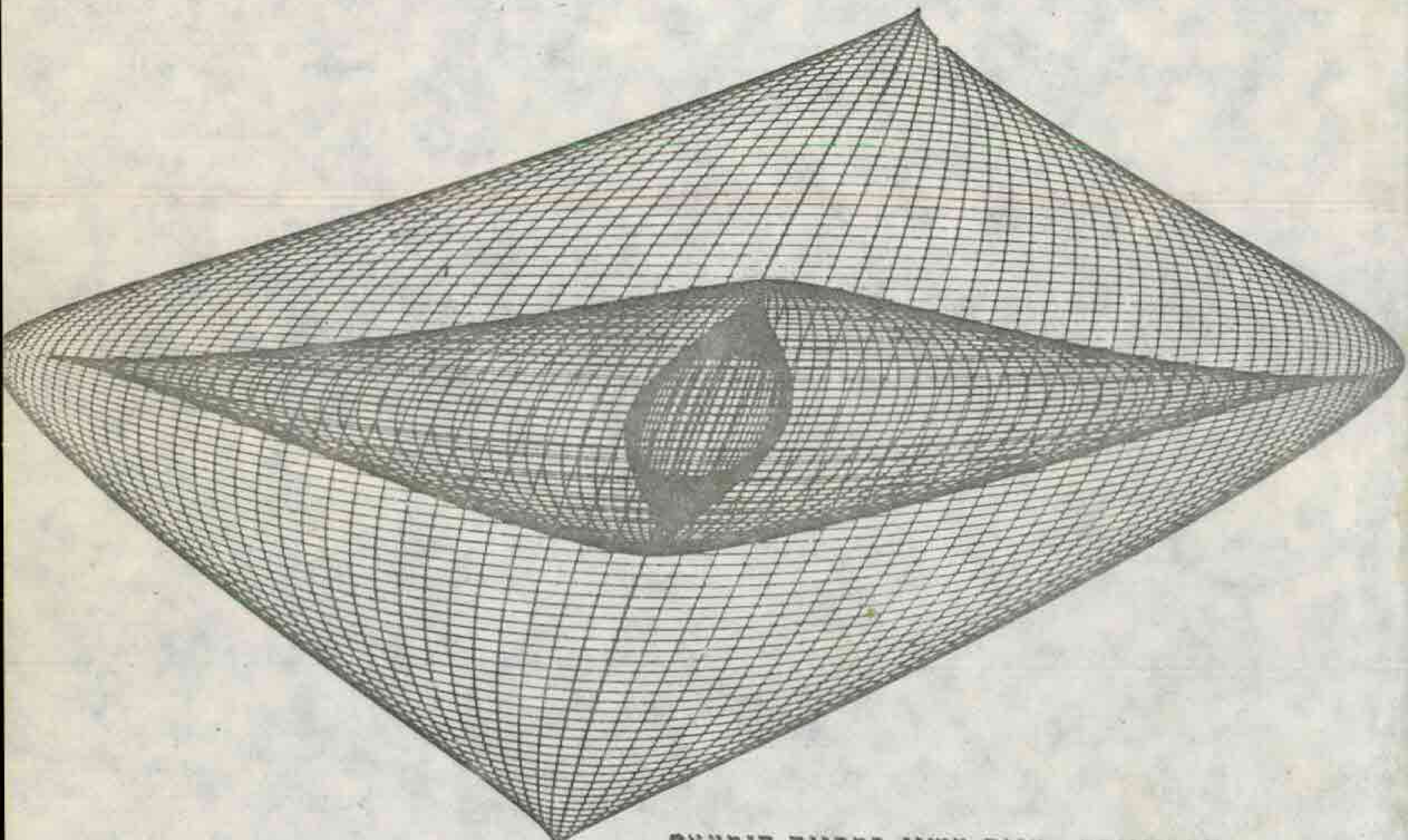
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



הרמונוגרם. ציור עשוי במכונה הנמצאת במוזיאון המדע והטכנולוגיה, תל-אביב.

כרך 3 — כסלו תשכ"ח - דצמבר 1967 — מס 5

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

1

דבר המערכת

גם הפעם עלינו להתנצל על האיחור הגדול שחל בהוצאת החוברת הזאת. היכף אחרי הופעת החוברת הקודמת התרחשו מאורעות מאי-יוני 1967 ואחרי זה עבר זמן רב עד שחזרנו לעבודה סדירה ותקינה. אנו תקוה כי השקט יקרר בעולמנו וכי נוכל להתמסר למדע והוראה כפי שהיינו רוצים.

בהזדמנות זו אנו מפנים את תשומת לבם של הקוראים לדבר קיומה של האולימפיאדה במתמטיקה (השכ"ח) כפי שמתואר בטופס המצורף להוברת זו.

