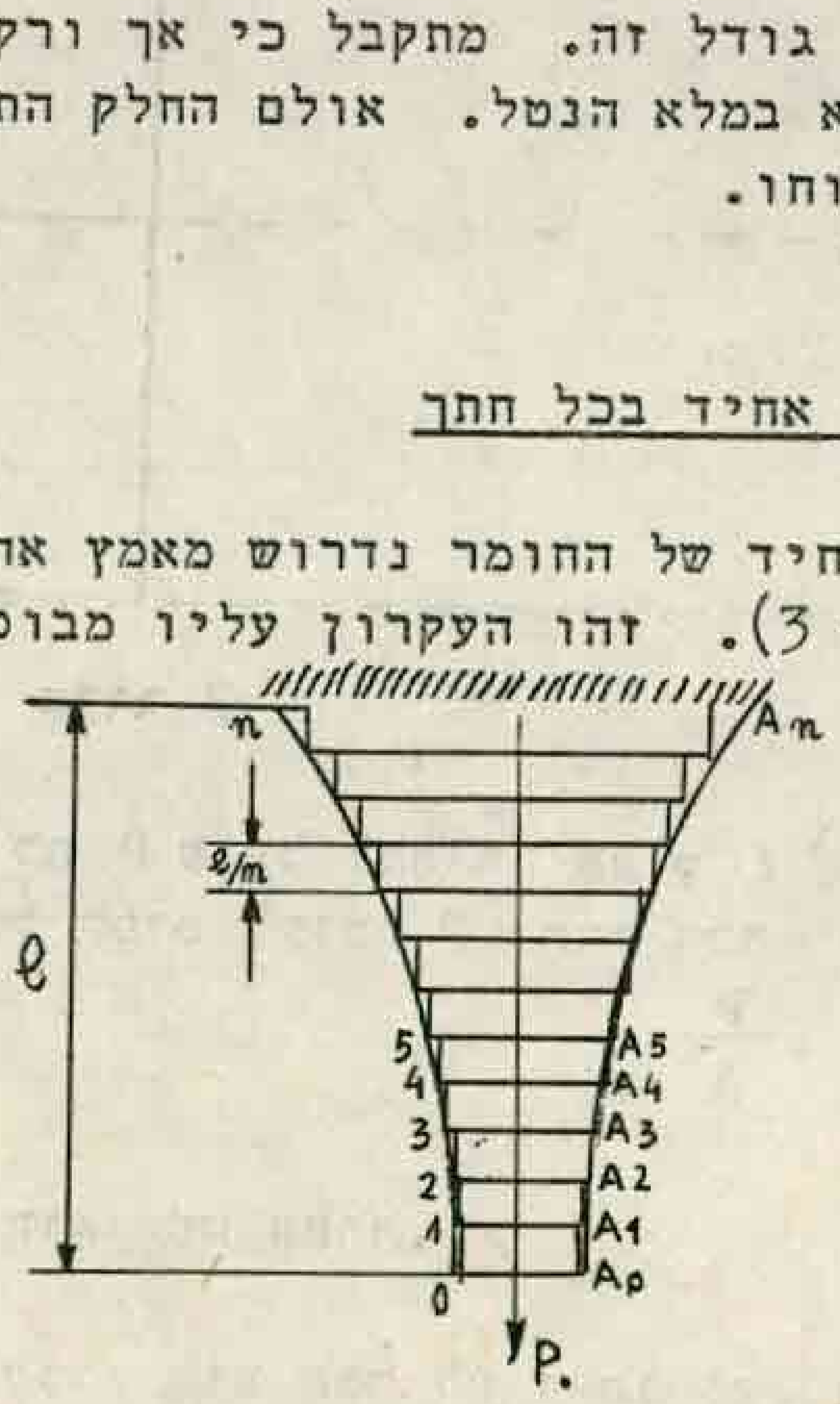
המשוואה (2) מתארת את σ כפונקציה קווית של x (ציור 2).

ניצול החומר

מאחר שכל חומר מסוגל לעמוד במאמץ מתיחה עד גבול מסוים (למשל: ברזל בנין $\sigma = 150\frac{Kg}{cm^2}$ מתיחה), נצטרך לדרוש כי σ_{max} המתואר בציור 2 לא יעלה על גודל זה. מתקבל כי אך ורק החלק הרתום של המוט בציור 1 נושא במלא הנטל. אולם החלק התחתון של המוט איננו מנוצל עד לסוף כוחו.

מאמץ אחיד בכל חתך

כדי להגיע לניצול אחיד של החומר נדרוש מאמץ אחיד בכל שטח חתך (עבור כל x – ציור 3). זהו העקרון עליו מבוסס מבנהו של מגדל איפל.



ציור 3

על פי נוסחה (1) פועל על החתך A_0 כח:

$$P_0 = \sigma A_0 \tag{3}$$

על פי נוסחה (2) פועל על החתך A_1 כח:

$$P_1 = \sigma A_0 + \rho\frac{\ell}{n}A_0 \tag{4}$$

כאן נעשתה ההנחה כי המוט של ציור 3 חולק ל-n חלקים בעלי גובה שווה, כאשר n מספר גדול מאוד.

נציב לנוסחה (4) $A_0 = \frac{P_0}{\sigma}$ ונקבל:

$$P_1 = P_0 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}P_0 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right) \tag{5}$$

$$P_2 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right) + \frac{\rho\ell}{n\sigma}A_1$$

$$P_2 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right) + \frac{\rho\ell}{n}\cdot\frac{P_1}{\sigma}$$

אחרי הצבת P_1:

$$P_2 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right) + P_0\frac{\rho\ell}{n\sigma}\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)$$

$$P_2 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)$$

$$P_2 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2$$

לגבי A_3:

$$P_3 = P_0\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2 + \frac{\rho\ell}{n}A_2 = P_0\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2 + \frac{\rho\ell}{n}\cdot\frac{P_2}{\sigma} =$$

$$= P_0\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}P_0\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2 = P_0\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^2\left(1+\frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)$$

$$P_3 = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n}\right)^3$$

באופן כללי, על חתך A_n פועל כח:

$$P_n = P_0\left(1 + \frac{\rho\ell}{n\sigma}\right)^n \tag{6}$$

נסמן: $\frac{\rho \ell}{n\sigma} = \frac{1}{m}$

מתקבל: $n = \frac{\rho \ell}{\sigma} \cdot m$

נציב בנוסחה (6) ונקבל:

$$P_n = P_0 \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\frac{\rho \ell}{\sigma}} = P_0 \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{\rho \ell}{\sigma}}$$

נזכור כי n הוא מספר גדול. למען חישוב מתמטי מדויק חייבים לקחת:

$$n \to \infty$$

לכן גם: $m \to \infty$

הבימוי: $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$

e הוא בסיס הלוגריתם הטבעי.

מכאן נובע: $P_n = P_0 \, e^{\frac{\rho \ell}{\sigma}}$

נציב: $P_n = \frac{A_n}{\sigma}$

$$P_0 = \frac{A_0}{\sigma}$$

ונקבל: $$A_n = A_0 \, e^{\frac{\rho \ell}{\sigma}} \qquad (7)$$

נוסחה (7) מראה כי לצורך קבלת מאמץ אחיד בכל חתך וחתך, חייב שטח החתך להשתנות בצורה אקספוננציאלית כמתואר בציור 3.

התארכות המוט

לפי חוק הוק, התוספת לאורך עקב מאמץ מתיחה היא:

$$\Delta \ell = \frac{P\ell}{\varepsilon A} \qquad (8)$$

ε הוא מודול יאנג שהינו מספר קבוע לכל חומר. נחשב את ההתארכות החלקית של כל קטע $\frac{\ell}{n}$ במוט של ציור 3.

$$\Delta\ell_1 = \frac{P_0}{\varepsilon A_0} \cdot \frac{\ell}{n} = \frac{\sigma\ell}{\varepsilon n}$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{P_1}{\varepsilon A_1} \cdot \frac{\ell}{n} = \frac{\sigma\ell}{\varepsilon n}$$

$$\Delta\ell_n = \frac{P_{n-1}}{\varepsilon A_{n-1}} \cdot \frac{\ell}{n} = \frac{\sigma\ell}{\varepsilon n}$$

