רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 3 | ירושלים, אלול תש״ט, ספטמבר 1949 | חוברת 3

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, כנסת החדשה, ירושלים

המחיר 250 פרוטה

על תנודות של סדרות אין-סופיות

צבי שור

1. תהי $x\equiv\{x_n\}$ סדרת ערכים קבועים, המספר הממשי הבלתי שלילי

$$\Omega(x)\equiv\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\ |x_m-x_n|$$

(בין אם הוא סופי ובין אם לא) נקרא תנודת הסדרה x.

מושג התנודה מהוה הכללה למושג ההתכנסות, כפי שנובע מהעובדה הבאה.

משפט 1.1 (הקריטריון של Cauchy). תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות x הוא $\Omega(x)=0$.

כמו כן מתקים המשפט הבא.

משפט 1.2. תנאי הכרחי ומספיק לחסימותה של x הוא $\Omega(x)<\infty$.

אפשר לאמר כי התנודה משמשת קנה-מדה להתכנסות (או לאי-התכנסות) הסדרה; הסדרה y קרובה להתכנסות מהסדרה x אם $\Omega(y)<\Omega(x)$.

2. תהי $A\equiv(a_{mn})$ מטריצת ערכים קבועים אין-סופית. אם כל הטורים $y_m=\sum_n a_{mn}x_n$ מתכנסים נאמר כי y היא ת A-טרנספורם של x ונסמן $y=A(x)$. הבעיה בה נטפל היא אי-הגדלת התנודה, זאת-אומרת אפיון המטריצות המקימות

$$\Omega(y)\leqslant\Omega(x) \tag{2.01}$$

בהיות $y=A(x)$.

בעיה זו נפתרה כבר על-ידי W. A. Hurwitz [1]. הקריטריון הוא הבא.

משפט 2.1. תנאי הכרחי ומספיק לקיום (2.01), בהיות A רגולרית (מטריצת Töplitz, המעבירה כל x מתכנסת ל y המתכנסת לאותו גבול) [1] עבור כל x חסומה הוא

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{mn}|=1 \tag{2.11}$$

ההגבלה ש x חסומה אינה פוגמת במשפט, מאחר שאם x אינה חסומה ו $y=A(x)$ קימת ממילא יתקים $\Omega(y)\leqslant\Omega(x)$ שהרי $\Omega(x)=\infty$.

לעומת זאת אין כל הכרח להניח ש A רגולרית. מטרתנו היא להכליל את משפט 2.1 ל A כללית.

3. ברור כי תנאי הכרחי לקיום (2.01) הוא ש A תהיה משמרת (conservative - המעבירה כל x מתכנסת ל y מתכנסת). זה נובע ממשפט 1.1 ומהעובדה ש $\Omega(x)$ אינו שלילי.

המשפט הבא מוריד את הבעיה למטריצה כופלת (multiplicative - משמרת המקימת $\lim y_m=\rho\lim x_m$, ρ אינו תלוי ב x).

משפט 3.1 (R. P. Agnew [2]). תנאי הכרחי ומספיק לקיום (2.01) עבור כל x חסומה הוא ש A תהיה סכום של שתי מטריצות: A' משמרת בעלת עמודות קבועות (זאת-אומרת $a'_{mn}=a'_n$) ו A'' כופלת המקימת $\Omega(y'')\leqslant\Omega(x)$, בהיות $y''=A''(x)$.

---

1) Hurwitz מניח כי A משולשת ($a_{mn}=0$ אם $n>m$). אך היות ואנו מצטמצמים לסדרות החסומות אין צרך להניח זאת.

משפט 3.2. תנאי הכרחי ומספיק לכך ש A כופלת תקים את (2.01) עבור כל x חסומה הוא

$$\overline{\lim_m}\sum_n |a_{mn}|\leq 1. \tag{3.21}$$

ה ו כ ח ה .

א. התנאי הכרחי. זאת הוכיח כבר Hurwitz בהוכחתו למשפט 2.1. אך היות וההוכחה מצטמצמת שם ל A משולשת נביאנה כאן מחדש.

נניח כי (3.21) אינו מתקים, זאת-אומרת

$$\overline{\lim_m}\sum_n |a_{mn}|>1. \tag{3.22}$$

נבנה סדרה x כך ש (2.01) לא יתקים כלפיה. מ (3.22) נובע כי קימים $h>1$ וציונים m גדולים כרצוננו כך ש $\sum_n |a_{mn}|>h$. נבחר ציון m_1 כך שיתקים $\sum_n |a_{m_1 n}|>h$. היות והטור האחרון מתכנס קים ציון n_1 כך ש $\sum_{n=0}^{n_1}|a_{m_1 n}|>h-1$. אך היות ו A כופלת יתקים $\lim_m\sum_{n=0}^{n_1}|a_{mn}|=0$. לכן קים ציון $m_2>m_1$ כך ש $\sum_{n=0}^{n_1}|a_{m_2 n}|<\frac{1}{2}$ ובו בזמן (הודות ל (3.22)) $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m_2 n}|>h$. נבחר ציון n_2 כך ש $\sum_{n=0}^{n_2}|a_{m_2 n}|>\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m_2 n}|-\frac{1}{2}>h-\frac{1}{2}$. באפן כללי נבחר $m_p>m_{p-1}$ כך ש

$$\sum_{n=0}^{n_{p-1}}|a_{m_p n}|<\frac{1}{p} \tag{3.23}$$

ובו בזמן

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m_p n}|>h \tag{3.231}$$

אחריו נבחר ציון $n_p>n_{p-1}$ כך ש

$$\sum_{n=0}^{n_p}|a_{m_p n}|>\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m_p n}|-\frac{1}{p}>h-\frac{1}{p} \tag{3.232}$$

מ (3.23) ו (3.231) נקבל (בסמנו $n_{p-1}=r$; $n_p=s$; $n_{p+1}=t$; $m_p=u$; $m_{p+1}=v$)

$$\sum_{n=r+1}^{s}|a_{un}|>h-\frac{2}{p} \tag{3.24}$$

$$\sum_{n=s}^{\infty}|a_{un}|<\frac{1}{p}. \tag{3.241}$$

נגדיר

$$x_n=\begin{cases}\operatorname{sgn} a_{m_1 n} & n\leq n_1\\ (-1)^{p-1}\operatorname{sgn} a_{un} & r<n\leq s\end{cases}\qquad \left(\operatorname{sgn} a=\begin{cases}0 & a=0\\ |a|/a & a\neq 0\end{cases}\right) \tag{3.25}$$

מ (3.25) נובע כי

$$|x_n|\leq 1 \tag{3.251}$$

ולכן

$$\Omega(x)\leq 2 \tag{3.252}$$

לעומת זאת נקבל מ (3.25)

$$y_v-y_u=\sum_n a_{vn}x_n-\sum_n a_{un}x_n=\sum_{n=0}^{s}a_{vn}x_n-\sum_{n=0}^{r}a_{un}x_n$$
$$+(-1)^p\sum_{n=s+1}^{t}|a_{vn}|+(-1)^p\sum_{n=r+1}^{s}|a_{un}|+\sum_{n=t+1}^{\infty}a_{vn}x_n-\sum_{n=s+1}^{\infty}a_{un}x_n$$

ולכן מ (3.251), (3.23), (3.24) ו (3.241) נקבל

$$y_v-y_u\geq -\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}+h-\frac{2}{p+1}+h-\frac{2}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}>2h-\frac{8}{p}$$

$$\therefore \overline{\lim_{m,n}}|y_m-y_n|\geq 2h>2$$

ובהשוותנו ל (3.252) נקבל

$$\Omega(y)>\Omega(x)$$

וזו סתירה ל (2.01).

ב) התנאי מספיק.

אם $\Omega(x)=0$ כלומר, x מתכנסת, גם y תתכנס כי A משמרת. זאת אומרת, יתקים $\Omega(y)=\Omega(x)=0$.

אם $\Omega(x)>0$ נסמן

$$\Omega(x)=2r>0. \tag{3.26}$$

(3.26) אומר כי כמעט כל אברי x נמצאים בתוך מעגל שרדיוסו $r+\varepsilon$, בהיות $\varepsilon>0$.

יהי a מרכז המעגל. נקבל

$$|x_n-a|<r+\varepsilon,\quad n>N(\varepsilon). \tag{3.27}$$

נסתכל בסדרה x' הבאה $x'_n=x_n-a$. מ (3.27) נקבל

$$|x'_n|<r+\varepsilon,\quad n>N(\varepsilon). \tag{3.271}$$

יהיו y ו y' הטרנספורמים של x ו x' בהתאמה. נקבל

$$\Omega(y')=\overline{\lim_{m,k}}|y'_m-y'_k|=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x'_n\right|=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})(x_n-a)\right|=$$
$$=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x_n-\sum_n(a_{mn}-a_{kn})a\right|.$$

הואיל ו A כופלת יתקים

$$\overline{\lim_{m,k}}\sum_n(a_{mn}-a_{kn})=0$$
$$\therefore\left|a\sum_n(a_{mn}-a_{kn})\right|<\delta,\quad m,k>N_1(\delta)$$
$$\therefore\left|\left\{\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x_n-a\sum_n(a_{mn}-a_{kn})\right|-\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x_n\right|\right\}\right|\leq$$
$$\leq\left|a\sum_n(a_{mn}-a_{kn})\right|<\delta,\quad m,k>N_1(\delta)$$
$$\therefore\Omega(y')=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x_n-a\sum_n(a_{mn}-a_{kn})\right|=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x_n\right|=$$
$$=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n a_{mn}x_n-\sum_n a_{kn}x_n\right|=\overline{\lim_{m,k}}|y_m-y_k|=\Omega(y)$$

ובכן

$$\Omega(y)=\Omega(y') \tag{3.28}$$

מצד שני

$$\Omega(y')=\overline{\lim_{m,k}}|y'_m-y'_k|=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_n(a_{mn}-a_{kn})x'_n\right|=$$
$$=\overline{\lim_{m,k}}\left|\sum_{n=0}^{N}(a_{mn}-a_{kn})x'_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{mn}-a_{kn})x'_n\right|$$

הואיל ו A כופלת יתקים

$$\lim_{m,k}\sum_{n=0}^{N}(a_{mn}-a_{kn})x'_n=0$$

לכן

$$\Omega(y')=\overline{\lim_{m,k}}\sum_{n=N+1}^{\infty}|(a_{mn}-a_{kn})x'_n|\leq\overline{\lim_{m,k}}(r+\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{mn}-a_{kn}|\leq$$
$$\leq(r+\varepsilon)\left(\overline{\lim_m}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{mn}|+\overline{\lim_k}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{kn}|\right)$$
$$\leq 2(r+\varepsilon).$$

והודות ל (3.21)

אך היות ו ε קטן כרצוננו, יתקים

$$\Omega(y')\leq 2r=\Omega(x) \tag{3.29}$$

מ (3.28) ו (3.29) נקבל $\Omega(y)\leq\Omega(x)$, מה שהיה להוכיח.