בעיה ופתרונה

מנהל מוסד מסר מכתבים לשני שליחים הולכי רגל, אחד לראובן שיקה אותו לדואר ואחד לשמעון שימסור אותו לחנות שנמצאה בדיוק בכיוון ההפוך מזה של הדואר. שמעון יצא לשליחותו כחצי שעה אחרי ראובן, וזמן קצר אחרי זה גילה המנהל כי בטעות מסר לכל אחד את המכתב שהיה צריך לתת לשני. כדי לתקן את טעותו שיגר רוכב אופניים שידביק אחד מהקנים, ויקח ממנו את מכתבו ויעבירנו לשני, ואח"כ יקח את המכתב שהיה כבר בידי השני ויעבירנו לראשון, אח"כ עליו לחזור למוסד.

אפשר להניח כי מהירות הליכתו של ראובן שווה לזו של שמעון, וכי מהירות האופניים היא כזאת שאין חשש שלא יוכל הרוכב להדביק את שניהם ולקיים את שליחותו. השאלה היא אחרי איזה מהשנים, ראובן או שמעון, כדאי לו לרדף בראשונה?

(פתרון הבעיה בעמוד 7)

היום יום x בשבת

1. הצגת הבעיה

מטרתנו במאמר זה לפתח נוסחא המאפשרת לקבע את היום בשבוע של כל תאריך הניתן לפי הלוח האזרחי. הלוח המקובל כיום ברוב ארצות העולם הוא הידוע בשם "הלוח הגרגוריאני". לפי לוח זה יש בכל שנה רגילה 365 יום, מחולקים לחדשים כדלקמן: -

ינואר	31	יולי	31
פברואר	28	אוגוסט	31
מארס	31	ספטמבר	30
אפריל	30	אוקטובר	31
מאי	31	נובמבר	30
יוני	30	דצמבר	31

כמעט כל השנים אשר מספרן לפי הספירה הנוצרית מתחלק ב-4 נחשבות כשנים מעוברות, ומוסיפים להן יום אחד בסוף פברואר. מספר הימים בשנה מעוברת הוא איפוא 366 ובחודש פברואר של שנה כזאת יש 29 יום. אמרנו "כמעט כל השנים .." כי ישנן גם יוצאות מהכלל. שנים שמספרן מתחלק ב-100 אינן שנים מעוברות, אלא אם כן מספרן מתחלק ב-400. לדוגמא השנים

1900, 1789, 1947, 1967

אינן שנים מעוברות, אבל השנים

2000, 1776, 1600, 1948

מעוברות הן.

למען הקל על החשבון נעביר, למטרת מאמר זה, את התחלת השנה לראשון במארס, ונראה את ינואר ופברואר כשני החדשים האחרונים של השנה הקודמת. כדי למנוע אי-הבנה נסמן את התאריך הרגיל בצורה המקובלת, ואילו כשנכתוב תאריך בצורה החדשה נעטר אותו בכוכבים. לדוגמא, ה-15 באוגוסט 1962 יכול להיכתב כ- 15.8.62 או כ-*15.6.62*. כמו כן ‎*12.12.1921* = 12.2.1922, וכו'.

ניקח כנקודת מוצא את יום ‎*1.1.1600*. תאריך זה נוח למדי מאחר שהלוח הגרגוריאני הוכנס לשימוש בשנה 1582. אם נדע את היום בשבוע של ‎*1.1.1600* ומספר הימים שחלפו מאז עד לתאריך מסוים נוכל בנקל לחשב את היום של תאריך זה. למעשה אין צורך לדעת את מספר הימים אלא רק את השארית כשמחלקים מספר זה ב-7. נשתמש במאמר זה בסימון $x \equiv y \pmod m$ כש- x, y, m הם מספרים שלמים (לאו דוקא חיוביים) ומשמעותו הוא ש- $(x-y)$ מתחלק ב- m באופן מדוייק. לפי זה אם יש לנו שני תאריכים הרחוקים x ו- y ימים בהתאמה מתאריך המוצא וידוע

כי $x \equiv y \pmod 7$ אנו נדע כי שני התאריכים האלה נפלו באותו יום בשבוע.

סימן שני שנזדקק לו הרבה במשך המאמר הוא $[\alpha]$, עבור כל מספר ממשי α, ופרושו החלק השלם של α, ז.א. המספר השלם הגדול ביותר שאינו עולה על α. לדוגמא $[7.2] = 7$, $[3.9] = 3$, $[4.0] = 4$, $[-3.1] = -4$, וכו'.

2. מספר השנים המעוברות

מהאמור לעיל יוצא כי חישוב מספר הימים בין *1.1.1600* עד לתאריך אחר כלשהו תלוי בין השאר במספר השנים המעוברות בין התאריכים האלה. בסעיף זה נחפש איפוא פונקציה $f(N)$ והיא מספר השנים המעוברות בין השנה 1600 והשנה N, כולל האחרונה ולא הראשונה, ז.א. עבור כמה מספרים שלמים y המקיימים $1600 < y \leq N$ היתה (או תהיה) השנה y מעוברת. הערכים של y בתחום זה שהם כפולות של 4 הם המספרים $4x$ המקיימים $1600 < 4x \leq N$ ז.א. $400 < x \leq \frac{N}{4}$ ומספרם איפוא הוא $[\frac{N}{4}]-400$. מאידך לא יהיו כל השנים האלה מעוברות כי יש להוציא מהכלל את אלה שהן כפולות של 100 (פרט לאלה שהן כפולות של 400). הכפולות של 100 הן השנים $100x$ כש- $1600 < 100x \leq N$, ז.א. $16 < x \leq \frac{N}{100}$ ולכן מספרם הוא $[\frac{N}{100}] - 16$. כמו כן המיעוט מבין אלה שהן כפולות של 400 יהיו המספרים x המקיימים $1600 < 400x \leq N$ ומספרם יהיה איפוא $[\frac{N}{400}]-4$. מספר השנים המעוברות בין 1600 ל-N יהיה איפוא