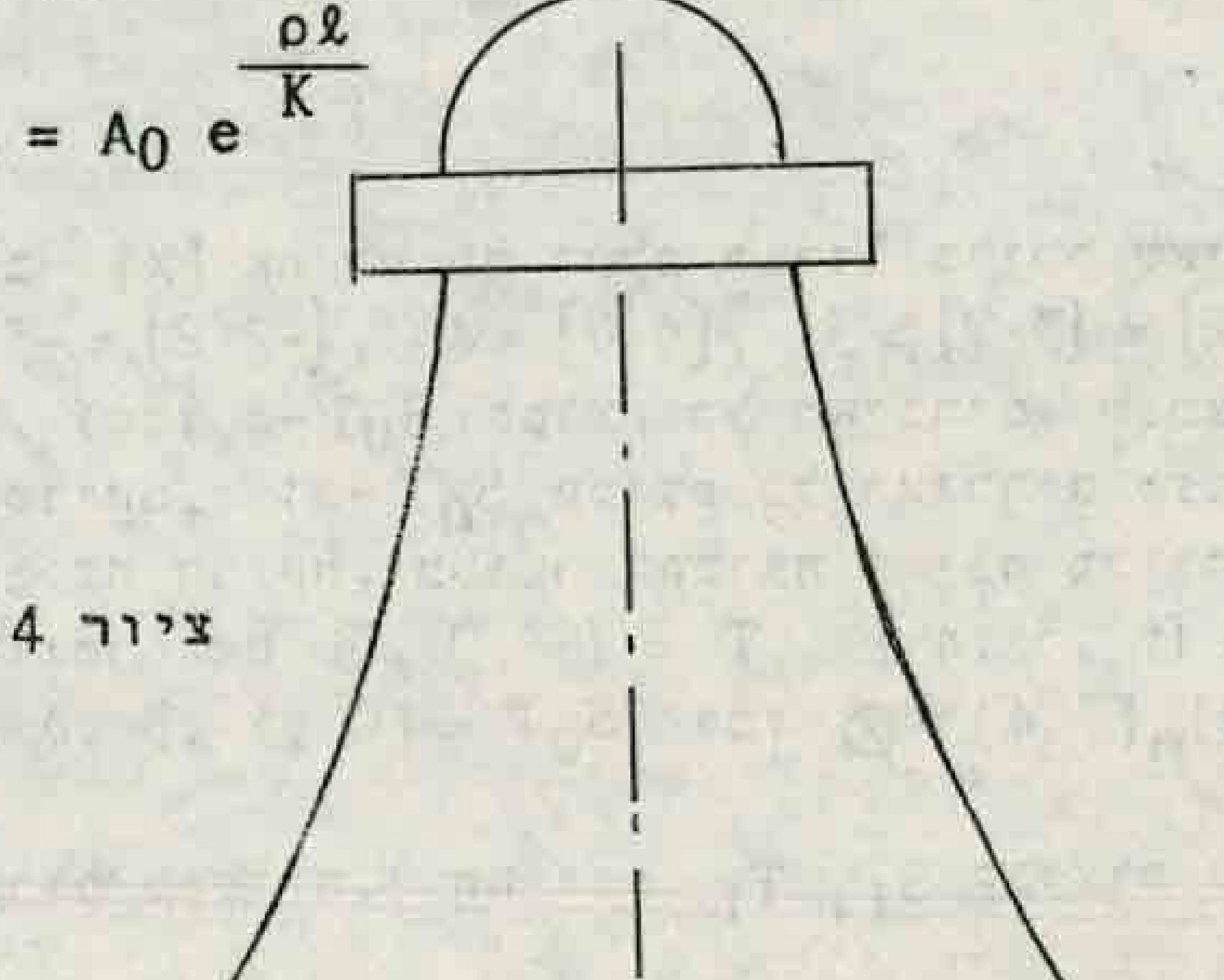
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\ell_i = n\,\frac{\sigma\ell}{\varepsilon n} = \frac{\sigma\ell}{\varepsilon} = \frac{P_0\ell}{\varepsilon A_0}$$

ובכך התארכות מוט בעל מאמץ אחיד זהה לחלוטין להתארכות מוט רגיל בעל שטח חתך אחיד.

עלינו לזכור כי על מגדל איפל פועל מאמץ לחיצה עקב משקלו העצמי ולא מאמץ משיכה. ובכן, עלינו להפוך את ציור 3 על ראשו ולקחת בביטוי הסופי מאמץ לחיצה K במקום מאמץ משיכה σ.

ובכן נוסחת הצורה של מגדל איפל היא:

$$A = A_0\, e^{\frac{\rho\ell}{K}}$$



ציור 4

קבוצות משלימות של מספרים שלמים

מאת: אביעזרי פרנקל, רחובות

1. הקדמה

אנחנו מתיחסים בזה למאמר שהופיע בגליונות מתמטיקה כרך 2 מס' 7 על המשחק הסיני Tsyanshidzi. (אגב, משחק זה ידוע גם בשם המשחק של Wythoff ע"ש מתמטיקאי שפרסם מאמר על המשחק הזה בעתון מדעי הולנדי בתחילת המאה. עדיין לא פגשתי שום דובר סינית שמכיר את המשחק או שאף זיהה בבטחה את המלה ציאנשידזי כשייכת לשפה הסינית, אף שחקרתי בדבר). בסוף אותו מאמר הועלתה השאלה למצוא נוסחה עבור מצבי הנצחון או "המצבים המיוחדים" של המשחק.

תשובה על שאלה זו ניתנה בגליונות מתמטיקה כרך 3 מס' 2 ע"י שני קוראים. כן נרמז שם על תוצאה יותר כללית. מטרתנו כאן היא נסוח והוכחת תוצאה כללית זו. כן נביא, ללא הוכחה, כמה תוצאות נוספות באותו ענין. ידיעת שני המאמרים הנ"ל אינה הכרחית להבנת מאמר זה, מלבד אולי פסקה אחת, שאפשר לדלג עליה, בה מרומז שהתוצאה הנוכחית מאפשרת להגדיר משחק כללי יותר, אף הוא בעל איסטרטגיה מדויקת, בו יש יותר חופש בבחירת המהלכים מאשר בציאנשידזי.

2. תוצאות עיקריות

כמקובל, נסמן ב- $[x]$ את המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ- x. לדוגמה, $[-2\cdot2] = -3$, $[4\cdot0] = 4$, $[3\cdot2] = [3\cdot7] = 3$.
אם S,T קבוצות כלשהן, נסמן ב- $S\cup T$ קבוצת כל האיברים שנמצאים או ב- S או ב- T או בשניהם, וב- $S\cap T$ קבוצת כל האיברים שנמצאים הן ב- S והן ב- T. הקבוצה הריקה, כלומר הקבוצה שאינה מכילה שום איבר תסומן ב- ϕ. לדוגמה אם $T = \{6, 0, 3\}$, $S = \{1, 3, 4\}$, אז $S\cap T = \{3\}$, $S\cup T = \{0, 1, 3, 4, 6\}$ וכן $\{1,2\}\cap\{3,4\} = \emptyset$.

יהיו α,β מספרים ממשיים. תהיינה S_1, T_1 קבוצות כל המספרים מהסדרות

$$\phi_n = [n\alpha], \quad \psi_n = [n\beta], \quad n = 1, 2, \dots$$

בהתאמה.

<u>הגדרה 1</u>: אנו אומרים שהקבוצות S_1, T_1 <u>משלימות</u> מלעל, אם

(א) שום מספר אינו מופיע יותר מפעם אחת ב- ϕ_n ושום מספר אינו מופיע יותר מפעם אחת ב-Ψ_n ;

(ב) $S_1 \cap T_1 = \emptyset$;

(ג) $S_1 \cup T_1 = W$ כאשר W הוא קבוצת כל המספרים החיוביים השלמים.

משפט : <u>יהיו</u> α, β <u>מספרים חיוביים. הקבוצות</u> S_1, T_1 <u>משלימות מלעל אם ורק אם</u>

(i) α, β <u>אירציונליים</u>

וגם (ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. (1)

לפני שנוכיח את המשפט, נדגים בשלוש דוגמאות. דוגמה 1 (טבלה 1):

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \alpha+1$$

n	ϕ_n	Ψ_n
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18

טבלה 1

n	ϕ_n	Ψ_n
1	1	4
2	2	8
3	3	12
4	5	17
5	6	21
6	7	25
7	9	30

טבלה 2

n	ϕ_n	Ψ_n
1	1	2
2	3	4
3	5	7
4	6	9
5	8	11
6	10	14
7	12	16

טבלה 3

דוגמה 2 (טבלה 2):

$$\alpha = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{13}+5}{2} = \alpha+3$$

דוגמה 3 (טבלה 3): $\alpha = \sqrt{3} \quad , \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

הערות:

(i) יהא a מספר חיובי שלם. השורש החיובי של המשואה
$1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+a}$, כלומר של המשואה $\alpha^2+(a-2)\alpha-a = 0$, הוא

$$\alpha = \frac{2-a+\sqrt{a^2+4}}{2} \qquad (2)$$

ללא קושי אפשר להיוכח שמספר זה אירציונלי. המקרים הפרטיים
$a=3$, $a=1$ של (2) נותנים את הערך α בדוגמאות
2, 1 בהתאמה.

(ii) נתאר את המשחק הבא: נתון מספר חיובי שלם a, ושתי ערמות של גפרורים. כל ערמה מכילה מספר (חיובי) כלשהו של גפרורים. שני שחקנים משתתפים במשחק, והם משחקים לסירוגין, זה לאחר זה. כל שחקן יכול לבחור באחד משני סוגי מהלכים:

א. הוא יכול לקחת מספר (חיובי) שרירותי של גפרורים מערמה אחת;

ב. אם הוא לוקח גפרורים משתי הערמות, נאמר k גפרורים מערמה אחת ו-ℓ גפרורים מערמה שניה, מהלכו מוגבל ע"י התנאי $|k-\ell| < a$. השחקן הלוקח את הגפרור(ים) האחרון(נים) מנצח.
עבור $a=1$ מקבלים $k=\ell$, וזה בדיוק המשחק ציאנשידזי. מצבי הנצחון שלו נתונים בטבלה 1.

באותן שיטות של המאמר על ציאנשידזי אפשר להראות בנקל שלמשחק הכללי, עבור a חיובי שלם כלשהו, איסטרטגיה מדויקת, ומצבי הנצחון נתונים ע"י הסדרות $n = 0, 1, 2\dots$, $[n\alpha]$, $[n\alpha]+na$ כאשר α נתון ע"י (2). עבור $a=3$, מצבי הנצחון נתונים בטבלה 2.

הוכחת משפט I:

א. נניח ששני התנאים ממולאים. תהא R סדרת כל המספרים מהצורה $k\alpha$, $k\beta$, $k = 1,2,\dots$, עבור כל מספר טבעי n נסמן ב-K את מספר האיברים של R שהם קטנים

מ- M. מספיק יהיה להוכיח כי, עבור כל M כזה, $K = M-1$,
כי אז יימצא בהכרח בדיוק איבר אחד של R בין כל זוג מספרים
טבעיים שכנים. היות ש- α אירציונלי, $h\alpha < m$ עבור

$h=1,2,\dots,[M/\alpha]$ וכן $h\beta<M$ עבור $h=1,2,\dots,[M/\beta]$.
לכן
$$K = \left[\frac{M}{\alpha}\right] + \left[\frac{M}{\beta}\right].$$

גם קיים
$$\frac{M}{\beta}-1 < \left[\frac{M}{\beta}\right] < \frac{M}{\beta} \quad , \quad \frac{M}{\alpha}-1 < \left[\frac{M}{\alpha}\right] < \frac{M}{\alpha}.$$

ע"י חבור אי-השויונות תוך שימוש ב- (1),
$$M-2 < \left[\frac{M}{\alpha}\right] + \left[\frac{M}{\beta}\right] = K < M.$$

היות ו- K מספר שלם, האפשרות היחידה היא $K = M-1$ והקבוצות
משלימות מלעל.