משני המשפטים האחרונים נקבל

משפט 3.3. תנאי הכרחי ומספיק לכך ש A תקים את (2.01) עבור כל x חסומה הוא ש A תהיה סכום של שתי מטריצות: A' משמרת בעלת עמודות קבועות ו "A כופלת המקימת את (3.22).

---

[1] W. A. Hurwitz, The oscillations of sequences, Amer. Journ. of Math. 52 (1930), 611-616.

[2] R. P. Agnew, On oscillations of real sequences and of their transformations by square matrices, Amer. Journ. of Math. 61 (1939), 683-699.

על משואה מודולרית הקשורה בתורת הפרודים

יוסף פוטר

1. בשנת 1938 טפל Watson[1] בבעית תכונות הקונגרואנציה של $p(n)$ בעזרת הפונקציה η של Dedekind, המוגדרת על ידי

$$\eta(\tau)=e^{\pi i\tau/12}\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{2\pi ik\tau})$$

עבור

$$\tau=s+it,\ t>0.$$

פונקציה זו מקימת עבור כל מספר טבעי ("מודול") m משואה אלגברית ("משואה מודולרית") מטוימת מהצורה

$$F(X,Y)=0$$

באשר

$$X=\frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/m)},\quad Y=\frac{\eta(m\tau)}{\eta(\tau)}.$$

עבור המודולים

$$m=5,7,$$

שבהם מטפל Watson, המשואה המודולרית היא ממעלה m ב X, ועובדה זו היא הבסיס לשמוש במשואה זו לגבי תורת הפרודים. את המשואה המודולרית עבור המודול 11 לא הצליח Watson למצא.

בסעיף הבא נוכיח, בהשתמשנו באותה שיטה כמו Watson, כי המשואה המודולרית עבור המודול 11 היא ממעלה $m'>11$ ב X, ולכן אינה טובה לשמוש בתורת הפרודים לפי הדרך של Watson.

2. משפט. לא תתכן משואה מהצורה

$$\sum_{k=0}^{11}X^k f_k(Y)=0 \tag{1}$$

באשר

$$X=\frac{\eta(24\tau)}{\eta(24\tau/11)},\quad Y=\frac{\eta(11.24\tau)}{\eta(24\tau)}$$

והפונקציות f_k הן פולינומים שלא כולם מתאפסים.

הוכחה. אם קיסת המשואה (1), מוכרח להיות $f_{11}\neq 0$, כי בגלל השויון

$$\eta(\tau+24n)=\eta(\tau)$$

(n שלם כלשהו) יש למשואה זו, אם נראה אותה כמשואה ב X, 11 השרשים השונים:

$$X_k=\frac{\eta(24\tau)}{\eta(24(\tau+k)/11)},\quad k=0,1,2,\dots,10$$

נכנים כעת, בעקבות Hecke ו Watson, את האופרטור:

$$U_{11}G(\tau)=\frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10}G\left(\frac{\tau+k}{11}\right)$$

---

1) G. N. Watson, Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen, Journ. f. Math. 179 (1938), 97-128.

אם נסמן

$$z=\exp 2\pi i\tau$$

יהיה

$$U_{11}\sum_n a_n z^n=\sum_n a_{11n} z^n \qquad (2)$$

מן הקונגרואנציה

$$24n-1\equiv 0 \pmod{11}$$

נובע:

$$n=11m+6,\ 24n-1=11(24m+13)$$

לכן יוצא מ (2) כי

$$U_{11}\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^{24n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6) z^{24n+13} \qquad (3)$$

אולם מאידך קיים כידוע:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k}=\frac{e^{\pi i\tau/12}}{\eta(\tau)}$$

ולכן

$$U_{11}\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^{24n-1}=U_{11}\frac{1}{\eta(24\ )}=\frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{\eta(24(\tau+k)/11)}=$$

$$=\frac{1}{11\eta(24\tau)}\sum_{k=0}^{10} X_k=\frac{-1}{11\eta(24\tau)}\ \frac{f_{10}(Y)}{f_{11}(Y)} \qquad (4)$$

מ (3) ו (4) נובע

$$11\eta(24\tau) f_{11}(Y)\sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6) z^{24n+13}=-f_{10}(Y) \qquad (5)$$

יהי

$$f_{11}(Y)=a_u Y^u+\ldots,\ a_u\neq 0$$

$$f_{10}(Y)=b_v Y^v+\ldots,\ b_v\neq 0$$

הפתיחים של η ושל Y לטורים הם:

$$\eta(24\tau)=z(1+\ldots),\ Y=z^{10}(1+\ldots).$$

לכן נותנת השואת החזקות הנמוכות ביותר של z בשני האגפים של (5):

$$1+10u+13=10v$$

מה שלא יתכן.

3. עקר ההוכחה בסעיף הקודם הוא שלא יתכן שויון מהצורה:

$$\eta(24\tau)\sum_{n=0} p(11n+6) z^{24n+13}=R(Y)$$

באשר R היא פונקציה רציונלית. מן הראוי לציין ששויונות אנלוגיים מטפוס זה („שויונות Ramanujan") מתקימים עבור המודולים 5, 7 ו 13. הם נמצאו על ידי Ramanujan (עבור 5 ו 7) ו Zuckerman (עבור 13). מאידך מצא Lehner[2] בטוי עבור הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(11n+6) z^{24n+13}$$

מבלי להשתמש במשואה המודולרית.

---

2) J. Lehner, Ramanujan identities involving the partition function for the moduli 11^α, Amer. Math. Journ. 65(1943), 492-520.

על אי-פרדוקס המישור על-ידי קשת פשוטה

מרה שמרת (שרצקי)

נביא כאן הוכחה חדשה למשפט האומר, כי קשת פשוטה במישור אינה מפרקת את המישור. משפט זה משמש משפט-עזר ברוב ההוכחות של משפט Jordan האומר, כי קו סגור במישור מפרק את המישור בדיוק לשני תחומים. בהוכחתנו נסתמך על מקרה פרטי של משפט Jordan, דהיינו ביחס למצולעים, אשר לגביהם ההוכחה היא אלמנטרית וכמובן איננה נזקקת למשפט שנוכיח כאן.

1. תהי q קשת פשוטה במישור, זאת-אומרת תמונה טופולוגית (חד-חד-ערכית ודו-רציפה) של קטע סגור. נוכל להניח אפוא שהקשת q נתונה על-ידי העתקה טופולוגית $P=f(t)$ באשר $0\leq t\leq 1$.

2. נוכיח ראשית שלכל ε חיובי יש δ חיובי המקיים את התנאי הבא: כל קשת חלקית $q'=\overline{QR}$ של q שהרוחק בין קצותיה Q,R הוא קטן מ-δ:

$$r(Q,R)<\delta \tag{1}$$

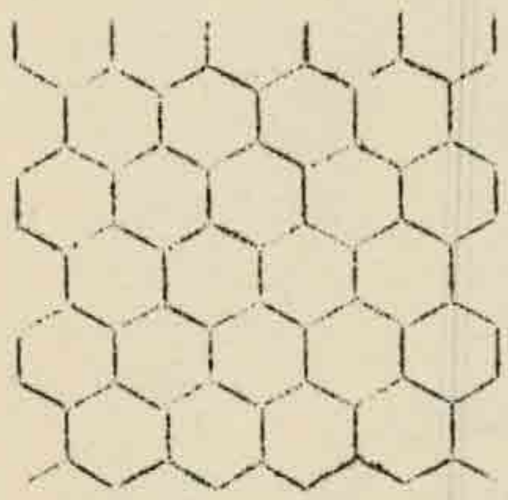
היא בעלת קוטר (מרחק מקסימלי בין נקודותיה) קטן מ- ε.

בגלל הרציפות במדה שוה של ההעתקה f יש ε' חיובי כזה שהתמונה של כל קטע $t_0\leq t\leq t_1$ באשר $t_1-t_0<\varepsilon'$ היא בעלת קוטר קטן מ-ε. מכיון שגם ההעתקה ההפוכה f^{-1} רציפה במדה שוה, אפשר לקבוע δ חיובי כך שכל שתי נקודות של q שהרוחק ביניהן קטן מ-δ הן תמונות (בהעתקה f) של נקודות שהרוחק ביניהן קטן מ-ε'. δ כזה מקיים את הדרישה הנזכרת לעיל. כי, אם קיים (1), אז אורך הקטע $f^{-1}(\overline{QR})$ קטן מ-ε' ולכן הקוטר של $q'=\overline{QR}$ קטן מ-ε.