$$\{[\tfrac{N}{4}] - 400\} - \{[\tfrac{N}{100}] - 16\} + \{[\tfrac{N}{400}] - 4\};$$

ז.א. $[\frac{N}{4}] - [\frac{N}{100}] + [\frac{N}{400}] - 388$.

אם נכתוב $N = 100C + D$ כש- $0 \leq D < 100$ (לדוגמא, בשנת 1967 $D = 67,\ C = 19$) נקבל

$$[\tfrac{N}{4}] = [25C + \tfrac{D}{4}] = 25C + [\tfrac{D}{4}].$$

$$[\tfrac{N}{100}] = [C + \tfrac{D}{100}] = C,$$

ובסוף נסתכל במספר $[\frac{C}{4} + \frac{D}{400}] = [\frac{N}{400}]$. ברור כי $\frac{C}{4}$ הוא בצורת מספר שלם + ζ כשהערכים האפשריים עבור ζ הם $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 0. מאחר ש- $D < 100$ אנו רואים ש- $\frac{D}{400} < \frac{1}{4}$ ולכן החלק השלם של $\frac{C}{4} + \frac{D}{400}$ יהיה שווה לזה של $[\frac{C}{4}]$ מכל זה נובע כי המספר המבוקש של שנים מעוברות הוא

$$\{25C + [\tfrac{D}{4}]\} - C + [\tfrac{C}{4}] - 388 ,$$

ז.א. $24C + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] - 388$.

3. מספר הימים מ- *1.1.1600* עד *1.1N*

מספר הימים מ- *1.1.1600* עד *1.1.N* יהיה מורכב מ-

(i) 365 ימים מכל שנה רגילה

(ii) 366 ימים מכל שנה מעוברת

ולכן יחד יהיה שווה ל- 365 כפול מספר השנים בכלל + מספר השנים המעוברות. אם נכתוב שוב $N = 100C + D$ נקבל איפוא

$$365\ \{100\ (C-16) + D\} + 24C + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] - 388$$

ונסמן את הפונקציה הזאת ב- $\phi\ (C, D)$.

4. היום בשבוע

נניח עכשיו ש-*1.1.1600* חל ביום a בשבוע ואילו *1.1.100C+D* חל ביום b. אז ברור כי

$$b - a \equiv \phi\ (C, D) \pmod 7$$

$$\equiv 364\{100(C-16)+D\}+\{100(C-16)+D\}+21C+3C+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]-388$$

$$\equiv 100(C-16) + D + 3C + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] - 385 - 3 \pmod 7$$

$$\equiv 2\ (C-16) + D + 3C + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] - 3 \pmod 7$$

$$b - a \equiv 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] - 35$$

$$\equiv 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] \pmod 7$$

ז.א.
$$b \equiv a + 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] \pmod 7$$

עכשיו נסמן ב- b_m את היום בשבוע של *1.m.100C+D*, ראינו איפוא כי

$$b_1 \equiv a + 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] \pmod 7$$

מטבלת החדשים שבתחילת המאמר אנו רואים מיד כי

$$b_2 \equiv b_1 + 3 \pmod 7$$

(מאחר שבמארס ישנם 31 יום). כמו כן

$$b_3 \equiv b_2 + 2 \equiv b_1 + 5 \pmod 7$$
$$b_4 \equiv b_3 + 3 \equiv b_1 + 8 \pmod 7$$
$$b_5 \equiv b_4 + 2 \equiv b_1 + 10 \pmod 7$$
$$b_6 \equiv b_5 + 3 \equiv b_1 + 13 \pmod 7$$
$$b_7 \equiv b_6 + 3 \equiv b_1 + 16 \pmod 7$$
$$b_8 \equiv b_7 + 2 \equiv b_1 + 18 \pmod 7$$
$$b_9 \equiv b_8 + 3 \equiv b_1 + 21 \pmod 7$$
$$b_{10} \equiv b_9 + 2 \equiv b_1 + 23 \pmod 7$$
$$b_{11} \equiv b_{10} + 3 \equiv b_1 + 26 \pmod 7$$
$$b_{12} \equiv b_{11} + 3 \equiv b_1 + 29 \pmod 7$$

מענין כי אפשר לסכם את כל הנוסחאות האלה ע"י

$$b_m \equiv b_1 + [2.6m - 2.2] \pmod 7$$

מכל זה יוצא כי b_m , היום בשבוע של *1.m.100C+D* מקיים

$$b_m \equiv a + 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] + [2.6m - 2.2] \pmod 7$$