ב. נניח ש- S_1, T_1 משלימות מלעל. עבור $M > 1$ נסמן ב- $D_\alpha(M)$
וב- $D_\beta(M)$ את מספר האיברים של S_1 ושל T_1 בהתאמה הקטנים מ-
M. נגדיר מספר שלם m ע"י $m\alpha<M < (m+1)\alpha$. בגלל תנאי
(א) בהגדרה 1, $\ell>0$, $k>0$, $k\neq\ell$ גורר $[k\alpha]\neq[\ell\alpha]$.
לכן $D_\alpha(M) = m$. גם
$$\frac{M}{\alpha}-1 < m = D_\alpha(M) < \frac{M}{\alpha}$$

ע"י חילוק ב-M,
$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{M} < \frac{D_\alpha(M)}{M} < \frac{1}{\alpha}$$

מכאן ש- $\frac{D_\alpha(M)}{M}$ מתקרב ושואף ל- $\frac{1}{\alpha}$ כאשר M גדל. באופן דומה
רואים ש- $\frac{D_\beta(M)}{M}$ שואף לקראת $\frac{1}{\beta}$. היות והקבוצות משלימות
$D_\alpha(M) + D_\beta(M) = M-1$ או $\frac{D_\alpha(M)}{M} + \frac{D_\beta(M)}{M} = 1-\frac{1}{M}$ אבל עבור M
גדול מאד מתקרבת הנוסחה שמצד שמאל, כפי שראינו ל- $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
בעוד שזו מצד ימין שואפת ל-1. מכאן נובע כי $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$
אם $\alpha = s/t$ רציונלי, (1) גורר $\beta = s/(s-t)$, לכן
$kt\alpha = ks = k(s-t)\beta$ והסדרות אינן משלימות. לכן α,β
אירציונליים, ובזה מסתיימת ההוכחה.

פתרונות למשחק ה-15 מעמוד 2

1. את הסדור המבוקש משיגים באמצאות 44 התנועות הבאות:

→ 14 11 12 8 7 6 10 12 8 7 4
3 6 4 7 14 11 15 13 9 12 8
4 10 8 4 14 11 15 13 9 12 4
8 5 4 8 9 13 14 10 6 2 1

2. את הסדור המבוקש משיגים באמצעות 39 התנועות הבאות:

→ 14 15 10 6 7 11 15 10 13 9
5 1 2 3 4 8 12 15 10 13
9 5 1 2 3 4 8 12 15 14
13 9 5 1 2 3 4 8 12

3. רבוע קסם משיגים באמצעות 50 התנועות הבאות:

→ 12 8 4 3 2 6 10 9 13 15
14 12 8 4 7 10 9 14 12 8
4 7 10 9 6 2 3 10 9 6
5 1 2 3 6 5 3 2 1 13
14 3 2 1 13 14 3 12 15 3

רבוע הקסם המתקבל הוא:

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

ח.ז. קרוב ראציונלי ל-e*

מאת: עדו שמר

עבור כל מספר טבעי n נגדיר

$$p_n = \int_1^\infty x^n (x-1)^n e^{-x+1}\, dx \qquad (1)$$

$$q_n = \int_0^\infty x^n (x-1)^n e^{-x}\, dx \qquad (2)$$

$$\epsilon_n = \int_0^1 x^n (x-1)^n e^{-x+1}\, dx \qquad (3)$$

אם באינטגרל (1) נציב $z = x-1$ נקבל

$$p_n = \int_0^\infty (z+1)^n z^n e^{-z}\, dz$$

$$= \int_0^\infty z^n \{ \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^{n-r} \} e^{-z}\, dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \int_0^\infty z^{2n-r} e^{-z}\, dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} (2n-r)! \qquad (4)$$

$$= n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(2n-r)!}{r!\,(n-r)!}$$

כדי לקבל (4) השתמשנו במשפט הבינום וגם בעובדה כי, עבור כל k טבעי, $\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx = k!$.

---

*) הערת העורך. אנחנו נמנעים בדרך כלל מלפרסם מאמרים הבנויים על חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי, בעיקר מפני שרק חלק מבין הקוראים הגיעו כבר לידיעת המקצועות האלה. בפעם הזאת סטינו ממדיניותנו זו בגלל המקוריות והיופי של המאמר.

עכשיו נשים לב לעובדה ש-

$$\frac{(2n-r)!}{r!\,(n-r)!} = \frac{(2n-r)!}{n!}\binom{n}{r} \qquad (5)$$

עבור כל איבר בסכום ב-(4) קיים $r < n$ ולכן $2n-r > n$. מזה נובע כי $\frac{(2n-r)!}{n!}$ הוא מספר שלם. אבל $\binom{n}{r}$ תמיד מספר שלם ולכן גם הנוסחה ב-(5) מספר שלם, ולכן גם הסכום ב-(4), יוצא איפוא מ-(4) כי p_n הוא מספר שלם המתחלק ב- $n!$.

בדרך דומה

$$q_n = \int_0^\infty x^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{n-r} e^{-x}\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \int_0^\infty x^{2n-r} e^{-x}\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (2n-r)!$$

$$= n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(2n-r)!}{r!\,(n-r)!} \qquad (6)$$

ולכן גם q_n הוא מספר שלם המתחלק ב-$n!$.

עכשיו נבדוק

$$eq_n - p_n = \int_0^\infty x^n (x-1)^n e^{-x+1}\,dx - \int_1^\infty x^n (x-1)^n e^{-x}\,dx$$

$$(7) \quad = \int_0^1 x^n (x-1)^n e^{-x+1}\,dx$$

בתחום $0 < x < 1$ קיים $|x(1-x)| < \frac{1}{4}$ כי הרי $x(1-x)$ מקבל את ערכו הגדול ביותר ב- $x = \frac{1}{2}$.

יוצא מ-(7) כי

$$|eq_n - p_n| < \frac{1}{4^n} \int_0^1 e^{-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4^n} \int_0^1 e^{-y}\,dy \qquad (y = 1-x \text{ ע"י הצבת})$$

$$= \frac{1 - e^{-1}}{4^n}$$

$$< \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \tag{9}$$

אבל ראינו כבר כי q_n מתחלק ב-$n!$ ולכן $|q_n| \geqslant n!$ אם עכשיו נחלק את (9) ב-$|q_n|$ נקבל

$$\left|e - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{|q_n|\ 2^{2n}}$$

$$< \frac{1}{n!\ 2^{2n}} \tag{10}$$

והשבר $\frac{p_n}{q_n}$ מהווה איפוא קירוב ראציונלי ל-e.

אם נכתוב P_n, Q_n עבור המספרים השלמים $\frac{p_n}{n!}$, $\frac{q_n}{n!}$ נוכל להשתמש ב-$\frac{P_n}{Q_n}$ כקירוב ראציונלי נוח יותר. להלן בטבלה תראו את מידת הקירוב. (ראה טבלה בעמוד הבא).

n	P_n	Q_n	$\frac{P_n}{Q_n}$
0	1	1	1·0
1	3	1	3·0
2	19	7	2·7143
3	193	71	2·71831
4	2721	1001	2·71828,17182,82

הקירוב האחרון מדויק עד לספרה העשרונית ה-11.

כמה משפטים בטופולוגיה

ניקח קטע ישר כלשהו ונסמן את קצותיו ב- B,A עכשיו נסמן על הקטע נקודות כלשהן באופן שרירותי ונייחס לכל אחת מהן שם, A או B, באופן שרירותי לגמרי וללא כל קשר בין שמה של נקודה אחת לזה של כל נקודה אחרת. הנקודות האלה תחלקנה את הקטע המקורי AB לאינטרבלים קטנים. נוכיח כי מספר האינטרבלים הקטנים האלה אשר לקצותיהם יש שמות שונים (ז.א. קטעים AB או BA בניגוד ל-AA או BB) הוא תמיד בלתי זוגי.

נסתכל אך ורק באותם אינטרבלים הקטנים אשר לפחות קצה אחד מהם נקרא A ונניח כי ב-α מביניהם גם הקצה השני נקרא A וכי ב- β מביניהם הקצה השני נקרא B בכל אינטרבל מהקבוצה הראשונה יש שתי נקודות A ובכל אחד מהקבוצה השניה יש רק נקודה A אחת. לפי זה היינו אומרים כי מצאנו $2\alpha + \beta$ נקודות A. אבל זה עוד טעון תיקון כי כל נקודה A, פרט לקצה A של הקטע המקורי, נספרה כאן פעמיים, בהיותה שייכת לשני אינטרבלים. פירוש הדבר כי אם היו n נקודות A פנימיות (ז.א. בין הנקודות החדשות) ספרנו כאן $2n + 1$. משתי ההערכות האלה יוצא כי

$$2\alpha + \beta = 2n + 1$$

ז.א. $$\beta = 2\,(n-\alpha) + 1$$

ולכן β הוא בלתי-זוגי. טענתנו איפוא הוכחה.