3. תהי P נקודה כל שהיא שאינה על q. נבחר את ε כך שהעגול הסגור c סביב P ברדיוס 3ε יהיה זר ל-q. דבר זה ודאי אפשרי כי q היא קבוצה סגורה. נקבע δ' חיובי כך שהמספר $3\delta'$ יקיים את התנאי שהוטל על δ בסעיף 2 וכמו כן שיהא[1]

$$\delta'<\mathrm{Min}[r(q,c),\varepsilon] \tag{2}$$

4. נחלק את המישור כולו למשושים משוכללים חופפים (ציור 1) שקוטרם קטן מ-δ'. תהי A קבוצת כל אותם המשושים (הסגורים) שבחלוקה זו, שיש להם לפחות נקודה משותפת אחת עם הקשת q. זאת היא קבוצה סופית וקשירה של משושים. קבוצה כזו הריהי[2] תחום (k+1)-קשיר שספתו מורכבת ממצולע חיצוני b_0 ו-k מצולעים פנימיים $b_1,b_2,\ldots,b_k$ $(0\leq k<\infty)$, באשר כל k+1 המצולעים זרים זה לזה וכולם מורכבים מצלעות-משושים. כל נקודה של



ציור 1.

---

1) בשביל שתי קבוצות סגורות וחסומות A,B אנו מסמנים ב-r(A,B) את הרוחק ביניהן, זאת אומרת הרוחק המינימלי בין נקודה של A לנקודה של B.

2) דבר זה אפשר להוכיח בקלות, בהסתמך על משפט Jordan בשביל מצולעים, למשל על-ידי אינדוקציה לפי מספר המשושים; אודות לעובדה שבכל קדקד נפגשים רק 3 משושים, מובטח שהמצולעים זרים זה לזה.

q היא נקודה פנימית של A; כי, אם היא נמצאת על שפתו של אחד המשושים, הרי גם המשושים האחרים הגובלים בו בנקודה זו שייכים ל-A, בהתאם להגדרתה של קבוצה זו. מכאן שהקשת q זרה לכל מצולעי-השפה.

5. העגול c, המרוחק מ-q לכל הפחות ב-δ', לפי (2), הריהו זר לקבוצה A ולכן כולו נמצא בחוצו של b_0 או בפנימו של אחד המצולעים $b_1, b_2, \ldots, b_k$. במקרה הראשון אפשר לקשר את P עם נקודת האין-סוף[3] על-ידי קו רציף בלי לפגוע ב-q.

6. נניח עתה שקיים המקרה השני, זאת אומרת $k \geq 1$ והנקודה P נמצאת בתוך אחד ה"חורים", נאמר בפנימו של b_1. לשם הקצור נקרא לשתי נקודות במיסור "קרובות" - לגבי חלוקת-המשושים הנתונה - אם הן שייכות לאותו משושה (סגור) של החלוקה. בהתאם לכך נקרא לשתי קבוצות נקודות בשם "קרובות" אם יש משושה המכיל לפחות נקודה אחת מכל אחת מהן.

7. נכוון את הקשת q לפי ערכי t הגדלים:

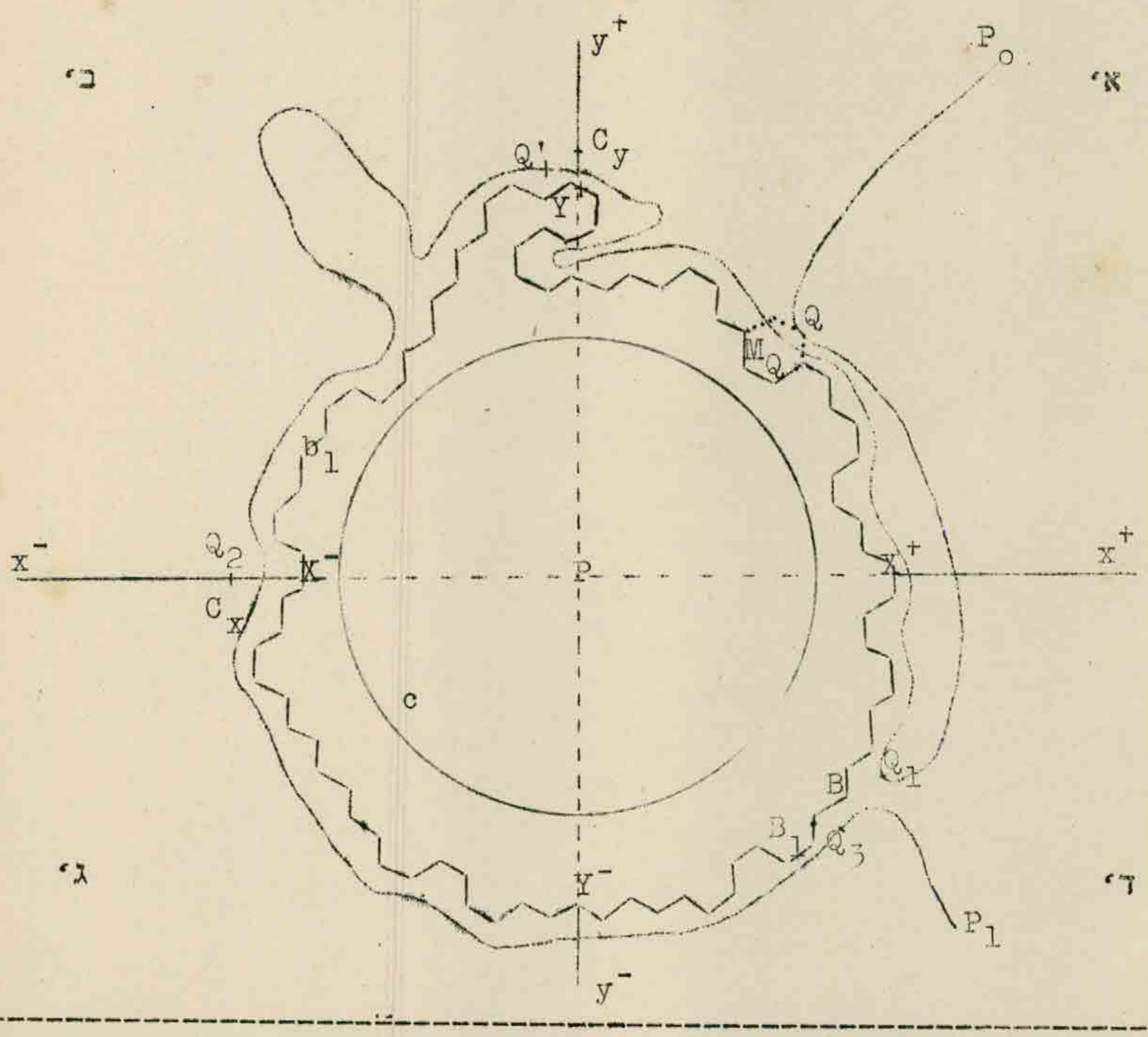
$$q = \vec{q} = \overrightarrow{f(0)\,f(1)} = \overrightarrow{P_0 P_1}$$

ותהי Q הנקודה הראשונה על $\overrightarrow{P_0 P_1}$ שהיא קרובה ל-b_1, זאת אומרת שיש משושה M_Q המקיים

$$Q \in M_Q; \quad M_Q \cdot b_1 \neq 0$$

נקודה כזו ודאי קיימת, כי כל נקודה של b_1 שייכת למשושה של A, המכיל נקודה של q.

8. נסתכל במערכת צירים נצבים עם הראשית P ונסמן ב-x^+ את הקרן על



3) כל הנאמר כאן מתיחס למיסור האויקלידי; באמרנו "נקודת האין-סוף" אנו מתכוונים לנקודה כל שהיא הנמצאת בחוצו של מעגל, המכיל בפנימו את כל הקבוצות הנדונות.

ציר ה-x החיובי שראשיתה היא נקודת הפגישה האחרונה X^+ של ציר זה עם b_1 (ציור 2). x^+ נמצאת אפוא כולה בחוצו של b_1 פרט ל-X^+. בדומה לזה נסמן y^-, y^+, x^- ו-Y^-, Y^+, X^-. ארבע הקרנים y^-, y^+, x^-, x^+ מפרקות[4] את חוצו של b_1 לארבעה תחומים שנקרא להם רביעים א' ב' ג' ד', בהתאם למקובל. (יש להעיר כי כל "רביע" כזה אינו מוכרח להוות חלק של הרביע המתאים במובנו המקובל). נוכל להניח שבחירת מערכת הצירים נעשתה כך שהמשושה M_Q כולו בתוך רביע א' וזר לכל רביע אחר.

9. הרוחק r' בין כל שתים מבין הקרנים y^-, y^+, x^-, x^+, שכולן בחוצו של המעגל c ברדיוס 3ε מקיים:

$$r'>\sqrt{2}\cdot 3\varepsilon>\sqrt{2}\cdot 3\delta'>2\delta' \qquad (3)$$

על כן שתי קרנים כאלו אינן קרובות זו לזו. מצד שני קל לראות כי, אם שתי נקודות קרובות זו לזו ושייכות לרביעים שונים, אז הרביעים הם סמוכים והנקודות קרובות גם לקרן המפרידה ביניהם. הנקודה Q איננה קרובה אפוא לרביע ג'. אבל כל הנקודות של b_1 קרובות ל-q, זאת אומרת גם לקשת $\overrightarrow{QP_1}$. לכן נוכל לקבוע על $\overrightarrow{QP_1}$ את הנקודה הראשונה Q_2 הקרובה לרביע ג' זאת אומרת גם לאחת, ורק לאחת, מהקרנים y^-, x^-, נאמר ל-x^-.

10. נתן ל-b_1 כוון סבוב חיובי[5] ונסמן ב-B את הנקודה הראשונה עליו, החל מ-Y^-, שהיא קרובה לקשת $\overrightarrow{QQ_2}$. נקודה כזו ודאי קיימת ונמצאת ברביע ד' או א', מכיון שהנקודה Q קרובה למשותף של b_1 עם שפת רביע א'. כמו כן אין B מתלכדת עם Y^-, כיון שזו איננה קרובה לכל הנקודות של $\overrightarrow{QQ_2}$ שלפני Q_2, בהשתייכה לרביע ג', וגם איננה קרובה ל-Q_2, מכיון שזו קרובה לקרן x^-.