ומזה נובע מיד כי התאריך $*n.m.100C+D*$ יפול ביום x המקיים

$$x \equiv b_m + (n-1) \pmod 7$$

$$\equiv (a-1) + n + 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] + [2.6m-2.2] \pmod 7$$

5. הנוסחא הסופית

עדיין לא קבענו את המספר a, היום בשבוע של $*1.1.1600*$. אולי היינו יכולים למצוא אותו באיזה לוח עתיק אבל יותר קל יהיה להשתמש בתאריך ידוע. למשל חג העצמאות תשכ"ז נפל ביום 15.5.1967 שהוא $*15.3.1967*$ וזה היה ביום ב', מכאן

$$2 \equiv a - 1 + 15 + 95 + 67 + [\tfrac{19}{4}] + [\tfrac{67}{4}] + [7.8-2.2] \pmod 7$$

$$= a + 176 + 4 + 16 + 5$$

$$= a + 201$$

$$\equiv a - 2 \pmod 7$$

ומכאן $a \equiv 4$.

נוכל איפוא לסכם בכך שהיום בשבוע של $*n.m.100C+D*$ הוא x כש-

$$x \equiv 3 + n + 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] + [2.6m-2.2] \pmod 7$$

$$= n + 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] + [2.6m + 0.8]$$

ניתן כמה דוגמאות:

(i) 29 נובמבר 1947.
תאריך זה הוא $*29.9.1947*$ ולכן

$$x \equiv 29 + 95 + 47 + 4 + 11 + [23.4+0.8] \pmod 7$$

$$= 210$$

$$\equiv 0 \pmod 7$$

ז.א. שהיום נפל בשבת.

2 נובמבר 1917. [*2.9.1917*]

$$x \equiv 2 + 95 + 17 + 4 + 4 + 24 \pmod 7$$
$$= 146$$
$$\equiv 6 \pmod 7$$

ז.א. יום ו׳.

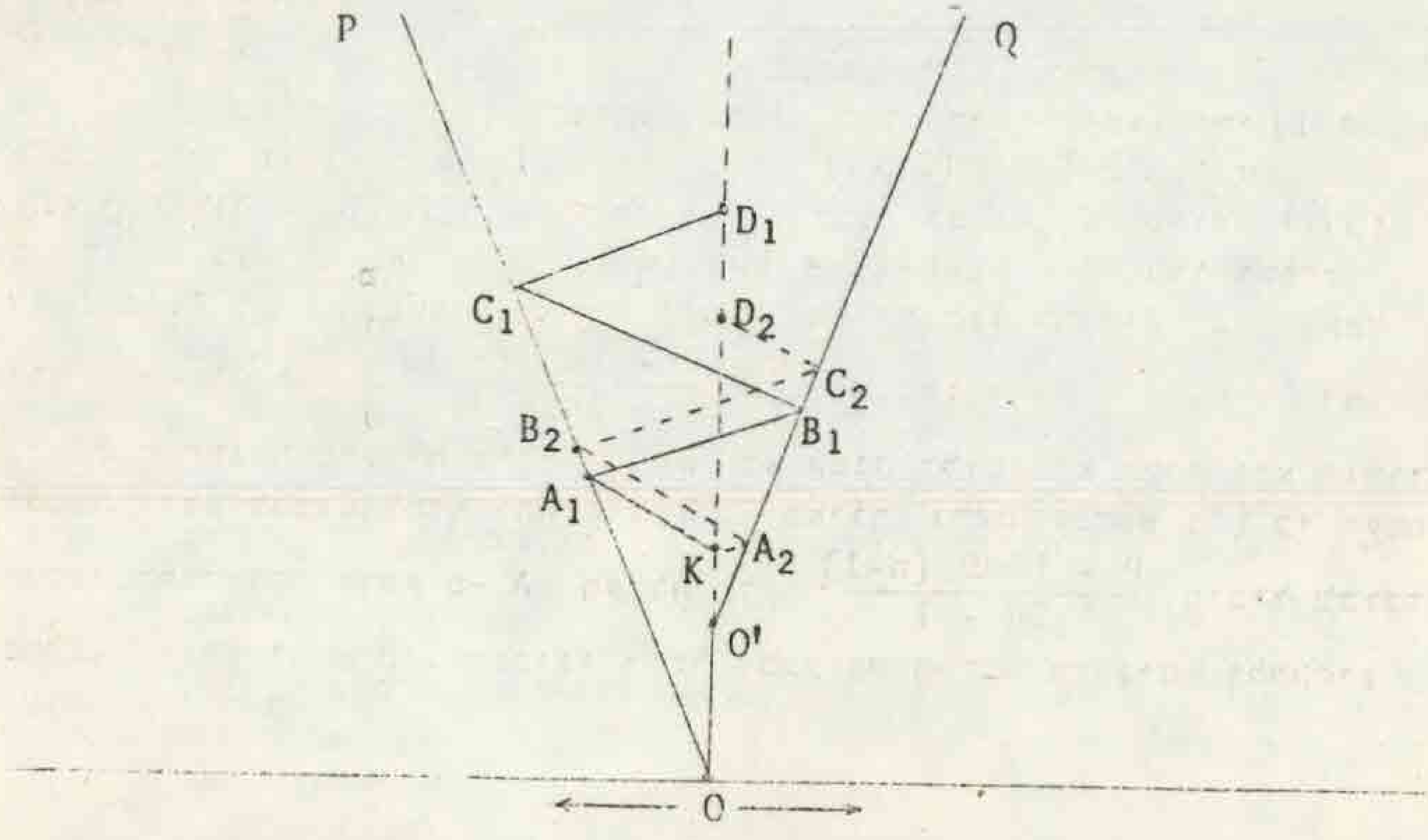
14 יולי 1789 [*14.5.1789*]