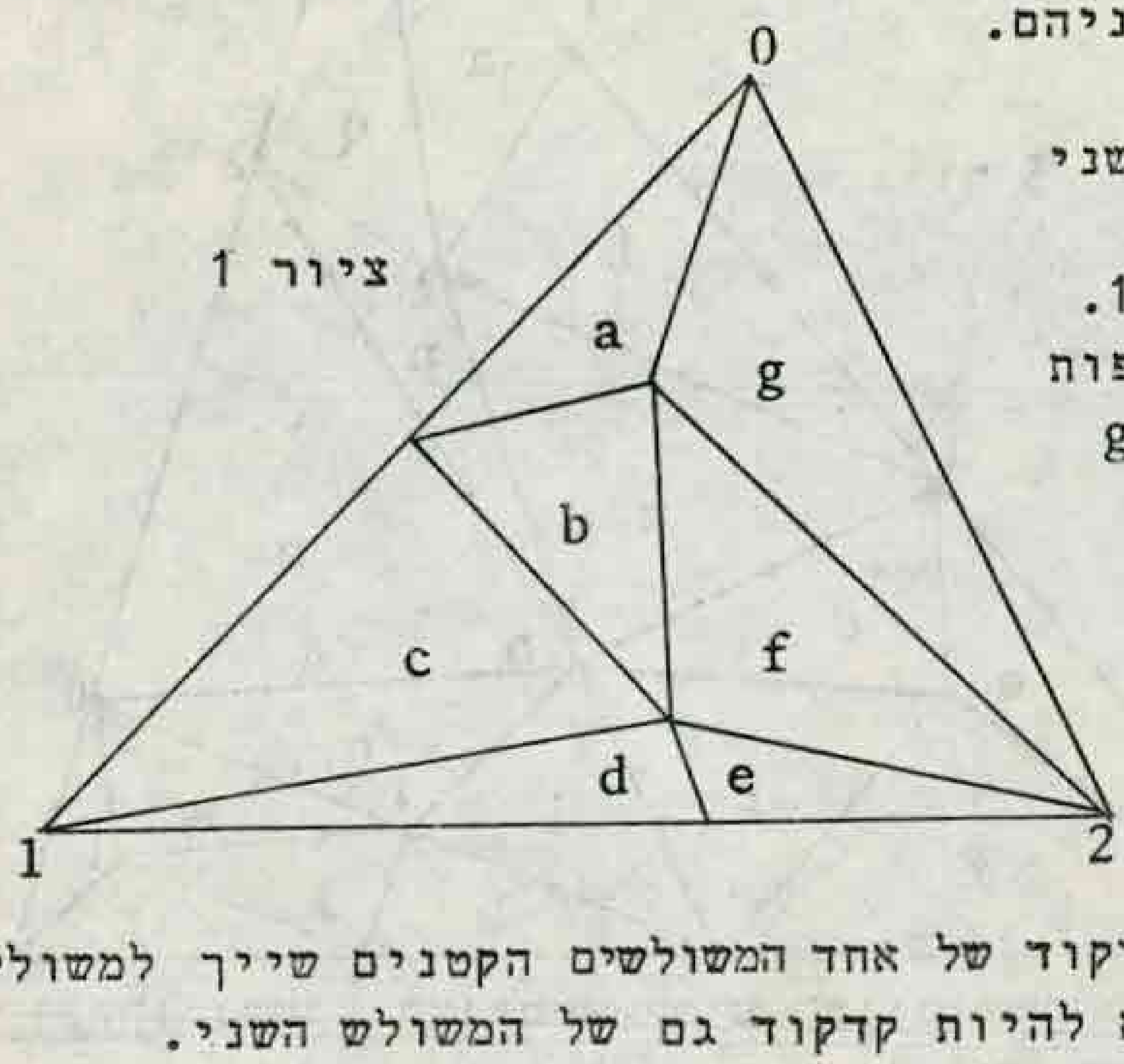
הקורא יכול לטעון בצדק כי המשפט הוא טריביאלי וגם שאפשר היה להוכיחו בדרכים עוד יותר פשוטות. אבל הבאנו אותו כאן משתי סיבות. הסיבה הראשונה היא כי המשפט הטריביאלי הזה משמש דוגמא פשוטה של <u>משפט טופולוגי</u>. בזה אנו מתכוונים לעובדה כי אינו תלוי באורך הקטע או במיקומן של הנקודות הנוספות בו. אם ניקח במקום הקטע חתיכת חוט אלסטי ונסמן בה את הנקודות הנוספות נוכל למתח את החוט (ולאו דוקא במידה שוה), לעקם אותו, וכו' (בתנאי שלא נקרע אותו ולא נקפלנו) והמשפט ימשיך להתקיים.

אבל היתה גם סיבה שניה להבאת המשפט הקל הזה, והיא שנוכל להשתמש בו כדי להוכיח משפט שני, הרבה פחות מובן מאליו, וגם הוא בעל טיב טופולוגי.

ניקח משולש כלשהו ונסמן את קדקדיו ב- 0, 1, 2. נחלק את המשולש הזה למשולשים קטנים יותר כך שיתקיימו התנאים הבאים:-

(i) כל נקודה של המשולש המקורי שייכת לאחת (לפחות) מהמשולשים הקטנים.

(ii) במקרה ששני משולשים מהקטנים מכילים נקודה משותפת, תהיה הנקודה הזאת או קדקוד משתף לשני המשולשים או נמצאת בצלע משתפת לשניהם.

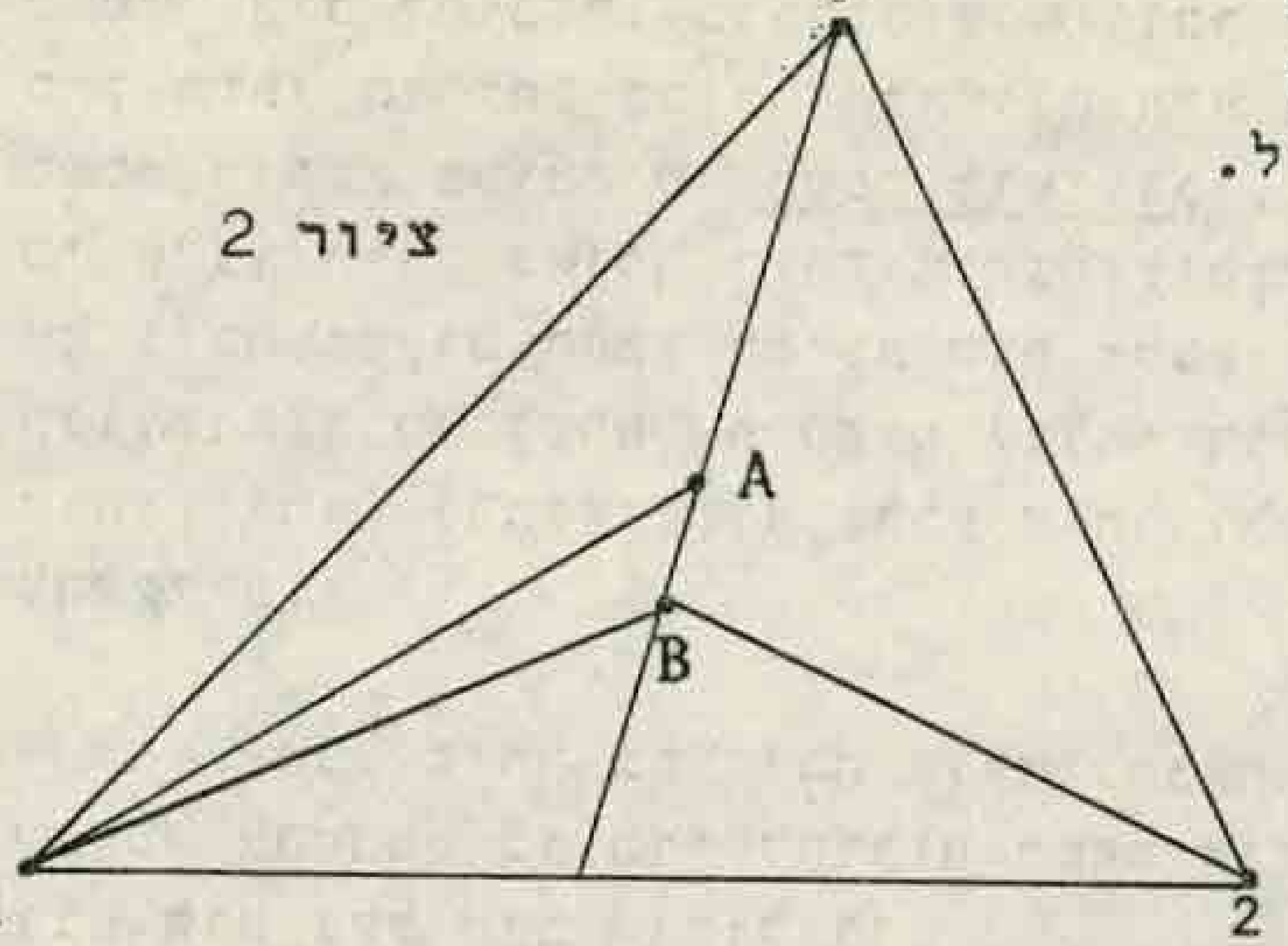


ציור 1

אנו רואים כי שני התנאים האלה מתקיימים בחלוקה המוצגת בציור 1. לדוגמא הנקודות המשותפות למשולשים הקטנים a ו-g מהוות הצלע המשותפת לשניהם, ואילו שני המשולשים g,b מכילים קדקוד משותף אחד. נדרוש גם תנאי שלישי, והוא:

(iii) במקרה ואיזה קדקוד של אחד המשולשים הקטנים שייך למשולש שני מוכרח הוא להיות קדקוד גם של המשולש השני.