על הקשת $\overrightarrow{QQ_2}$ יש נקודה Q_1 הקרובה ל-B ולכן גם קרובה לתחום S המורכב מהרביעים א' ו-ד'. קיים

$$r(Q_1,B)\leq\delta' \qquad (4)$$

נבחר על $\overrightarrow{b_1}$ נקודה B_1 בין Y^- ל-B המקיימת

$$r(B,B_1)<\delta' \qquad (5)$$

הנקודה B_1 אינה קרובה לקשת $\overrightarrow{QQ_2}$ ולכן היא קרובה לקשת $\overrightarrow{Q_2P_1}$. נוכל אפוא לבחור על $\overrightarrow{Q_2P_1}$ נקודה Q_3 הקרובה ל-B_1, וקיים

$$r(B_1,Q_3)\leq\delta' \qquad (6)$$

מאי-השויונות (6), (5), (4) נובע

$$r(Q_1,Q_3)<3\delta'$$

ומכאן לפי סעיף 3 - שהקשת $\overline{Q_1Q_3}$ היא בעלת קוטר $<\varepsilon$.

11. הנקודה Q_1 קרובה ל-S ואינה קרובה ל-y^-; לכן או שהיא נמצאת בתוך S או שהיא קרובה ל-y^+. במקרה הראשון מוכרחה הקשת $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ לחתוך את y^+ בעזבה את S על מנת להגיע ל-Q_2. אנו רואים אפוא שבכל מקרה יש על $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, ולכן גם על $\overrightarrow{Q_1Q_3}$, שתי נקודות Q' ו-Q_2 שהן קרובות ל-y^+ ול-x^- בהתאמה, זאת אומרת שיש שתי נקודות C_y ו-C_x השייכות ל-y^+ ול-x^-, והמקיימות

$$r(C_x,Q_2)\leq\delta' \qquad (\quad)$$

$$r(C_y,Q')\leq\delta' \qquad (\quad)$$

מתוך הנאמר לעיל ידוע לנו כי $r(Q_2,Q')<\varepsilon$ ( )

ולכן $r(C_x,C_y)<\varepsilon+\delta'+\delta'<3\varepsilon$, בנגוד לאי-השויון (3) שבסעיף 9. על ידי כך קבלנו סתירה מתוך ההנחה ש-P נמצא בתוך אחד ה"חורים". אפשר אפוא תמיד לקשר את P עם נקודת האין-סוף בלי לפגוע ב-q, ומכיון ש-P היתה נקודה כל שהיא שלא על q, הוכחנו על ידי כך ש-q אינה מפרקת את המישור.

---

4) דבר זה נובע ממשפט Jordan לגבי מצולעים.
5) אם Q_2 קרובה ל-y^- ולא ל-x^-, יהיה הכוון שלילי, ונתחיל ב-X^-.

על למה של קפלנסקי

שמשון עמיצור

1. תהי A אלגברה (לאו דוקא סופית) מעל שדה F המקימת זהות פולינומיאלית $g(x_1 \dots x_n)=0$ כלומר: קיים פולינום $g(x_1 \dots x_n)$ באלגברה החפשית $F[x_1 \dots x_n]$ של n גדלים לא מסוימים $x_1, \dots, x_n$ מעל F, באשר $g(a_1 \dots a_n)=0$ לכל $a_i \in A$. למשל כל האלגבראות הקומוטטיביות מקימות את הזהות $x_1x_2-x_2x_1=0$.

נסמן ב $A \times K$ את מכפלת קרונקר של האלגברה A בשדה K המכיל את F. כל זהות $g(x_1 \dots x_n)=0$ שמקדמיה ב F והמתקימת באלגברה $A \times K$ תתקים גם באלגברה A. אך האם כל זהות $g=0$ המתקימת ב A תתקים גם ב $A \times K$?

קפלנסקי[1] נתן תשובה חיובית לשאלה זו כאשר הפולינום $g(x_1 \dots x_n)$ ליניארי בכל אחד ה x-ים. נכליל את התוצאה של קפלנסקי ונוכיח שאם השדה F מכיל לפחות m+1 אברים אז כל זהות $g=0$ המתקימת ב A ומעלתה לגבי כל אחד ה x-ים היא לכל היותר m - מתקימת גם במכפלה הישרה $A \times K$. ומשפט זה אינו נכון בדרך כלל אם השדה F איננו מכיל מספר מספיק של אברים.

2. בסעיף זה נניח שהשדה F מכיל לפחות m+1 אברים והפולינום $g(x_1 \dots x_n)$ מעלתו לכל היותר m בכל אחד ה x-ים. במקרה זה הוכיח קפלנסקי[2] שאם

$$g(x_1 \dots x_n)=\sum_i g_i(x_1 \dots x_n) \tag{1}$$

כאשר הפולינומים $g_i(x_1 \dots x_n)$ הם הומוגניים בכל אחד המשתנים x_i וכל שני פולינומים g_i ו g_k $(i \neq k)$ טונים לפחות במעלת אחד ה x-ים, ו $g=0$ היא זהות המתקימת ב A, אז תקים A גם את כל הזהויות $g_i=0$.

אם נציג u+v במקום x_i, תהיה מעלת הפולינום[3]

$$q(x_1 \dots x_{i-1}, u, v, x_{i+1} \dots)= \tag{2}$$
$$g(x_1 \dots x_{i-1}, u+v, x_{i+1} \dots)-g(x_1 \dots x_{i-1}, u, x_{i+1} \dots)-g(x_1 \dots x_{i-1}, v, x_{i+1} \dots)$$

לגבי u ו v נמוכה ממעלת $g(x_1 \dots x_n)$ לגבי x_i. הפולינום $g(x_1 \dots x_n)$ יקרא ליניארי למחצה באלגברה A אם A תקים את הזהות $q(x_1 \dots x_{i-1}, u, v, x_{i+1} \dots)=0$ לכל x_i. ברור שכאשר g ליניארי ביחס ל x_i הוא גם ליניארי למחצה באלגברה A, כי אז $q=0$. עתה נוכיח:

משפט-עזר: אם $g=0$ היא זהות המתקימת באלגברה A ו g פולינום ליניארי למחצה באלגברה $A \times K$, מתקימת הזהות $g=0$ גם באלגברה $A \times K$.

כי כל אבר $t \in A \times K$ צורתו $t=\sum a_i k_i$, $a_i \in A$ ו $k_i \in K$. כיון ש g ליניארי למחצה באלגברה $A \times K$, נובע מתוך (2) שדי להוכיח כי הזהות $g(x_1 \dots x_n)=0$ מתקימת כאשר $x_i=a_i t_i$. g מעלתו לכל היותר m בכל אחד ה x-ים ו F מכילה לפחות m+1 אברים, לכן $g=\sum g_i$ ו A מקימת את כל הזהויות $g_i=0$. $g_i(x_1 \dots x_n)$ הוא הומוגני בכל אחד ה x-ים. לכן:

---

1) I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Am. Math. Soc. 54 (1948), Lemma 3, p. 576.

2) העובדה המצוטטת כאן היא נסוח חריף יותר של למה 4 ב 1) והוכחתה מתקבלת מהוכחת למה זו.

3) עין למה 2 ב 1).

$g_i(a_1t_1\dots a_nt_n)=g_i(a_1\dots a_n)t_1^{m_1}t_2^{m_2}\dots t_n^{m_n}=0$ כאשר m_j היא מעלת g_i לגבי x_j. מכאן, הזהות $g_i=0$ תתקים ב $A\times K$ ולכן גם $g=0$ מתקימת באלגברה $A\times K$.

נעבר עתה להוכחת הכללת הלמה של קפלנסקי.

משפט. כל זהות $g=0$ שמעלתה לכל היותר m בכל אחד ה x-ים המתקימת באלגברה A מתקימת גם באלגברה $A\times K$ (אם השדה F מכיל לפחות $m+1$ אברים).

לכל פולינום $h(x_1\dots x_n)$ נתאים פולינום במשתנה t עם מקדמים שלמים אי שליליים באפן הבא: $p(h)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}t^{\lambda}\mu_{\lambda}$, באשר μ_{λ} הוא מספר ה x-ים שמעלתם בפולינום $h(x_1\dots x_n)$ היא λ. ברור ש $0\le\mu_{\lambda}\le n$, $p(h)$ הוא פולינום כי החל מ λ מסוים $\mu_{\lambda}=0$. ל $p(h)$ נקרא בשם המעלה הפולינומיאלית של h. קבוצת כל הפולינומים ב t עם מקדמים שלמים אי שליליים מסודרת היטב לפי ההגדרה $p_1(t)>p_2(t)$ אם המקדם העליון של הפולינום $p_1(t)-p_2(t)$ הוא מספר חיובי.

עתה נוכיח את המשפט בדרך אינדוקציה לגבי המעלה הפולינומיאלית של הפולינומים $g(x_1\dots x_n)$ באשר $g=0$ היא זהות המתקימת ב A. כאשר $g=0$ היא ליניארית בכל אחד ה x-ים יהיה $p(t)=tn$, אזי g, כפי שראינו, ליניארית למחצה באלגברה $A\times K$ ולכן לפי משפט-העזר $g=0$ מתקימת ב $A\times K$, ובמקרה זה (הוא המקרה שבו דן קפלנסקי) המשפט מוכח. תהי $g=0$ זהות שמעלתה $p(g)$, ויהי המשפט נכון לגבי כל הזהויות h שלגביהן $p(g)>p(h)$. תהי מעלת הפולינום $p(g)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}t^{\lambda}\mu_{\lambda}$, הפולינום $q(\dots uv\dots)$ המגדר ב (2) מעלתו הפולינומיאלית היא $p(q)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}t^{\lambda}\mu_{\lambda}-t^k+t^{k-1}$.2 באשר $k>1$ מעלת x_i $(q\equiv 0\wedge k=1)$ כי ל x p- אחד פחות שמעלתו k ושני משתנים נוספים u,v שמעלתם $k-1$ לכן בכל אפן $p(g)>p(q)$. כיון ש $g=0$ מתקימת ב A ברור שגם $q=0$ מתקימת ב A ולכן לפי הנחת האינדוקציה $q=0$ מתקימת גם באלגברה $A\times K$. לכן נקבל מ (2) שהפולינום g הוא ליניארי למחצה באלגברה $A\times K$ ולכן מתקימת לפי משפט-העזר $g=0$ גם באלגברה $A\times K$. ובזה הוכח המשפט.