$$x \equiv 14 + 85 + 89 + 4 + 22 + 13 \pmod 7$$
$$\equiv 3 \pmod 7$$

ז.א. יום ג׳.

<u>פתרון הבעיה מעמוד 1</u>

אולי הדרך הפשוטה ביותר לראות את הפתרון היא מתוך הציור. אנו מסמנים מרחקים בציר האופקי וזמן בציר המאונך. לפי זה יסמן הקו הישר OP את מסלולו של השליח שנשלח לדואר ו- O'Q את מסלולו של השליח השני. הקטע OO' מסמן את הזמן שחלף בין יציאתם של שני השליחים, ו- K זמן יציאתו של רוכב האופניים. לפי זה יסמן $KA_1B_1C_1D_1$ מסלולו של רוכב האופניים אם ירדוף ראשית אחרי ראובן ו- $KA_2B_2C_2D_2$ אם יתחיל ברדיפה אחרי שמעון. ברור מהציור אחרי מי כדאי לו לרדוף ראשון.



תחנות דלק במדבר (פתרון)

הערת העורך. התקבלו פתרונות נכונים מאת אנדרי טורין (חיפה) ומ. שמשוני (רחובות). שני הפתרונות דומים בעיקרם.

בחוברת הקודמת (כרך 3, מס' 4) הצגנו את הבעיה הזאת: -

עלינו לעבור מדבר מנקודה א' לנקודה ב', אשר המרחק ביניהן 2,000 ק"מ. לרשותנו מכונית היכולה לשאת בקרבה דלק כדי נסיעה של 1,000 ק"מ. בנקודה א' יש לנו דלק בשפע, וכמו כן עם הגיענו לנקודה ב' לא נצטרך לדאג יותר לענין הדלק.

ברור כי לא נוכל לעבור מ-א' עד ב' בנסיעה אחת, אלא נצטרך להטעין את המכונית דלק, לנסוע כברת ארץ לקראת ב', לאחסן חלק מהדלק בחביות, ולחזור ל-א' לטעון שוב, לאחסן, לחזור, וחוזר חלילה.

נשאלת השאלה הבאה:- מהי כמות הדלק המזערת (מינימלית) הדרושה כדי שנוכל להגיע עד ב'? אנו מניחים כי אין כל הפסדים מהדלק בזמן האחסון.

כאן נציג פתרון לבעיה זו. לראשונה נראה את הבעיה מנקודת השקפה שונה במקצת. נניח כי אנחנו נמצאים בנקודה A כשכמות הדלק העומדת לרשותנו היא כדי נסיעה של P ק"מ. לאיזה מרחק נוכל להגיע?

נגדיר את המספר הטבעי n ע"י $1000(n-1) < P \leq 1000n$. ברור שכדי להגיע למרחק מירבי נשתמש בכל הדלק שלרשותנו וזה ידרש לפחות n יציאות מ- A. מאחר שאנחנו מעונינים ביעילות מירבית נצא איפוא בדיוק n פעמים. עכשיו נניח כי הקמנו את התחנה הראשונה ב- T_1 אשר מרחקו מ- A הוא m ק"מ. את הדרך מ- A ל- T_1 נעשה n פעמים בכיוון A ל- T_1 ו- $(n-1)$ פעמים בכיוון ההפוך, וצריכת הדלק תהיה איפוא כדי $m(2n-1)$ ק"מ. בדרך זו נצבר ב- T_1 הספקה כדי $P - m(2n-1)$ ק"מ. אם $P - m(2n-1) > 1000(n-1)$ אזי נצטרך לצאת גם מ- T_1 לפחות (ולכן בדיוק) n פעמים. אבל אם $P - m(2n-1) = 1000(n-1)$ הרי יספיק לצאת מ-T_1 $(n-1)$ פעמים. אנו קובעים את תחנתנו הראשונה ב- B אשר מרחקה מ- A הוא $\dfrac{P - 1000(n-1)}{2n - 1}$ ק"מ. להלן נראה (משפט א' למטה) כי הצבת תחנות ביניים בין A ל-B לא תשנה כלום ולא תעלה ולא תוריד מכמות הדלק שנכנס בסוף לתחנה ב-B . מאידך נראה (משפט ב') כי הקמת התחנה הראשונה במרחק מ- A העולה על $\dfrac{P - 1000(n-1)}{2n - 1}$ תוביל לבזבוז בדלק, במובן זה שיהיה חסכוני יותר לבצע את המעבר בשלבים ולהתקין תחנת ביניים ב-B .