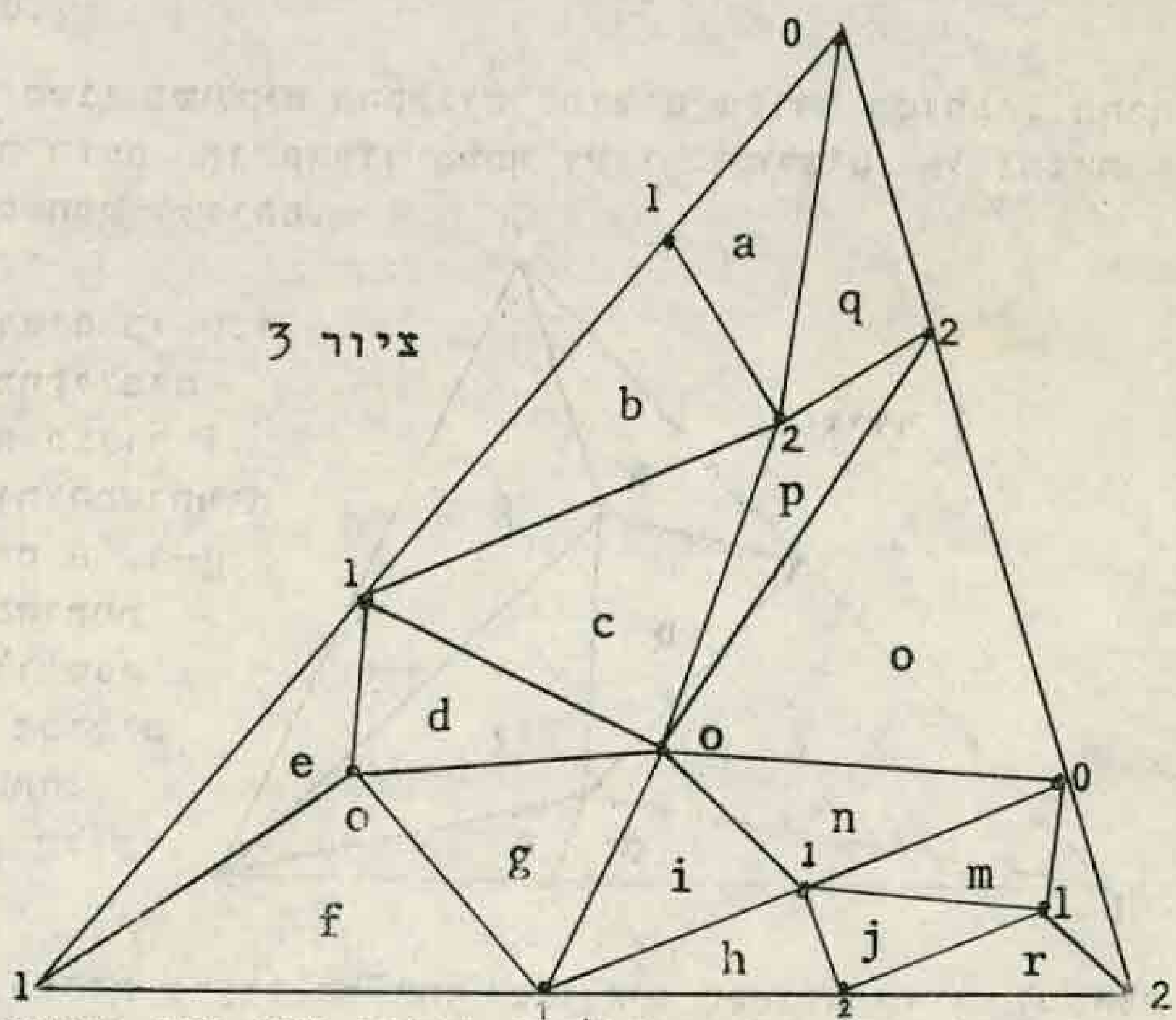
קל לראות כי התנאי הזה מתקיים בציור 1, אבל איננו מתקיים בציור 2, כי הנקודה A שייכת למשולש OB2 בלי להיות קדקוד בו. החלוקה בציור 2 אינה איפוא חלוקה כשרה.



ציור 2

נניח עכשיו כי יש לנו משולש יסודי 012 מחולק בהתאם לשלשת התנאים דלעיל. נייחס לכל אחת מנקודות החלוקה (ז.א. לנקודות החדשות שנתווספו עם החלוקה) אחד הסימנים 0, 1, או 2 באופן לגמרי שרירותי, בתנאי היחידי שנקודה הנמצאת על צלע של המשולש המקורי צריכה להסתמך באחד מסימני הקצות של הצלע הזאת.

(ראה לדוגמה ציור 3) המשפט השני אומר כי בכל חלוקה כזאת יימצא לפחות משולש קטן אחד אשר קדקדיו מסומנים ב- 0, 1, 2; ולמעשה יהיו תמיד מספר בלתי-זוגי של משולשים כאלה. למשל בציור 3 מקיימים משלשים a, c ו- j את תנאי המשפט.



ציור 3

<u>הוכחה:</u> נסתכל באותם משולשים קטנים אשר בהם נמצאת צלע 01. קיומם של משולשים כאלה מובטח ע"י המשפט הראשון, כי קטעים 01 יופיעו בצלע 01 של המשולש המקורי והמשולשים הבנויים על הקטעים האלה יהיו מהסוג הנדון. משולשים כאלה ניתנים לסיווג לפי הסימן של קדקודם השלישי ואמנם נניח כי α ביניהם הם בעלי קדקוד שלישי 0 (ז.א. שקיימים α משלשים 001). ל- β מביניהם יש קדקוד שלישי 1, ול- γ יש קדקוד

שלישי 2. רואים מיד כי בכל אחד מהמשולשים משני הסוגים הראשונים יהיו שתי צלעות 01 ואילו בכל משולש מהסוג השלישי תהיה צלע אחת כזאת, ובכך ספרנו כאן בכיכול $2\alpha + 2\beta + \gamma$ צלעות 01. אבל הספירה הזאת איננה ממשית מאחר שיהיו בין הצלעות 01 האלה כמה השייכות לשני משולשים ולכן נמנו פעמיים בחשבון זה. ואמנם כל צלע 01 הנמצאת על היקף המשולש המקורי תיספר כאן פעם אחת ואילו כל צלע 01 הנמצאת בפנים המשולש המקורי מהווה בהכרח גבול משותף לשני משולשים קטנים ולכן תיספר פעמיים. נניח איפוא כי קיימות m צלעות 01 בהיקף של המשולש המקורי, ו- n צלעות 01 בתוך משולש זה. בהתאם למה שנאמר נוכל לקבע כי

$$2(\alpha+\beta) + \gamma = 2n + m$$

ז.א.

$$\gamma = 2(n-\alpha-\beta) + m$$

אבל קטע 01 הנמצא בצלעות של המשולש המקורי מקומו בהכרח בצלע 01 של משולש זה לפי תנאי הסימון. מאידך נובע מהמשפט הראשון כי מספר הקטעים הקטנים 01 שיימצאו בצלע 01 של המשולש הגדול הוא בלתי-זוגי, ז.א. m הוא בלתי זוגי. ועכשיו רואים מיד מהנוסחה דלעיל עבור γ כי גם γ הוא מספר בלתי זוגי, ובזה הוכח המשפט.

רבוע המעגל

הבעיה היא למצא רבוע אשר שטחו יהיה שווה לזה של מעגל נתון, וזאת תוך שמוש בסרגל ובמחוגה בלבד. הדבר הוכח לפני 84 שנים כבלתי אפשרי אבל נשארה הבעיה למצוא קירובים טובים לשטח הנתון.

בחוברת קודמת (כרך 3, מס' 1) הצגנו פתרון מקורב שהומצא ע"י המתמטיקאי ההודי רמנוג'ן בשנת 1913. כאן ניתן פתרון שני, פחות מדויק מזה של רמנוג'ן, אבל הרבה יותר פשוט.

נתון מעגל, נבנה את הרבוע החסום בו. ניקח חמישית מצלע הרבוע הזה ונוסיף אותה לפי שלש מקוטר המעגל. האורך הכללי מהווה קירוב להיקף המעגל ועל כן ל- π. ומזה אפשר בנקל להסיק את הריבוע המבוקש.

נתבונן לרגע בפתרון זה ונניח כי רדיוס המעגל הוא r. מכאן שצלע הרבוע הוא $\sqrt{2}\cdot r$ ולכן פתרוננו מתבסס על הקירוב $3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = \pi$. לשם השוואה נעיר כי פתרוננו של רמנוג'ן נותן $\pi = \frac{355}{113}$, פרוש הדבר: -

$$\pi = \frac{355}{113} = 3.14159292 \ldots\ldots$$ לפי רמנוג'ן.

$$\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3.14142.$$ לפי המאמר הנוכחי.

$$\pi = 3.14149265 \ldots\ldots$$ והערך המדויק הוא

יוצא מזה כי בעוד השגיאה ב- π לפי פתרון רמנוג'ן היא 2.7×10^{-7} זה בפתרוננו הוא 1.7×10^{-4}, ז.א. פי 630 יותר גדולה. מאידך, הבניה פשוטה מאד והדיוק מספיק למטרות רבות. לדוגמא אם ניקח את רדיוס של כדור הארץ כ- 6000 ק"מ ונשתמש בפתרון דלעיל נגרום לשגיאה של 2 ק"מ בלבד בחישוב אורכו של קו המשווה.

בעיות חדשות

הבעיות המצויינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט׳ ו-י׳ בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת (בצרוף הטופס) עד 31.1.67. המספרים בסוגריים אחרי מספר כל שאלה, הוא מספר הנקודות המוצעות עבור פתרון מלא ומדוייק של השאלה.

ת.286* (3) הוכח כי המספר $2222^{5555} + 5555^{2222}$ מתחלק ב-7.

ת.287 (3) הוכח כי הנוסחה

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

לא תוכל להיות שוה ל- 33 כש- m, n הם מספרים שלמים.

ת.288 (2) הוכח כי אם p ו- $(8p-1)$ הם שניהם ראשוניים אזי לא יהיה $8p+1$ ראשוני.

ת.289* (3) הוכח כי אין רבוע שלם אשר כל ספרותיו בלתי-זוגיות.

ת.290* (4) בטורניר שחמט בבית-ספר מסויים השתתפו תלמידים מכתות י"א ו-י"ב. מספר המשתתפים מכתה י"ב היה גדול פי עשר מהמספר מ-י"א, אבל המספר הכללי של נקודות להן זכו תלמידי י"ב עלה רק פי $4\frac{1}{2}$ על המספר שקבלה כתה י"א. כל משתתף בטורניר שיחק פעם אחת נגד כל משתתף אחר והמנצח בכל משחק קבל נקודה אחת, כשהמפסיד קבל אפס. במקרה של תיקו קבל כל אחד משני המשחקים חצי נקודה. כמה תלמידים מכתה י"א השתתפו בטורניר?

ת.291 (3) לפרק $x^{10} + x^5 + 1$ לגורמים.

ת.292* (2) הוכח (בלי להזדקק לטבלאות של לוגריתמים) כי

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$$

ת.293 (3) נתון ש- b,a הם חיוביים וש- $a+b = 1$. הוכח כי :

$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 > \frac{25}{2}$$

ושוויון אך ורק כש- $a = b = \frac{1}{2}$.

ת.294* (3) עבור איזה ערכים חיוביים של n קיים
$99^n + 100^n > 101^n$?

ת.295* (3) איזה תנאים מוכרחים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ למלא כדי שיתקיים פתרון למערכת המשוואות

$$x_1 + x_3 = \alpha_1\alpha_3 \quad ; \quad x_1 + x_2 = \alpha_1\alpha_2$$
$$x_3 + x_4 = \alpha_3\alpha_4 \quad ; \quad x_1 + x_4 = \alpha_1\alpha_4$$
$$x_2 + x_3 = \alpha_2\alpha_3 \quad ; \quad x_4 + x_2 = \alpha_4\alpha_2$$

במקרה שהתנאים מתקיימים למצוא את הפתרון.