3. המשפט שהוכח איננו נכון בדרך כלל כאשר השדה F מכיל פחות מ $m+1$ אברים. כדוגמה נביא את המקרה הבא: A חוג כל המטריצות מסדר 2 מעל השדה הראשוני בעל הכרכטריסטיקה 2. F במקרה זה מכיל רק את האברים 0,1. האלגברה $A=F_2$ מקימת את הזהות

$$g(x_1x_2)=x_1x_2^3+x_2^3x_1+x_2x_1x_2^2+x_2^2x_1x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_1=0$$

כי נוכל לכתב את g בצורה הבאה:

$$g(x_1x_2)=(x_1x_2+x_2x_1+x_1)x_2^2+x_2^2(x_1x_2+x_2x_1+x_1)$$

נציב $x_1=x$, $x_2=y$. כל אבר ב A הוא ממעלה 2 מעל F לכן $y^2=ky+h$. כיון שהשדה F הוא בעל כרכטריסטיקה 2, יהיה:

$$g(xy)=k(xy+yx+x)y+ky(xy+yx+x)=k(xy^2+xy)+k(y^2x+yx)=$$
$$k(xy^2+y^2x)+k(xy+yx)=k^2(xy+yx)+k(xy+yx)=(k^2+k)(xy+yx)=0$$

כי $k^2+k=0$ מתקים על-ידי כל אברי השדה F. (**לוגמה זו נתנה ע"י דייר לויצקי**).

הזהות הנ"ל איננה מתקימת בשום אלגברה $A\times K$. כי כל שדה K המכיל את F מכיל לפחות $2^2=4$ אברים ולכן כפי שראינו כל חלק הומוגני של g צריך להתקים ב $A\times K$ אם $g=0$ מתקים ב A אבל החלק ההומוגני של g שהוא ממעלה 2 ב x_2: $x_1x_2^2+x_2^2x_1=0$ איננו מתקים ב A ולכן גם לא ב $A\times K$, כי בהצגה $x_1=c_{12}$, $x_2=c_{12}$ נקבל $c_{12}c_{22}^2+c_{22}^2c_{12}=c_{12}\neq 0$.

הפולינום הנ"ל g מעלתו 3 לגבי x_2 אך אפשר להוכיח שגם הפולינום q המתקבל מ g על-ידי הטרנספורמציה (2) שמעלתו לכל היותר 2 לגבי כל אחד המשתנים מתקים ב A אך איננו מתקים בכל אלגברה $A\times K$, באשר $F\subset K$.

תוספת עמוד (477) ללוח הפרוקים של ד. נ. להמר

דב ירדן ואלכסנדר כץ

הלוח המודרני הגדול ביותר של פרוקים של מספרים טבעיים לגורמים ראשוניים הוא הלוח של

D. N. Lehmer, Factor table for the first ten millions, 1909.

לוח זה מכיל את הגורם הקטן ביותר של כל מספר שאינו מתחלק ב 2, 3, 5 או 7 בין 0 ו 10,017,000. גוף הלוח מכיל 477 עמודים (עמוד ראשון מסומן ב 0). כל עמוד מקיף 21,000 מספרים.

בכתב-יד קימים עוד למעלה מעשרה מיליון הלוחות הבאים:

1) J. P. Kulik, עד מאה מיליון, בחסרון החלק מ 12,642,600 עד 22,852,800 שאבד. הלוח אינו מדויק כל צרכו ואינו נוח לשמוש, בהיותו כתוב בסמלי-אותיות במקום מספרים. פרטים נוספים ב

L. E. Dickson, History of the theory of numbers I, 351-2.

2) V. Golubev, המיליון ה 11 וה 12, במכון Steklov במוסקבה. אינו נתן לשמוש לבני חוץ-לארץ.

3) R. J. Porter, המיליון ה 11, ברשות המחבר. פרטים ב

Mathematical Tables and Other Aids to Computation I, 451.

4) L. Poletti, המיליון ה 11 (טרם נגמר).

5) W. P. Durfee, המיליון ה 16. פרטים ב

Scripta Mathematica 4 (1936), 101; MTAC I, 399.

הלוח הנתן בזה ממשיך את הלוח של ד. נ. להמר כדי עמוד אחד (מספר 477, בהתאם לסמון העמודים בלוח של להמר). הוא מקיף אפוא 21,000 מספרים נוספים מ 10,017,000 עד 10,038,000. במטבצת בעלת הקואורדינטות (x,y) רשום הגורם הקטן ביותר של המספר x+210(y+47700), באשר ערך y נקרא בעמודה השניה מצד שמאל שכתובים בה המספרים מ 00 עד 99, וערך x נקרא בשורה העליונה (בתוך המסגרת) שכתובים בה 48 המספרים 1, 11, 13, 17,...,209 הקטנים מ 2.3.5.7=210 וזרים ל 210. מקום ריק מצין מספר ראשוני. הלוח חושב על ידינו בשיטת "כברת ארטוסטנס".

תודתנו נתונה:

למר Luigi Poletti ב Pontremoli, איטליה, שהשוה את ה"עמוד" עם הלוח בכתב-יד שברשותו ומצאו נכון, פרט ל 4 אי-דיוקים, שתוקנו;

לסר משה כהן על עזרתו האדיבה בשרטוט לוח זה.