בשלב השני אנו נמצאים איפוא ב- B עם כמות דלק שתספיק ל- $1000(n-1)$ ק"מ. בדומה לשלב הראשון, אנו רואים כי נצטרך לצאת מ-B בדיוק $(n-1)$ פעמים. נקים את התחנה השניה ב-C כשהמרחק מ-B ל-C הוא α ק"מ. את הדרך הזאת נעשה $(n-1)$ פעמים מ-B ל-C ו-$(n-2)$ פעמים בחזרה ולכן נכניס לתחנה ב-C כמות דלק כדי נסיעה של $1000(n-1) - (2n-3)\alpha$ ק"מ. נקבע את α כך ש-

$$1000(n-1) - (2n-3)\alpha = 1000(n-2)$$

ז.א. $\alpha = \frac{1000}{2n-3}$. ומהמשפטים א׳ ו-ב׳ (למטה) נראה כי זה המקום האופטימלי עבור תחנה זו. כמו כן תימצא התחנה הבאה, D, במרחק $\frac{1000}{2n-5}$ ק"מ מ-C, וכו׳.

אנו רואים איפוא כי המרחק המירבי אשר שמה אפשר להגיע מ-A הוא

$$X = \frac{P-1000(n-1)}{2n-1} + \frac{1000}{2n-3} + \frac{1000}{2n-5} + \dots + \frac{1000}{3} + 1000$$

בבעיה שהוצגה היה עלינו להגיע למרחק של 2000 ק"מ, ועלינו לקבע את P בהתאם. ראשית נקבע n כך ש-

$$(1) \quad 1000 + \frac{1000}{3} + \frac{1000}{5} + \dots + \frac{1000}{2n-3} < 2000 < 1000 + \frac{1000}{3} + \dots + \frac{1000}{2n-1} \quad (1)$$

ורואים מיד כי $n=8$. מאחר ש- $1955.13 = 1000\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{13}\right)$

ייקבע P ע"י

$$1955.13 + \frac{P - 7000}{15} = 2000$$

ז.א. $P \equiv 7673$.

אם המרחק הכללי הוא L ק"מ (במקרה שלנו היה $L = 2000$), הרי נצטרך לפתור את האי-שויון

$$(2) \qquad 1000 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r-1} < L < 1000 \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2r-1}$$

במקום (1), ברוב המקרים לא יהיה הדבר קשה. בין השאר נוכל להיעזר ע"י שיקולים נוספים המביאים לפחות לפתרון מקורב של (2) אשר אפשר אח"כ לתקנו.

אנו יודעים כי קיים מספר קבוע הידוע בשם "הקבוע של אוילר" והמסומן בדרך כלל ע"י γ (ערכו ... 0.5772) עם התכונה ש- $\gamma + \log_e N$

מהווה קירוב טוב לסכום $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r}$ אבל

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-3} = \sum_{r=1}^{2n-2} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r}$$

$$= \sum_{r=1}^{2n-2} \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}$$

$$= \gamma + \log_e (2n-2) - \frac{1}{2} [\gamma + \log_e (n-1)]$$

$$= \frac{1}{2} [\gamma + \log_e 4 + \log_e (n-1)] \qquad \text{(בקירוב)}$$

יש לנו איפוא ההערכה המקורבת

$$1000 + \frac{1000}{3} + \frac{1000}{5} + \dots + \frac{1000}{2n-3} = 500 \ [\gamma + \log_e 4 + \log_e (n-1)]$$

אבל אמרנו כבר כי ... $\gamma = 0.5772$ וידוע גם כי $\log_e 4 = 1.3863$

ולכן

$$1000 + \frac{1000}{3} + \dots + \frac{1000}{2n-3} = 982 + 500 \log_e (n-1)$$

מאידך $0 < P-1000(n-1) < 1000$ ולכן

$$982 + 500 \log_e (n-1) < X < 982 + 500 \log_e (n-1) + \frac{1000}{2n-1}$$

<u>משפט א.</u> אם ברשותנו ב-A כמות דלק לנסיעה של P ק"מ כאשר $1000(n-1) < P < 1000n$ (n מספר טבעי כלשהו) וברצוננו להגיע ביעילות מירבית לנקודה B אשר מרחקה מ-A הוא $x < \frac{P-1000(n-1)}{2n-1}$ בלי להשאיר דלק ב-A, אזי לא יהיה כל יתרון או חסרון בהקמת תחנות ביניים בין A ל-B, בתנאי שבכל יציאה נוציא את הכמות המירבית העומדת לרשותנו.

<u>משפט ב.</u> לפי נתוני משפט א׳ אם רוצים לנסוע מ-A ל-Y אשר במרחק $x < y$, הרי עדיף להקים תחנת ביניים ב- Z במרחק $\frac{P-1000(n-1)}{2n-1}$ מ- A.