ת.296 (3) קודחים שלשה חורים קטנים בשלחן בקודקדי משולש ABC כלשהו. בעד כל חור מעבירים חוט הקשור למשקולת מתחת לשלחן. את הקצוות העליונים של החוטים מחברים בקשר ואז נותנים לכל המערכת ליפול. נתון כי כל המשקולות שוות, לקבע את מקום מנוחתו של הקשר.

ת.297* (2) במשלש ABC כלשהו A', B', C' הם האמצעים של BC, AB, CA בהתאמה. עכשיו בונים משלש PQR כש- QR, RP, PQ שווים ל- AA', BB', CC' בהתאמה, ו- P' הוא האמצע של QR. הוכח כי $PP' = \frac{3}{4}BC$.

ת.298 (4) חשב את הסכום

$$\frac{\cos x}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{\cos 2x}{(n-2)!(n+2)!} + \dots + \frac{\cos(n-1)x}{!(2n-1)!} + \frac{\cos nx}{(2n)!}$$

ת.299 (4) הוכח כי

$$\cos^4\frac{\pi}{9} + \cos^4\frac{2\pi}{9} + \cos^4\frac{3\pi}{9} + \cos^4\frac{4\pi}{9} = \frac{19}{16}$$

פתרון הבעיות ת. 256 - 270

ת.256 $x^6 - x^5y + 4x^4y^2 + \lambda x^3y^3 + 4x^2y^4 - xy^5 + y^6$

$$= (x^3-\tfrac{1}{2}x^2y-\tfrac{1}{2}xy^2+y^3)^2+ \tfrac{1}{4}[19x^4y^2 + (4\lambda-10)x^3y^3 + 19x^2y^4]$$

$$= (x^3-\tfrac{1}{2}x^2y-\tfrac{1}{2}xy^2+y^3)^2 + \tfrac{19}{4}x^2y^2 \{x^2 + \tfrac{2(2\lambda-5)}{19}xy + y^2\}$$

$$= (x^3-\tfrac{1}{2}x^2y-\tfrac{1}{2}xy^2+y^3)^2 + \tfrac{19}{4}x^2y^2 \{x + \tfrac{2\lambda-5}{19}\}^2 +$$

$$+ \{\tfrac{19}{4} - \tfrac{(2\lambda-5)^2}{76}\} x^2y^4$$

ולכן לא תוכל הנוסחה להיות שלילית אם $\frac{19}{4} - \frac{(2\lambda-5)^2}{76} > 0$
ז.א. אם $(2\lambda-5)^2 < 19^2$ דהיינו אם $-19 < 2\lambda-5 < 19$
פרוש התנאי האחרון הוא ש- $-7 < \lambda < 12$ (למעשה התנאי שהוצג בבעיה היה חמור עוד יותר ולכן הוא יבטיח את חיוביות הנוסחה).

ת.257 בנסוח הבעיה חלה שגיאת דפוס, אבל התקבל הרושם כי הקוראים הבינו הבעיה על נכון.

נכתוב $\tan\theta = t$, $\frac{3-t^2}{1-3t^2} = \cot\theta \tan 3\theta = F$

עכשיו $(F-3)(F-\frac{1}{3}) = [\frac{3-t^2}{1-3t^2} - 3](\frac{3-t^2}{1-3t^2} - \frac{1}{3})$

$$= \frac{8t^2}{1-3t^2} \cdot \frac{8}{3(1-3t^2)} = \frac{64t^2}{3(1-3t^2)^2} > 0$$

ומכאן ש- $(F-3)$ ו- $(F-\frac{1}{3})$ הם בעלי אותו סימן ולכן לא יוכל F להימצא בין $\frac{1}{3}$ ל- 3.

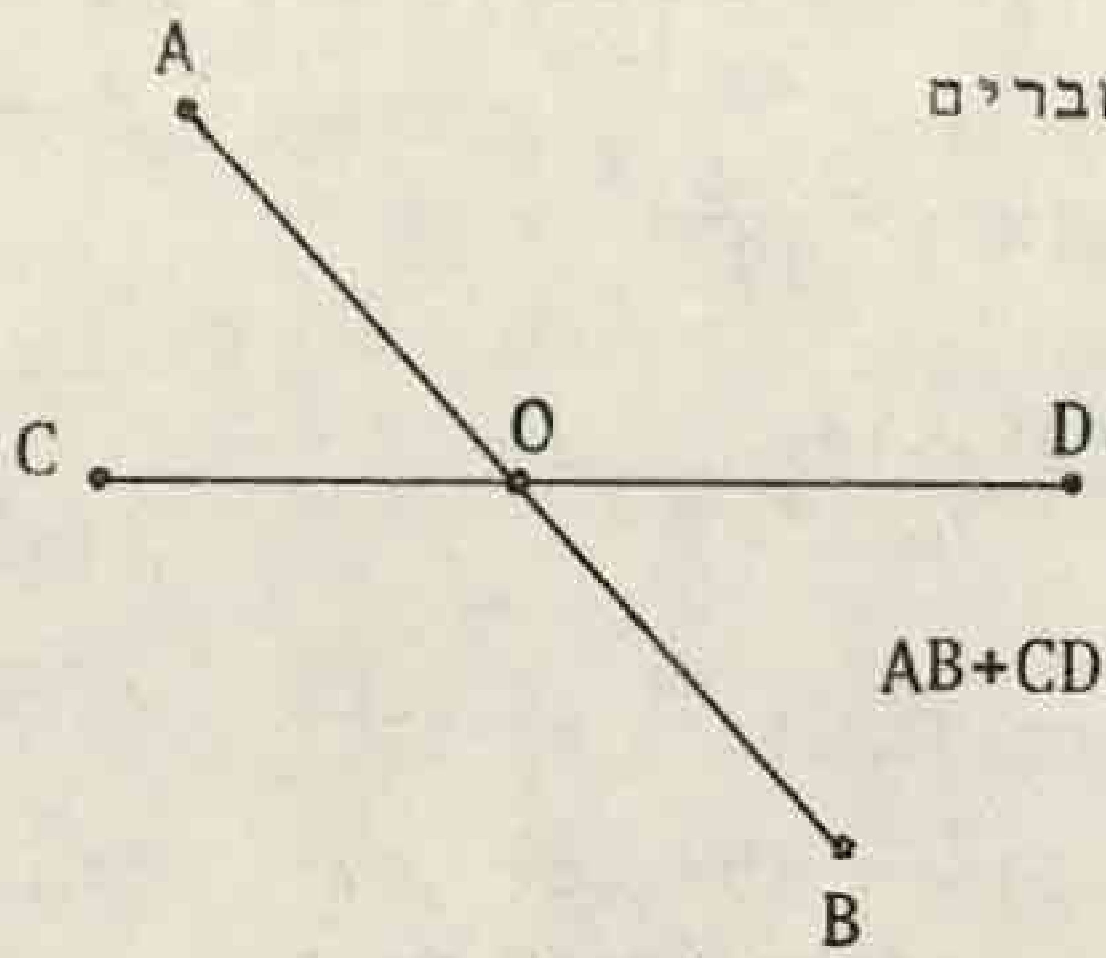
ת.258 נניח $\log_{10}3 = \frac{a}{b}$ ואז יוצא כי $3 = 10^{\frac{a}{b}}$, ז.א. $3^b = 10^a$. אבל זה לא ייתכן כי עבור a שלם אין 10^a מתחלק ל- 3.

<u>ת.259</u> (i) אילו היה קיים מצולע סגור $A_1A_2\ldots\ldots A_nA_1$,
אזי היה

$$A_1A_2 > A_2A_3 > A_3A_4\ldots > A_{n-1}A_n > A_nA_1 > A_1A_2$$

מה שבלתי אפשרי.

(ii) נניח כי הקטע מ- A ל- B חותך את הקטע העובר מ- C ל- D בנקודה O. (ראה ציור).



קיים $AB < AD$
(כי אחרת לא היינו מחברים מ- A ל- B)
וכמו כך $CD < CB$
מכאן ש- $AB + CD < AD + BC$
אבל

$$\begin{aligned} AB+CD &= (AO+OB)+(CO+OD) \\ &= (AO+OD)+(CO+OB) \\ &> AD + BC \end{aligned}$$

והמשפט נובע מיד.

<u>ת.260</u> נגדיר $F_n = U_{n+3} + U_n$ ונוכיח בדרך האינדוקציה כי F_n מתחלק ב-3, כי

$$\begin{aligned} F_{n+1}-nF_n-F_{n-1} &= (U_{n+4} + U_{n+1}) - n(U_{n+3}+U_n)-(U_{n+2}+U_{n-1}) \\ &= [(n+3)U_{n+3}+U_{n+2}+U_{n+1}]-n(U_{n+3}+U_n)-(U_{n+2}+U_{n-1}) \\ &= 3U_{n+3} + U_{n+1}-nU_n-U_{n-1} \\ &= 3U_{n+3} \end{aligned}$$

ולכן $F_{n+1} = nF_n + F_{n-1} +$ (מכפלה של 3)

מזה נובע כי מספיק ש- F_n ו- F_{n-1} יתחלקו ב- 3 כדי להבטיח כי גם ל- F_n תהיה אותה תכונה. אבל $U_0 = U_1 = 1$
ומכאן $U_2 = 1\cdot1+1 = 2$, $U_3 = 2\cdot2+1 = 5$
$U_4 = 3\cdot5+2 = 17$ וכו'. מכאן ש- $F_0 = 1+5 = 6$,
$F_1 = 1+17 = 18$.

ת.261

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} (\sqrt{a} - \sqrt{b})\ (a - b) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2\ (\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 0$$

פרט למקרה $a = b$.

ת.262 תהיה הצגת המספר לפי השיטה של 7, abc. אזי קיים

$$49a + 7b + c = a + 9b + 81c$$

ולכן $b = 24a - 40c = 8(3a-5c)$

אבל $b < 7$ ומכאן ש- $3a = 5c$

מזה נובע ש- a מתחלק ב-5 ומאחר ש- $0 < a < 7$ יש לנו
$a=5$ רואים מיד ש- $c=3$ והמספר הוא 503 לפי השיטה של
7, ו- 305 לפי השיטה של 9. ההצגה העשרונית היא 248.