ADDITIONAL

PAGE 477 to D.N. LEHMER'S FACTOR TABLE

DOV JARDEN AND ALEXANDER KATZ

10 017 000–10 038 000

תוספת

עמוד 477 ללוח הפרוקים של ד.נ. להמר

דב ירדן ואלכסנדר כץ

	477	1	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	121	127	131	137	139	143	149	151	157	163	167	169	173	179	181	187	191	193	197	199	209
																													23	1217	17	13	11	1321		29	47	13	23		2029		977	83			59	17	29
100 17	00	1033				107		11	1021		2203	761	19	53	13	31		157	11	41	181	257	17		67							349	379	83	11		1869		179	127	29	19	1697	13	1831	11	41	43	149
	01	547	3163		11		17		13	31	47	197			37	11	619	101	227		11		773		19			13	43		11		11	443	113	677	41	137	53		751	1223	1069	11	17	2351		19	31	509
	02			31	17	47	23	13	827	1601	71		937	857		61		11	797	29	19		317		1327	13			47	19		59						13	151		11			17	41	11		719	167	13
	03	13	17		197		41		107	11		23	103	13	11		541	21		13	37	23		19	11	227	2141	17	89			13		19	67			31	11	47	53	37	157	11	13					17
	04		83		23	199	73	97	419			19	11		41	53	67	79	17	1487		31	2339	1721	13	17	23	11				877							61	11	17		13	37	347	113	311				59
18	05	193		11		79	13	29	109	23	61	179	43	1453		19	17		2473	11	23		139	11		37	2729	167	71	13			19	641									2017	43	73	97	19	17	11	163
	06	11	23			11			101		19	107	13	71		17	11	307	13	19	1613	11		1009	23	269	29	1117	1913	631	41	151	137	1553	23	13	1153	17	29											11
	07		11	263	31	13	101	839	23	2437			107	191	19	181	53	13	29	31		17	13			67	61	643	11	71	29	2707		11	13		17		41	23	19	127			11	17	821				
	08	19		113	13	43	139	419	67	29	223	11		367	71			2309		557	17		23	1373		727	11		13	1563	11	313	89	23	197	17			83	47	13	31				19			11	13	953
	09	29	1097	127		19	103	113	11	683	13	17		11	29	673	13	23	1801			67	11			89	1049	1699	131	79				97	331			41	11			3037	17		1039				13	397	19
19	10		523	13		11	29	41	47	17	11			373	107		179	17	53	83	1051	61		2251	59	11	193	19	137	97	31	23	17	13			503		37	13	11	53			191		31		29		
	11	61	13	73	19	23	79	11	17	13	521	89				113	733	67	11	109	701	13		127	29	31	317			225	19	163	11			2027	23	43	13	19		37	53				13	47	2503	
	12	569	89		11	41				59	1217	37			17	11	29	71	19		11		181	41	379		907	13	173	11	23		13	383	11		61	271	2087		1559	233	331	19	13	11			583	
	13	43		23		17	619		29			163		17	13		131	11	149	53		29	1019		167	491		83	17	919	541	11	643	557	1657	23	89	13	19	373	43		11	67	61			23			
	14			17		1931			13	11	193		17	29	11	991	37	19		23	13	59	31		11		13	73	3019		47	1637		2621	17	409					11	41	2549		13	11			349	103
20	15		31	19	29		127	13	283		17		11	23	151	157	443	421	31	37	53	19	43	389		13	17	11		19	79	61	1031	17		71	11		137	67		11		1667	23		31		41
	16	13	139	11	37	1009	55		19					13	43	89	127		23	11	71		29	11	17	19		601	1549		13	17		1777		151	13	41	11	1123	31	241	47		53	239	2161		13	
	17	11	19	131	67	401	11	17	211	1117	353		23	2399		29	11			139	61	11	17	599	13	43	173	509		109	17	1879	23		31	67	71	19	59				13	461		43	103	11	97
	18	31	11			197	13	19	229		37	47			63	743	19	41			29	53	2789	13	2557			23	11	13	631	47	433	11	73		1237	541			113	13	19	11		17			29	11	
	19	619			17	2003	347	61	43		23	11	13	37			269		13					31		41	11	443		37	11			89	137	13		29		479		23	83	17	431	2971		11	19	47	
21	20	257	17		13	419	79	11						11		23			2957	17			11		19	23	271	17	101	29		83	31	41	13	109		11	73	131	1303	19	17	47	67		223	23	571	
	21		681		13	11	2539		199	2203	11	13		31		397	1367	47	17	89	19		41		73	11		101	13	23				457	29	11		691	1429	71	11	41	103				1301	19	13	17
	22	571	113			673	11	2797	2273	13		89	179	461	59	13	971	11			79	37	53	17		107	163	29				61	1151	11	47		2659		37	109	17	67	59	491	389	2257	23	13			
	23		1187	13	11	29		23	79	21	1459	19			149	11	31	1753	2689		11	1297	67	37		613	1733	97	23	11	137	43		13	11	197	19	17	23	13	103				31	11	17	233	139	
22	24		13	43	1451		19			13	29	31		2131		19		11				13	97	53		71		37		83	167	11	251		1423		17	359	13	103	887		11	23	17	13	199	61	523	
	25				31	23				11	19	593	193		11	13	139		151	19	17			1031	11			13	29	769	163		13	31		17	2267	827	131	11	1873	29	71		11	19		37	53	
	26	1609		2017	521		43		41			17	11	181	13		2411		101	1747		23	19	463		2711	43	11			941	13		29	47			11	13		307	19	11	23		79			109		
	27	19	73	11	23				13	17	211	127	337	157	353	67	41	17	59	11	13			11		29	13	137		47		2311	17		37		31	3088	11	167	17	61		13	19	1523				2551
	28	11	47	29	653	19	11	13	17	23	359		151	883		131	11	29			23	11		929	41	13	53				107	1091	1213		1153		157	977	17			397		29					11	19
23	29	13	11		97			73	2837	19	761	67	31	13	17	139	1021		83	13	47				23		31	19	11	17	13	1087	41	11	23	19	13		43		37	89		11	503	71		1097	11	
	30	97	41	109	19	17	31	83	23	37	101	11		17	163	47			2221	149	1307			67	13		11	53	17	233	11	757	107			59	1531	179	619	19	29	593	13	463	773	383	11		31	
	31			17			13		11	3163	281		17	11	59	31	283	61	19	29		79	11	13		2729	3011			13		29			23	17	83		11	149			13		19		61	37	71	263	
	32	41	53	911	47	11		109		31	11	29	13	19		37		23	13	277	41	2377		29	293	11	17	151	167		71	103	43	17	797	11		23	19			11	239				241			23	
	33	17		31	61	13		11	181	41	647	1901	211	127	131		2237	13	11		1069	47	13	43	17	2347	19			1777		17	11	79	13	107		227		1567				29	43				31	173
24	34	73	37	19	11	23		17	379	2081	409	13	251		587	11	47	1367	41		11	19	17			1453		31	13	11	17	59			41			23				13	809	2357	349		11	89	15	
	35	101			53	1597	17		19		13			109	293	499	13	11		1217	73	31	37	313		19	29	311	307		23	11	47				31		59	29	223			11	179	41	17	13		
	36	71	19	13	17	53	47			11		727	67	193	11	109		59	29				83		11	2137	37		103	31	29	631	883	13	283	23		19		11		151	67	17	11		23		
	37	47	13		41	1459		19	61	13	31	1973	11	83		173	19	2767	167	17	97	13	59	73	31	241	2161	11	37	53	2333	277		19	389	157	11	229	13				11	17	101		13				
	38	29	479	11	31	127	53	67		73	79	199	19	23	29	13	97		17	11	43	1321	313	11		17	467	13				2089					3037	67	11	43	1063	101		61		13		187	19	17
25	39	11			1861	437	11		59	89	821		281	211	13		11	37	23		421	11			17	19	263	103		1039		43	13	29	239	59	563		13		17		19	919				29	11	191	
	40	23	11	71	1259			47	13	1489	397	41	23	769		17		863	113	2083	13	1051		2731	29	127	13	1439	11	197			23	11	157		37	17				43	293	11		787	17		11	
	41	179				97	617	13	183			11	2999				23	673	1669	41	59	17	311	19		13	11	23					11	73	19		317	89	17	509	61	37			383	137	17	31	11	1783	83	
	42	13			43	71		229	11	223	23	19	373	11		641			73	13	17	29	11	197	43	31	59		1019	67	13	53	631	547	79	17	13	11	2833	31	47	23	37	107		739	41		13	
26	43			857	59	11	19		149		11	17		29	1093	19					31		79		13	11		61	83	193		19	53			167	11	271			29	11	17	13	199	107	37	1683	23		
	44		419		29	353	13	11		17	19	59		163	31		229	17	11	19	241	103		13		131	67	43	31	13	37	113	11			2361		701	71		17	13	349	41	29	19	269	43		
	45			47	11	1109	89		17	53	157		13	2341	19	11	2897	2153	13	577	11		19	23		47	647	1483		11			1187	37	11	13			373	17	137	19		61	59		11			83	
	46	19	31	41	1549	13		23	71	43	1433	1709	733		17	29		11	31			223	13	337		239	73		23	17	509	11				13	1499	227	967	23	89	71	47	11	167	19	151	31		43	
	47	131			13	17	137			11	53	13	79	17	11	211	1997	2267			29	2371	2851		11	101		331	13	61	41	89		199	67		47	607	37	11	13	2543				1601		13	19	
27	48			17	2143		23	59	37	19	13	53	11	131			13		67		641			97	2819	2957		11	1627	73	461		181	229	17	19	11	29	41		149	11	2843	1123	163	1171	13	1063	2293	
	49	31	29	11	19	47	83		139		17	23			2411				61	11	1103	23	709	11									2311	13		53			409	11	13	59		23	31	37		569		73
	50	11	13	269	23		11	1427		13	89	71	53				11		19		101	11	163	31	17	61	23		233			17	1693	43	19		41	31	13		109		229	19	191	13	761	11	
	51	1321	11	239		43	113	17		23			857	19	241	13	37		947		23	421	17	83	271	59		13	11		17	433	13	11	599	1451		47	19		257		109	11	13	41		17	11	
	52		23	107	73	29	17		457	67	379	11	47	31	13	2551	43	19		37	659			1613	23		11			127	11	13	1759	2791	23		53	13	193	383			617		71	17	11		773	
28	53			19	17	41		31	11		29	733		11	101	443	211	239	251		13	19	11	41		941	13	2063	241	19		1721				1277	29	11		23	3079	83	503	13		1823	109		61	
	54		17		1319	11	151	13	19	353	11		1831			677	31	113	829	17	881		23		37	11		17	29		2237	41		23	683	11	79	43	1511		11	29	17		31	223	71	57	1163	
	55	13	19	2377	839			11			37	31	229	13	89	1307	397	23	11	13	227	1279	347	797		17		1151	283		13	1109	11	29	907	1869	13	19	31	47	41	521	2347		787	149			13	
	56	43			11	31	337	19	487	2423	103		83	37	53	11	17		179		11		2011	17	13	29				11		23		19	11	257		863	97	17	43	431	13			11	1231	73	41	
	57	79	109	29		23	13	3083	47	103			19		67	17		11	463					13	197	443		353		13		11	37			97	23	17	53	83	89	13	11		29		67	17	19	2753	
29	58		43	61	1699	101		1361	1283	11			13	59	11		71	73	13			17	43		11		79	2089	613			23	127	2741		173	13	17		2029		11	661	19	2111		11	2477	47	41	29	
	59	181	101	23		13		103		653	67		11		23		337	13	211	59	17	37	13	131	757			89	11	19		2503	1747	1483		13	17	11	37	2281	61	29	11	127		1531	1723	19		541	
	60	191		11	13				157	83	3011	13	31		47		53		71	11	293	73	241	11	9	41	31	1013	13	641	2579	29	19	367	1087		743	569	11	1801	13	17	479			43		13	1499	
	61	11	1657	59			11		2039	17	13	19		23	1229	41	11	17		3167	277	11	137	29				79	37		2179	47	1153	17	41		2713	19		461		17		577	37	23		13	11	31
30	62	173	11	13	103		19		17		311		769	107	127	19		53	23	71			41	1709		73		47		11		1429	19		11	61		59		17	13		41	29	11	89	401		37	11	
	63	23	13	103		877	2447	29	2459	13	19	11	23			17	61	1213	83	53	19		13		127	1933		11	373		17	11	37	23		139	2801	383	79	13	499	193	53	47	233		13	11	229		
	64	37		31		17		1009	11	151	43			11	19	13	23		907	613	271			11	2017	859		29	13	17	43	2687	31	13		37	239		11	29	41	19		53			13	83	67	31	59	
	65	19	241	17	71	11	97		541		11	47	17		13	73			29	137	653	43	191				11		31	6		29	13	193	1327	17	11	2939	13	937	359	11	23	317		19			443	977	
	66	103				19	233	11	13	29	17	227				23	2857	1997	11	53	13	31		2617	2731	23	13			179			43	11	17	641	31	101	61				37	67		13			1847	23	19
31	67	17	151	43	11	373	71	13	41	19	2557			113	29	11			107	73	11		421		17	13		19			11	157	17	223	139	11	19				59	23	2269		47		11	61	1439	89	
	68	13	601		19		29	17	433		31			13	179	43	41	11		13	53		17	23	31	1579	61	1489	971		13	11	29	347	41		13	643		19	599		11	1493	1583	23	29	17	13	
	69	139	283	1949	31	163	17	23	2663	11	1063		359	409	11	37		193	19	31	211		73		11	109	43	127	23	331	491	467	83	47	19	709		2833	23	11	523		13	19	11	17			37	
	70	2371	59	487	17		13	829	1217	2683			11	19	1123		29	43	37			199	1303	13	71			11	47	13	197	57	41	67	131		11		19		727	11	509	17	103	53		571		
	71		17	11	311		23		29	59		1201	13	313	1823	2339	67	19	13	11		29	449	11				17	97			139	1831				13	283		11				17	103	223	47	241	277		
32	72	11	79	19	3019	13	11	271		3067	163	23	41	29			11	13	17			11	13							19	17																			
	73	41	11	3001	13			1669	19		71	13					17			809	41	59	107	17	1433	19	23	173	11	157		439	109	11	47		61	601		17	13	103	1373	11	29		547	13	11	
	74		19						733	23	13	11	37			17	13		97	127	23	691	29	107	1531	67	11			37	47	11		367			271		17	2251	523		193	251	1907	61	317	11			
	75		23	13	773		59	19	11		83		71	11	31	29	19	2819	41			17	11	421	23	887	157		31		89		43	13	23	73	17	11		13				19		17	1619	2843	47	2233	
	76	2473	13	359		11	199		23	13	11		19	197		1747	2003	37		191	17	13	31	43		11	41		71			61		607		11		83	13	23	11	163	2909	43	41	13	113	19		
33	77	311	31	67	263		73	11	1163			17	29	71		13	79	557	11	431	37		23	53	19					13																	13		
	78	127	29	499	11	157	739		2711	17	131	1129		797	13	11	1327	17	577	239	11	137	389	59	53	179	1409			19	11	149	13	17	2161	11	631	257	13		37	17	109	41			11	19		23
	79	587	839	331	47	113	479		13	227	73	1319		41	71		1063	11	43		13	233		19	421	37	13		79	59		11	19		29				17				11	13				83	151	
	80	31	2083		677	23	3119	13		11	313	19		67	11	167					941	41	1051		11	13	433	29	43	17		239	521		89	61	19				11				31	11	37	409		
34	81	13			79	17	19			101	237	41	11	13	73	19	47	227		13	43	349	149	31		163	53	11	17	953	19	19		593				11	31	199	43	571	11		613		29	131		13	
	82			11		263		101			19	193	17		23		113	137		11			61	11	13	2477		937	157	503	43		31	37	17	23	29		11	67	443				1693	19	23		467	
	83	11		163			11	181	3079	313	17	1613	709	31	19		11	71	811	23	113	11	19	13	2729		17	53	29	13	61	107	103	17				461	655		463	19	13	233	83			41		11	
	84	17	11	73	67	37		31			769	61	13	23		449			13	1777	1031	251				17	97			11	977		17	59	11		13	349		37		2383	373	181	11	19	1093		89	11	
	85		53	187	43	13	41	17	37			11	59		307		31	13	23					13	2441	43	29	11				11		227	131	13	149	151		47			37		41	31		11	17	19	
35	86	23		29	13	257	17		11	19	439	13	23	11	41		359	29	59			1213	11						19	13	103	113	187	23		107	19		11	31	2207	13				29	37	17	1373	13	317	
	87		83	41	17	11	61	47	643	761	11				97	191	13	1109			71	947		199	89	11	1901	23	53		19	1931	1021	31		11		277	353	19	11	79			17	67	283	13	43	29	
	88	241	17	13	53		733	11	877	131	23	97	1163			379	37	89	11	17		1151		47	269	347	331	17		79	41	647	11	13	19		71	113		13	29	23	17	19	2903		2027			
	89		13		11	53	191	313		13		251		19	383	11		577	17	29	11	13	2269	1013	211	17		1733	389	11	73	29	2719		11	59	31		13	773	47	113	1453				11		23	17
	90		97	151	37		79					29		509	59	13	17	11		439	2801		67	17			19	13	41	23		11	13	953		47		71	101	17	23		11				13		601	1091	
36	91	83	269	19		293	53	37		11			31		11	17	457	1619		2389	149	19	937	23	11	103	31	3167		19		13	173		73			41	13	83	11			29	467	11	23	17		1877	
	92	113		47	1987		31	23	13		37		11	1861			499	61	109	67	13	17			103	19	13	11	23	1637	55					101	11	157	23	71	97	11	43	13	17	41	151		31	
	93	451	19	11	113	59		13	223	1451				37	389	31		563		11	17	89		11	1471	13	29		1973	37		59	1601	43		17	37	19	11	2221	829	47		23	577				617	
	94	11	307		61	41	11	19		31		17		13	997	67	11	2693	29	13	2609	11		41	73	2663	353	157		167	13		37	19		349	13	59		1283	331	17	19