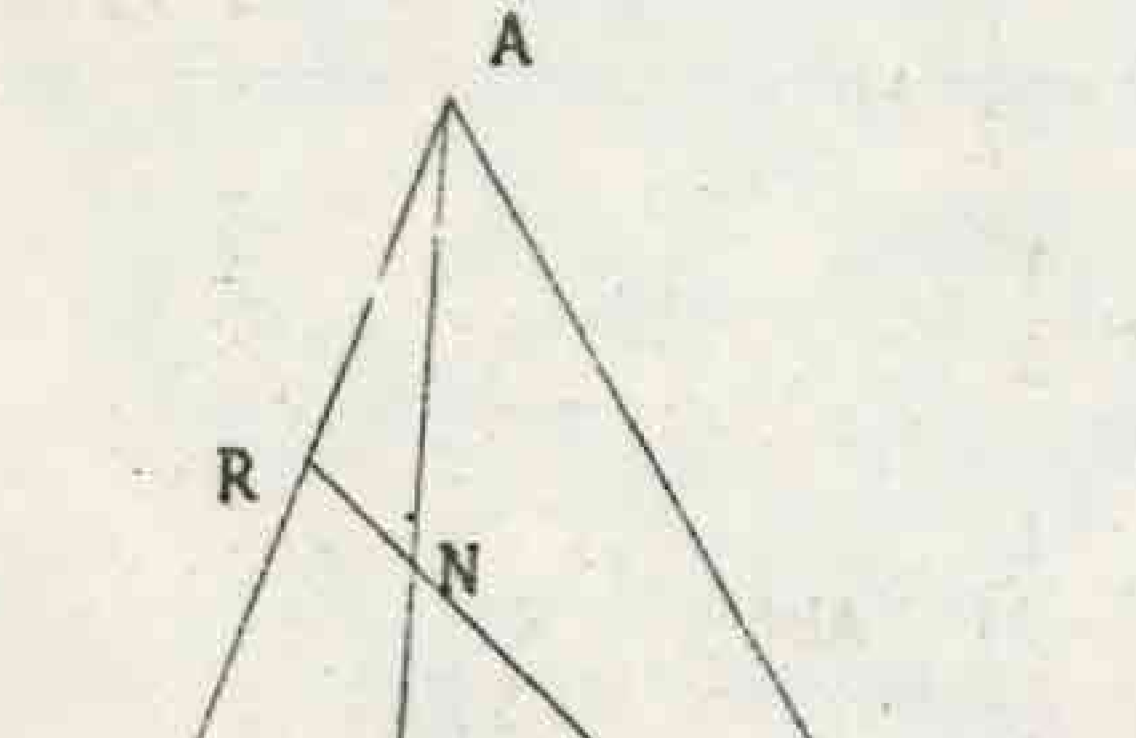
הוכחת משפט א׳ מידית אם נוכיח כי העמדת התחנה הראשונה ב- B תביא להכנסת דלק שמה כדי $P - (2n-1)x$, וזאת בדיוק הכמות שתגיע ל- B גם אם נעמיד תחנת ביניים. באשר למשפט ב׳ אפשר לראות כי בלי תחנת ביניים נכניס ל-y $P - (2n-1)y$ ועם תחנה ב- Z נכניס $1000(n-1) - (2n-3)(y-x)$, שהיא כמות גדולה יותר. נשאיר לקוראים למלא את פרטי ההוכחות.

<u>צפור אחת בשתי אבנים</u>

גם הפעם נציג בעיה על משלשים אותה קבלנו, יחד עם פתרונותיה, מה׳ עקיבא סקידל (כפר בלום).

<u>הבעיה</u>

במשלש ABC אנו לוקחים P על BC, Q על CA, R על AB כך ש- $\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} = \frac{AR}{AB} = \frac{1}{3}$.



ציור 1

אנו מחברים AP, BQ, CR וע"י זה יוצרים משלש פנימי LMN (ראה ציור 1). יש להוכיח כי $S_{LMN} = \frac{1}{7} S_{ABC}$.