ת.263 $19 = x+(y+z) \geqslant 2x$, ולכן $9 \geqslant x$. כמו כן $y \leqslant 9$, $z \leqslant 9$
מכאן יש לנו $y+z = 19-x \geqslant 10$, $z+x \geqslant 10$, $x+y \geqslant 10$
מזה נובע ש- $x \geqslant 10-y \geqslant 10-9=1$, וכמו כן $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$
רואים איפוא כי $1 \leqslant x \leqslant 9$, $1 \leqslant y \leqslant 9$, $1 \leqslant z \leqslant 9$;
$y+z \geqslant 10$, $z+x \geqslant 10$, $x+y \geqslant 10$; וכמובן $x+y+z = 19$.
קל לראות כי מערכות (x,y,z) המקיימות את התנאים האלה
יקיימו גם את כל תנאי הבעיה.

עבור כל x מ-1 עד 9 יכול y להיות כל אחד מהמספרים מ-
10-x עד 9 ואז יהיה z קבוע. מספר האפשרויות עבור x
נתון הוא איפוא $9-(10-x) + 1 = x$, ולכן המספר הכללי
של מערכות אלה הוא $\sum_{x=1}^{9} x = 45$.

ת.264 יהיה $G_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. אז

$$G_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9.3^{2n+1} + 2.2^{n+2}$$

$$= 2G_n + 7.3^{2n+1}$$

לכן התחלקותו של G_n ב-7 גוררת גם תכונה דומה עבור G_{n+1}. אבל $G_1 = 3^3+2^3 = 35$ והמשפט מוכח איפוא ע"י אינדוקציה.

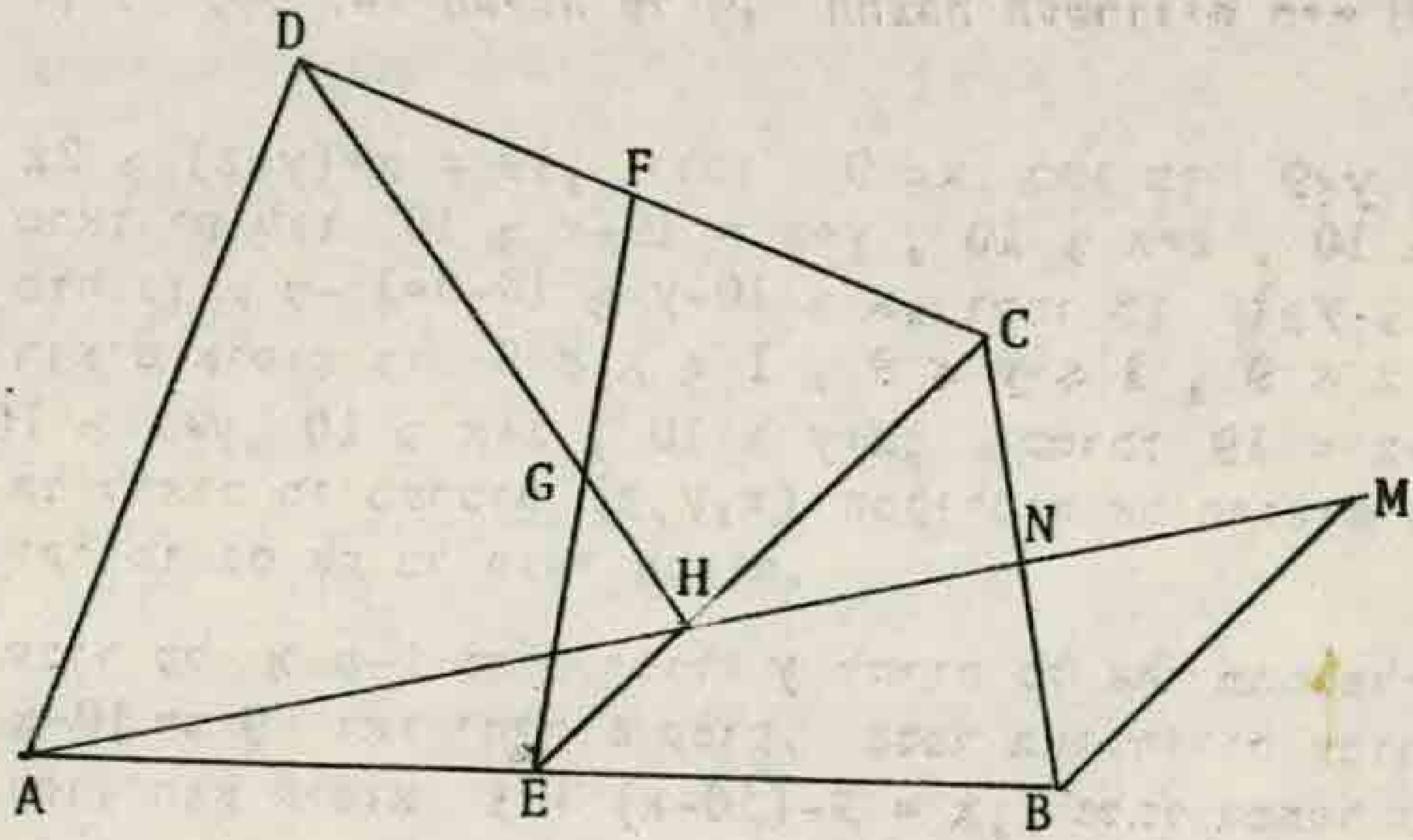
ת.265

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 \dots + 2^{n-1}$$
$$\geq n\ (1\cdot 2\cdot 2^2\cdot \dots \cdot 2^{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

לפי משפט הממוצעים. מכאן נובע כי

$$2^n - 1 \geq n \cdot [2^{1+2\dots+(n-1)}]^{\frac{1}{n}}$$
$$= n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

ת.266 <u>בניה</u>. ניקח BM מקביל ל- EC, שיפגוש את AN ב- M.



<u>הוכחה</u>. נפעיל את משפט מנלוס על המשולש ECF והישר DGH. אנחנו מקבלים

$$\frac{EH}{HC} \cdot \frac{CD}{FD} \cdot \frac{FG}{GE} = 1$$

אבל $FG = GE$ ו- $2\cdot FD = CD$ ולכן $EH = \frac{1}{2}HC$. אבל $EH = \frac{1}{2}BM$ ומכאן ש- $HC = BM$. BMHC הוא איפוא מקבילית ולכן אלכסוניו BC, HM יחצו זה את זה.

ת.267 יהיה n מספר הבנים ונניח כי הם מקבלים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ספרים בהתאמה. יהיה $x_1+x_2\ldots+x_n = a$, המספר הכללי של הספרים. הבן הראשון יקבל איפוא $2(a-x_1) - 3x_1$ ל"י, ז.א. $(2a-5x_1)$ ל"י. נוסחה דומה נכונה לגבי שאר הבנים ולכן

$$407 = (2a-5x_1) + (2_a-5x_2)\ldots + (2a-5x_n)$$

$$= 2na - 5(x_1+x_2\ldots+x_n) = (2n-5)a$$

ז.א.

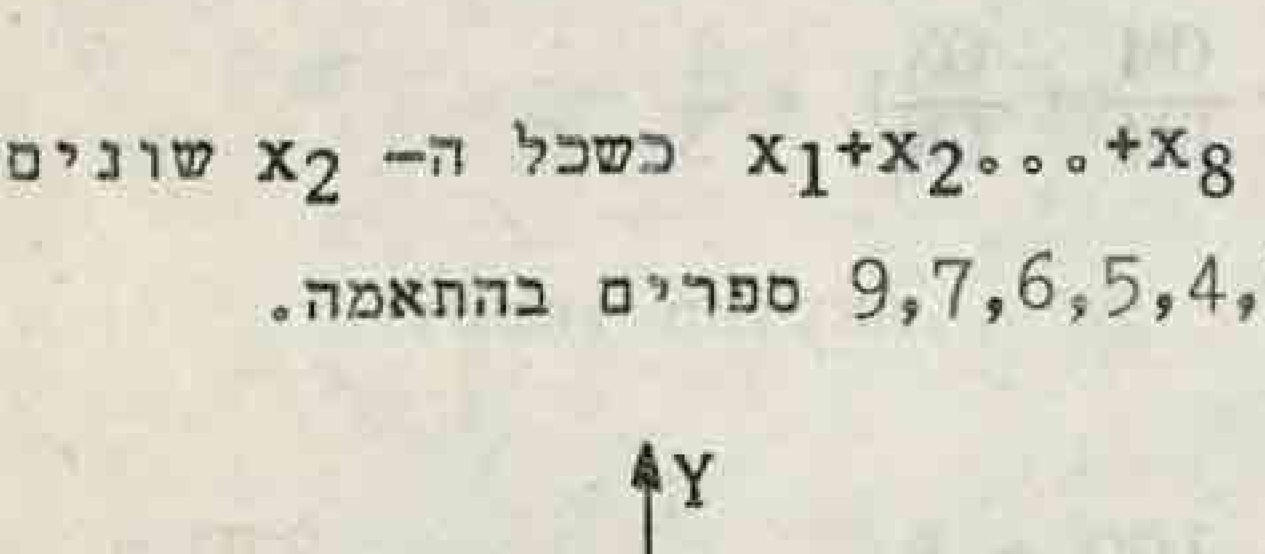
$$(1) \qquad (2n-5)a = 407 = 11.37$$

אבל כל בן מקבל לפחות ספר אחד ואין שנים המקבלים אותו מספר ספרים, ולכן

$$(2) \qquad a \geqslant 1 + 2 \ldots + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$$

האפשרות היחידה עבור מספרים טבעיים a, n לקיים (1)–(2) היא $a = 37$, $n = 8$.

עכשיו דורשים $x_1+x_2\ldots+x_8 = 37$ כשכל ה- x_2 שונים ולכן יקבלו הבנים 9,7,6,5,4,3,2,1 ספרים בהתאמה.