Non-decomposition of plane by simple arc

Moshe Shimrat

(Summary)

A new proof is given of the theorem stating that a simple plane arc does not decompose the plane. In this proof use is made of the Jordan theorem (on the decomposition of the plane by closed simple curves)for the special case of polygons.

Method of proof: For a given arc q and an arbitrary point P not on q, a series of polygons b_o, b_1, b_2,..., b_k $(0 \leq k < \infty)$ is constructed, all points of which are at a small distance (compared to the distance r(P,q)) from q and such that q is situated inside b_o and outside each of the other polygons. To each of the latter polygons there is a partial arc of q which circumscribes it and whose endpoints are at small distance from each other and from the polygon. But the diameter of a partial arc of q tends to zero with the distance between its endpoints, and therefore each of the polygons b_1,..., b_k is of small diametre compared with r(P,q) and so it cannot contain P. P thus being outside b_o, it may be connected with infinity without encountering q.

On a lemma of Kaplansky

Shimshon Amitsur

(Summary)

The following extension of Kaplansky's lemma[1] is proved: Let A be an algebra (not necessarily of finite order) over a field F which has at least m+1 elements, and satisfies a polynomial identity $g(x_1 \ldots x_n)=0$ whose degree is not greater then m in each of its variables. Let K be a field over F, then the Kronecker product A K also satisfies g=0. (m=1 was proved by Kaplansky.)

An example is given to prove that the restriction on the number of elements of the field F cannot be improved.

Additional page (477) to D. N. Lehmer's Factor Table

Dov Jarden and Alexander Katz

(Summary)

An extension of D. N. Lehmer's "Factor Table for the First Ten Millions" is given from 10,017,000 to 10,038,000. The arrangement is the same as that of Lehmer's.

On oscillations of infinite sequences

Zvi Schur

(Summary)

Let x be a sequence of constants. The non-negative number $\Omega(x)=\overline{\lim_{m,n\to\infty}}|x_m-x_n|$ is called the oscillation of x.

W. A. Hurwitz has proved that a necessary and sufficient condition for not enlarging the oscillation of any sequence x by a r e g u l a r linear transformation represented by a semimatrix A i. e., that the inequality (1) $\Omega(y)\leq\Omega(x)$ be fulfilled where $y_m=\sum_0^m{}^{n}a_{mn}x_n$ is (2) $\lim_m\sum_0^m{}^{n}a_{mn}=1$.

It is clear that a necessary condition for (1) is that A be conservative. But its regularity is not necessary. In this paper the following criterion is proved.

A necessary and sufficient condition that (1) be fulfilled for any bounded sequence x is that A be the sum of two matrices: A' conservative with constant columns and A" multiplicative with $\overline{\lim_m}\sum_n|a_{mn}|\leq 1$.

On a modular equation connected with partitions

Joseph Putter

(Summary)

In dealing with Ramanujan's conjecture about the congruence properties of the partition function p(n), Watson (1938) introduced what he called the "modular equation", which connects algebraically the functions

$$X=\frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/m)},\quad Y=\frac{\eta(m\tau)}{\eta(\tau)},$$

$\eta(\tau)$ denoting Dedekind's η function and m a natural number. In the present paper we prove that in the case m=11 the modular equation is of degree m'>11 in X, which makes Watson's method, at least in its original form, inapplicable in this case. Incidentally, we show that a "Ramanujan identity" of the form

$$(24\ )\cdot\sum_{n=0}^{\infty}p(11n+6)e^{(24n+13)\cdot 2\pi i\tau}=R\left(\frac{\eta(\frac{11\cdot 24}{24}\tau)}{\eta(\tau)}\right)$$

(R denoting a rational function) cannot exist, in contrast with the analogous identities which were found by Ramanujan for m=5,7 and by Zuckerman for m=13.

such that $(a_o b_o c_o d_o) \neq (\bar{a}_o \bar{b}_o \bar{c}_o \bar{d}_o)$; furthermore, the transformation is given by the equations: $(a_1 b_o c_o d_o) = (\bar{a}_o \bar{b}_o \bar{c}_o \bar{d}_o)$, $(\bar{a}_1 \bar{b}_o \bar{c}_o \bar{d}_o) = (a_o b_o c_o d_o)$ and similarly for b, c, d. Let us now project the focals into two lines l, $\bar{l}$ on a plane, passing through its circular points J, $\bar{J}$. To the line x, $\bar{x}$ of the congruence we make correspond the point of intersection of $\bar{J}x$, $J\bar{x}$. Then, as is easily shown, the points $a_o \bar{a}_o$, $a_1 \bar{a}_1$ are the inverse of each other w. r. t. the circle through $b_o \bar{b}_o$, $c_o \bar{c}_o$, $d_o \bar{d}_o$. In this way we have established a one to one correspondence between the operations of transformation III and IV.

Some more new factors of Fibonacci-numbers

Alexander Katz

(Summary of article in No. 1 of this Volume)

The complete factorizations of $U_{117}=2.233.29717.135721.673024656781$, $V_{73}=151549.11899937029$ and $V_{108}=2.7.23.6263.103681.177962167367$ are given. The factors 128621 and 119809 are announced for V_{109} and V_{128}, respectively. No other new factors of Fibonacci's U_n and $V_n=U_{2n}/U_n$ till n=128 exist below 2.10^5.

Disjunctive sequences

Dov Jarden

(Summary of article in No. 1 of this Volume)

A sequence of integers is said to be disjunctive, if every two of its members are coprime. A sequence which is made disjunctive by dividing each of its members by an integer d is said to be a d-multiple of a disjunctive sequence. Two methods are given for the construction of disjunctive sequences. The first, which may be regarded as algebraical, implies several of the results published in the literature, including the theorem of R. Bellman (Bull. A. M. S. 53 (1947), 778-779). The second, almost trivial method, gives all possible disjunctive sequences and its interest lies mainly in its relation to the former method. The following theorems 1, 5 illustrate the first method.

Theorem 1. The sequence x_1, $x_2=f_1(x_1)$, $x_3=f_2(x_2),\ldots$, $x_{n+1}=f_n(x_n),\ldots$, where x_1 is an integer, $f_n(x)$ is a polynomial (which may also depend on n) with integral coefficients and with an absolute term $c_n \neq 0$, such that $(x_1,c_n)=\ldots=(x_n,c_n)=d$ and $f_n(c_{n-1})=c_n$ for every $n \geq 2$, or $f_n(c_{n-1})=f_n(-c_{n-1})=-c_n$ for every $n \geq 2$, is a d-multiple of a disjunctive sequence.

Theorem 5. The sequence x_1, $x_2=x_1^2-2c$, $x_3=x_2^2-2c^2$, $x_4=x_3^2-2c^4,\ldots$, $x_{n+1}=x_n^2-2c^{2^{n-1}},\ldots$, where x_1, c are coprime positive integers, is a disjunctive sequence or a 2-multiple of a disjunctive sequence according as x_1 is odd or even.

On some questions of closure

Shmuel Schreiber

(Summary of article in No. 1 of this Volume)

The following transformations are considered:

I. Given 3 points a_o, b_o, c_o on a straight line, we construct a_1, b_1, c_1 so that $(a_o a_1 b_o c_o)=(b_o b_1 c_o a_1)=(c_o c_1 a_o b_o)=-1$. In this way we transform the original triple T_o into a new one, T_1. This transformation is involutory i. e. applied to T_1, it gives back T_o. The analytical proof is immediate. Two additional proofs are given: one, by projecting T_o stereographically on a non-degenerate conic and making use of Brianchon's theorem; the other, by constructing fourth harmonic points with the aid of orthogonal circles.

II. Given four linearly independent points a_o, b_o, c_o, d_o on a plane, we construct α_o, the Cevian (or harmonic polar) of a_o w. r. t. the triangle $b_o c_o d_o$, and similarly β_o, γ_o, δ_o. Thus the original quadruple P_o of points is transformed into a quadruple R_o of lines, and by applying the dualistic transformation to R_o we obtain a new quadruple P_1 of points. However the transformation dualistic to $P_o \to R_o$ is just the inverse to $P_o \to R_o$, thus we are brought back to P_o, i. e. $P_1=P_o$. This is best shown analytically, e. g. by choosing P_o to form the convers of a square.

III. Given in a plane 4 points not on the same circle, we pass a circle through any three of them and reflect the fourth in it. Thus, from a given quadruple Q_o of points we obtain a new one, Q_1. Motzkin (Riveon Lematematika 1 (1946-7), p. 60) asks about the form taken by $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, about possibility of closure and of reversal i. e. given Q_1, find Q_o. If, without loss of generality, we take as the original quadruple in the Argand plane z_o, $-z_o$, $\frac{1}{z_o}$, $-\frac{1}{z_o}$, $|z_o| \neq 1$, then the resulting quadruple will again be of the form z_1, $-z_1$, $\frac{1}{z_1}$, $-\frac{1}{z_1}$ where, if $z_o=\rho e^{i\varphi}$,

$$z_1=\rho e^{i\varphi}(2-\rho^4-e^{4i\varphi})/(\rho^4+e^{4i\varphi}-2\rho^4 e^{4i\varphi}).$$

One sees that if, e. g., $z_o=3^{1/4}e^{ir/4}$, $z_1=-z_1=\infty$, $\frac{1}{z_1}=\frac{-1}{z_1}=0$, also if $2\sin^2\varphi(4\rho^6+3\rho^4+4\rho^2)=(\rho^4-1)^2$ then $|z_1|=1$ thus the unit circle is not generally uniquely reversible. A full analytical treatment still stands out.

IV. Given 4 non-intersecting lines in 3-space, not on the same quadric. Taking the polar of each line w. r. t. the the quadric engendered by the other three, we obtain a new quadruple of lines. Both quadruples (and the subsequent ones) belong, as is shown, to the same linear congruence, call its focals 1 and $\bar{1}$. Each line of the congruence can now be given by a pair of coordinates x, $\bar{x}$ of points it defines on 1, $\bar{1}$. It is shown that, by our hypotheses on the original quadruple of lines, their coordinates are

value parameter. By substituting in this differential equation $p(z)$ by the above expression for $p_k(z)$ and by denoting the corresponding value of λ by λ_k, we find $c_1^{(k)}=\lambda_k(n-1)^{-1}$ and also the remaining coefficients $c_\nu^{(k)}$, $2\leq\nu\leq n$ as polynomials in λ_k and, finally, we derive an algebraic equation $g(\lambda)=0$ of the degree n-1 for the Eigen-value λ_k, $0\leq k\leq n-2$. Since there are thus at most n-1 polynomials $p_k(z)$ and, therefore, also at most n-1 maximal systems M_k, it follows that there are exactly n-1 maximal systems M_k, one for each value of k, $0\leq k\leq n-2$. Thus every maximal system M_k, for fixed k, is unique, and particularly, since, by I, every F-system of order n of A yields the system M_o whenever $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$, there follows the proposition

III. Let A be an arc of the unit-circle whose opening α satisfies the condition $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$. Then the F-system of order n of A is unique.

In the case that u and v are situated symmetrically to the real axis, the maximal system M_k, $0\leq k\leq n-2$, is also symmetrical to the real axis and thus it follows that $c_1^{(k)}$ is real. Hence λ_k is also real and the equation $g(\lambda)=0$ has **only** real distinct roots i. e. the above differential equation has **only** real Eigen-values.

In conclusion the problem proposed and solved by Prof. M. F e k e t e is dealt with: to find the maximal system M_k for a <u>given</u> k, $0\leq k\leq n-2$, by knowing all Eigen-values λ, i. e. the roots of the above algebraic equations $g(\lambda)=0$ without actually forming all polynomials $p(z)$ which correspond to these Eigen-values and evaluating the zeros of each $p(z)$. This paper brings but a few hints about the line of the proof for the relevant result, viz. that

On has to arrange the Eigen-values λ in <u>increasing</u> order to obtain the sequence of the values $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ concerned with.

---

2) M. Fekete, Math. Zeitschr. 17 (1923), 228-249.
3) Walsh, Interpolation and Approximation, New York, 1935, 176.
4) M. Fekete, Math. Zeitschr. 37 (1933), 635.
5) M. Fekete, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), 410; Walsh, loc. cit.

On the systems of Fekete-points of an arc of a circumference

Baruch Germansky

(Summary of article in No. 1 of this Volume)

We call, with Prof. Walsh[3], a system of $n \geq 2$ points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ which maximalize the expression $\Delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} |z_\mu - z_\nu|$ when the points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vary on a limited-closed infinite point-set E a system of F e k e t e -points (F-system) of the order n of E. The importance of these systems in the theory of the transfinite diameter, interpolation and approximation was shown by Prof. Fekete[2,4,5] and others.

This paper is a redressing of my previous note published in C. R. 206 (1938), p. 1163. I prove first the proposition

I. Let A be an arc of the unit-circle C in the z-plane whose opening is α $(0<\alpha<2\pi)$. In the case $n \geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$ every F-system of the order n of A contains both endpoints of A, while in the case $2 \leq n < 2\pi/(2\pi-\alpha)$ none of the F-systems of the order n of A contains both endpoints of A simultaneously.

In the latter case there is an infinite number of such F-systems of the order n of A.

This proposition is proved by means of the following lemma.

II. If the n points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vary independently of each other on the unit-circle C, the expression $\Delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ attains a relative maximum for those, and only for those, values of the variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ which correspond to the vertices of a regular polygonal of n sides inscribed in C.

The paper brings a proof by prof. M. Fekete of this lemma.

In order to characterize more closely the F-systems we are concerned with the problem of finding all "maximal systems" M_k, $0 \leq k \leq n-2$ of $n \geq 3$ points $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$ of the unit-circle C, two of which, say $\xi_1^{(k)}$ and $\xi_n^{(k)}$, are fixed and coincide with two given points, u and v, of C, while k of the remaining points are situated on one arc of C limited by u and v and n-2-k of them are situated on the other arc limited by the same points and such that for $z_1=\xi_1^{(k)}, z_2=\xi_2^{(k)}, \ldots, z_n=\xi_n^{(k)}$ the expression $\Delta(u, z_2, \ldots, z_{n-1}, v)$ attains a maximum on C. It is obvious that for a given $n \geq 3$ and each k, $0 \leq k \leq n-2$, there is at least one such maximal system $M_k = M_k(u, v; n)$.

To this end we consider the polynomials $p_k(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z - \xi_\nu^{(k)}) = z^n + c_1^{(k)} z^{n-1} + \ldots + c_n^{(k)}$ and prove that they necessarily satisfy the differential equation

$$(n-1)p'(z) - zp''(z) = \lambda \frac{p(z)}{(z-u)(z-v)},$$

with the border-conditions $p(u)=p(v)=0$. The constant λ is an Eigen-

RIVEON LEMATEMATIKA

A QUARTERLY JOURNAL

INTENDED TO PROMOTE MATHEMATICAL RESEARCH
AMONG STUDENTS OF MATHEMATICS

DOV JARDEN, EDITOR

Volume 3 Jerusalem, September 1949 Number 3

CONTENTS

Editor's address: Dov Jarden, Kneset Hachadasha, Jerusalem, Israel