ת.268 ניקח צירים כמו בציור ויהיו הישרים AC, AB $y = \pm nx$. הבסיס BC ייקבע ע"י $y=h$. לפי תנאי הבעיה

$$\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}} = h-y$$

ולכן

$$y^2-m^2x^2 = (1+m^2)(h-y)^2$$

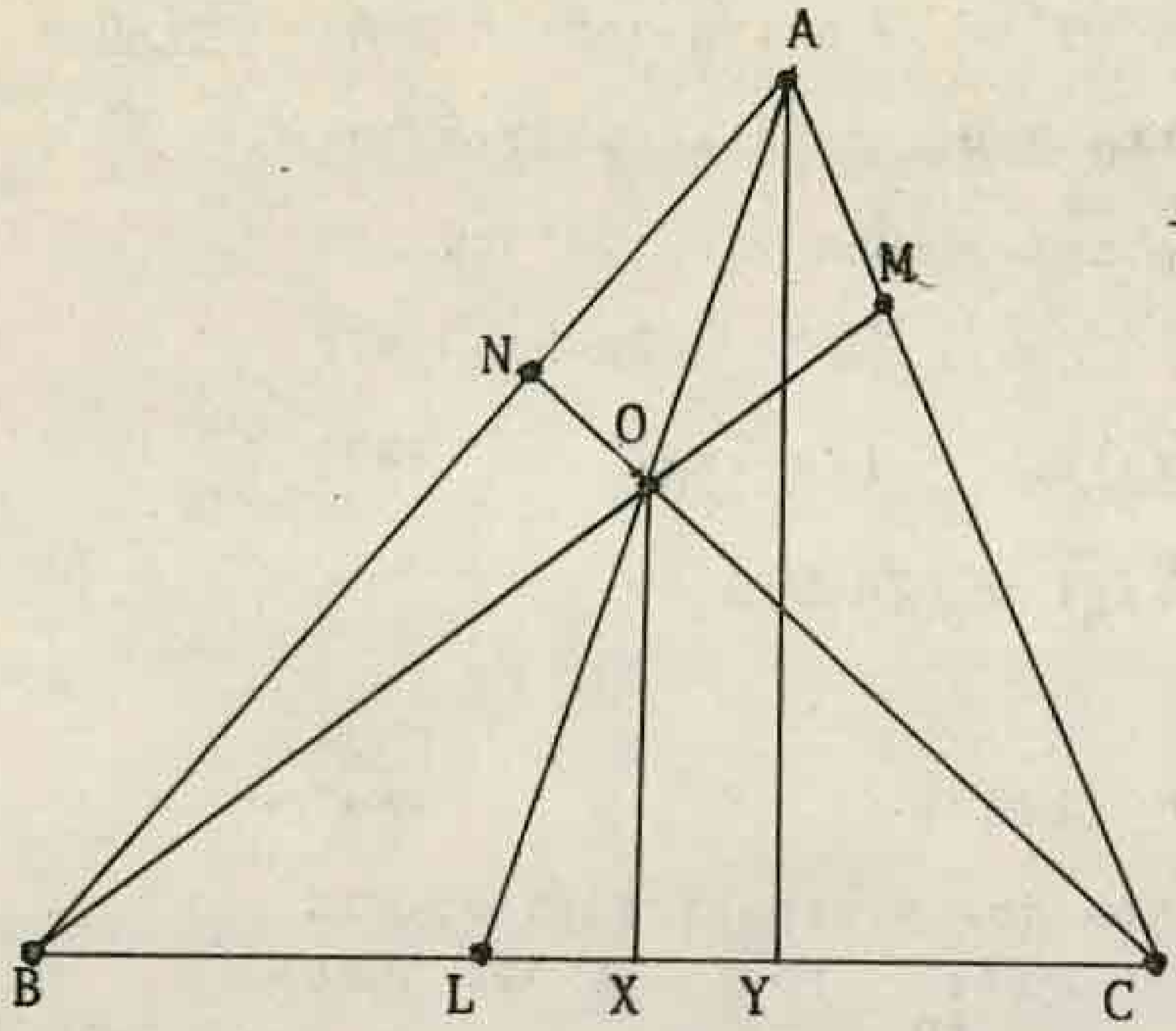
ז.א.

$$m^2(x^2+y^2)-2h(1+m^2)y + (1+m^2)h^2 = 0.$$

את המשוואה האחרונה נוכל לכתוב בצורת

$$x^2 + \left(y - \frac{1+m^2}{m^2}\,h\right)^2 = \frac{1+m^2}{m^4}\,h^2$$

לכן המקום הוא מעגל.



ת.269 יהיו OX, AY ניצבים ל- BC.

$$\frac{\Delta OBC}{\Delta ABC} = \frac{OX}{AY} = \frac{OL}{AL}$$

וכמו כן

$$\frac{\Delta OCA}{\Delta ABC} = \frac{OM}{BM}$$

$$\frac{\Delta OAB}{\Delta ABC} = \frac{ON}{CN}$$

ומזה נובע ש-

$$\frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN} = 1$$

לפי משפט הממוצעים יהיה

$$\left(\frac{OL}{AL}\cdot\frac{OM}{BM}\cdot\frac{ON}{CN}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN}\right) = \frac{1}{3}$$

ומכאן התוצאה.

ת.270

$$(10Q+R)^2 = 1000P + 100Q + 10Q + R$$

ולכן $R(R-1) = R^2-R = 1000P + 110Q - 100Q^2 - 20QR$

$=$ מכפלה של 10

מזה נובע ש- $R = 1$ או $R = 6$.

אם $R = 1$ יהיה $1000P+110Q-100Q^2-20Q = 0$, ולכן $100P+9Q = 10Q^2$ ומזה יוצא ש- $9Q = 10(Q^2-10P) =$ מכפלה של 10. אבל $9Q$ איננו מכפלה של 10 מאחר ש- $Q \neq 0$.

ניקח איפוא $R = 6$ אז יהיה

$$6.5 = 1000P+110Q-100Q^2-120Q$$

ולכן $Q+3 = 100P - 10Q^2$

$=$ מכפלה של 10

מכאן $Q=7$. זה נותן

$$100P = 10Q^2 + Q + 3 = 500$$

קל לאשר כי $(76)^2 = 5776$

רשימת פותרי השאלות מס. 256 - 270
(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

.1	אופשלק אריה	יב'	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים	(29)
.2	איש-שלום אריאל	יב'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(39)
.3	אליאס אורי	יא'	בי"ס ריאלי, חיפה	(40)
.4	אנדלמן דב	יא'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(13)
.5	בן-ישראל יצחק	יא'	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(33)
.6	בן-שחר ברק	יב'	גימנסיה עברית, ירושלים	(9)
.7	בראון עמירם	יב'	בי"ס "אהל שם", רמת-גן	(27)
.8	בר-יהושע דוד	יב'	בי"ס מקצועי ליד הטכניון, חיפה	(25)
.9	גנישר צבי	יא'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(14)
.10	גרצק שבתי	י'	בית-חינוך תיכון, חיפה	(13)
.11	גרש אגון	יב'	תיכון ליד אקדמיה "רובין", ירושלים	(32)
.12	גרינפלד מרדכי	יא'	בי"ס "אהל שם", רמת-גן	(21)
.13	דביר גד	י'	בי"ס ריאלי, חיפה	(13)
.14	דימנט דוד	יב'	בי"ס ריאלי, חיפה	(28)
.15	דפני דוד	יא'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(19)
.16	הוזמן מינה	יא'	גימנסיה עברית, ירושלים	(4)
.17	הולצר אשר	יא'	גימנסיה עברית, ירושלים	(16)
.18	הרט סרג'יו	יא'	תיכון עירוני "כל ישראל חברים", ת"א	(36)
.19	הראל צבי	יא'	בי"ס ריאלי, חיפה	(41)
.20	השביט גדעון	יב'	בי"ס לקציני ים, עכו	(14)
.21	ויטק יהושע	יב'	בי"ס ריאלי, חיפה	(28)
.22	ז'ולטק מנחם	יב'	בי"ס ריאלי, חיפה	(24)
.23	זמל עמוס	יא'	גימנסיה עברית, ירושלים	(22)
.24	חביב חיים	יב'	בי"ס "אהל-שם", רמת-גן	(25)
.25	חבצלת דורון	יב'	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים	(19)
.26	יערי נפתלי	יא'	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(32)
.27	כהן יהושע	יא'	תיכון מאוחד, רחובות	(22)
.28	לווי רוברט	יא'	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(17)
.29	ליסמן יצחק	יא'	תיכון עירוני חדש, חולון	(10)
.30	מגמי שלמה	יא'	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(29)
.31	מס דניאל	יא'	תיכון עירוני ג', חיפה	(21)
.32	נחליאל ישראל	יא'	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(17)
.33	סלע יעקב		צה"ל	(2)
.34	עזוז אמנון	יא'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(24)
.35	עמית מיכה	יב'	תיכון ע"ש לוינהרץ, קרית-מוצקין	(41)
.36	פיקרציק צבי	יא'	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(35)
.37	פסקרו אהרון	יב'	בי"ס ריאלי, חיפה	(30)
.38	פרוז'נסקי אבי	יב'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(26)
.39	פרלשטין ברוך	-	"בליק", רמת-גן	(5)
.40	ציילברגר דורון	י'	תיכון עירוני חדש, חולון	(23)
.41	צלחר אמנון	יא'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(38)
.42	קוריצקי אריה	יא'	בי"ס ריאלי, חיפה	(23)
.43	קליין גבריאל	יא'	בי"ס ע"ש חיים קוגל, חולון	(10)
.44	קרפ מתי	יא'	גימנסיה רחביה, ירושלים	(18)
.45	קרשנר דודי	י'	בי"ס ריאלי, חיפה	(5)
.46	רייך שמעון	יב'	בי"ס ריאלי, חיפה	(41)
.47	שגב עדית	י'	תיכון ע"ש לוינהרץ, קרית מוצקין	(5)
.48	שילה יוסף	יא'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(35)
.49	שמאי שלמה	יב'	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים	(13)
.50	שמר עידו	יב'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(39)
.51	שריר מיכה	יא'	תיכון ע"ש קוגל, חולון	(36)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.