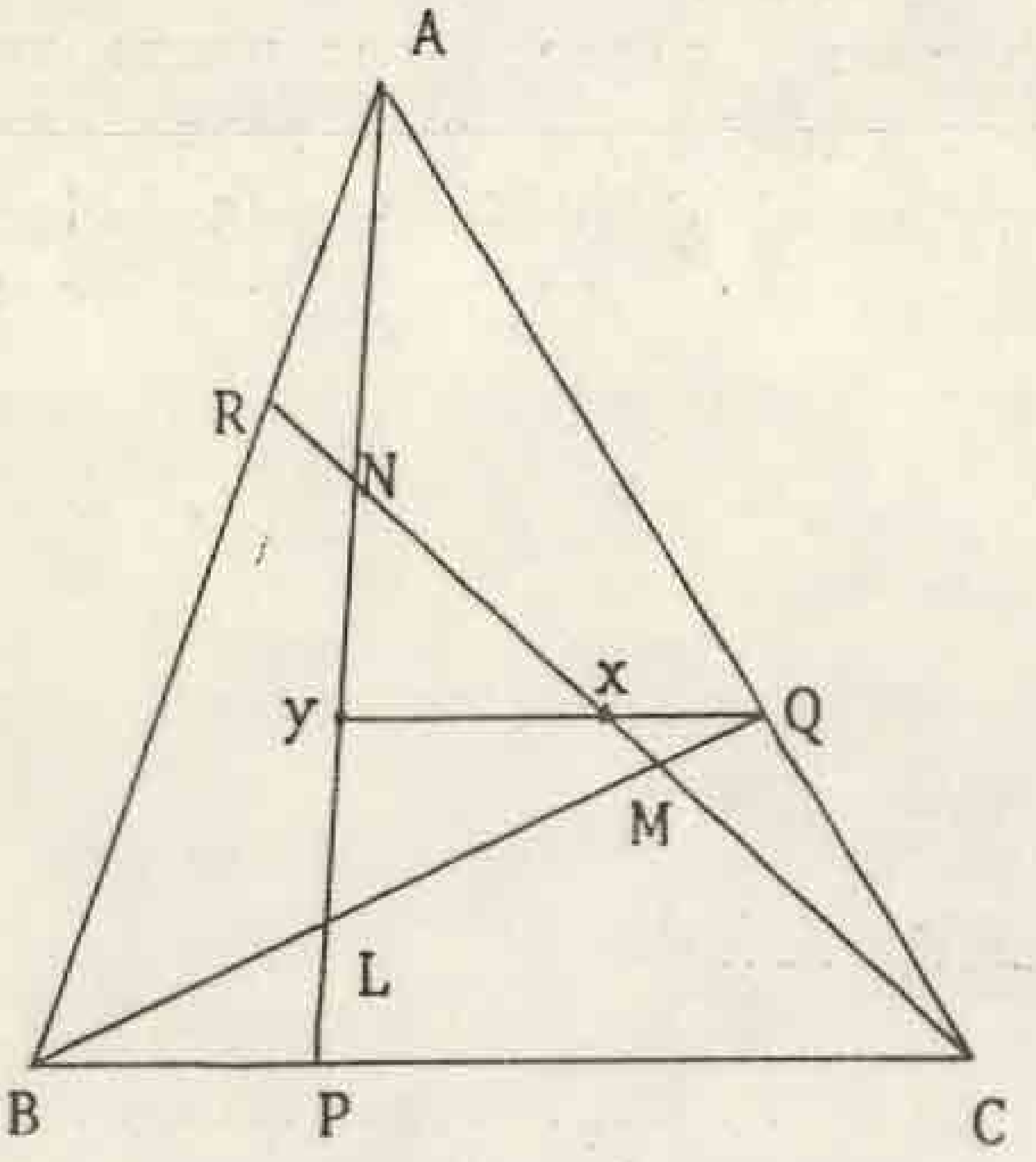
את העובדה הזאת נוכיח בכמה אופנים.

אנו רואים כי

$$S_{LMN} = S_{ABC} - (S_{ABP} + S_{BCQ} + S_{CAR}) + (S_{ARN} + S_{BPL} + S_{CQM}) \quad (1)$$

אבל ABC, ABP הם בעלי אותו גובה ו- $BP = \frac{1}{3}BC$. מכאן ש- $S_{ABP} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, והוא הדין לגבי S_{BCQ} ו-S_{CAR}. אם נציב את אלה ב-(1) נקבל כי

$$S_{LMN} = S_{ARN} + S_{BPL} + S_{CQM} \qquad (2)$$



ציור 2

כדי לחשב את אלה נמשיך YXQ מקביל ל-BC שיפגוש את CR ב- X ואת AP ב-Y (ראה ציור 2). אנו רואים כי

$$\frac{QY}{PC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3}$$

ולכן

$$QY = \frac{2}{3} \cdot PC = \frac{4}{9} \cdot BC$$

ומכאן

$$\frac{PL}{LY} = \frac{BP}{QY} = \frac{\frac{1}{3} \cdot BC}{\frac{4}{9} \cdot BC} = \frac{3}{4}.$$

ולכן

$$\frac{PL}{PY} = \frac{3}{7}$$

ומזה נובע כי

$$PL = \frac{3}{7}\, PY = \frac{1}{7}\, AP$$

אבל.

$$BP = \frac{1}{3}\, BC$$

ולכן

$$S_{BPL} = \frac{1}{21}\, S_{ABC}$$

כמו כן רואים כי גם

$$S_{ARN} = S_{CQM} = \frac{1}{21}\, S_{ABC}$$

ומ-(2) נובע כי (3) $S_{LMN} = \frac{1}{7}S_{ABC}$.

למעשה קל להכליל את התוצאה הזאת למקרה ש- $\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} = \frac{AR}{AB} = \lambda$ (ולאו דוקא, כמו במקרה שלנו, $\lambda=\frac{1}{3}$). כדי לראות את זה נשתמש באותם הציורים דלעיל, אם הפרוש החדש של הנקודות R,Q,P. כמו במקרה הראשון רואים

כי $S_{ABP} = S_{BCQ} = S_{CAR} = \lambda\, S_{ABC}$. יש לנו כמו כן כי

$QY = (1-\lambda)\, PC = (1-\lambda)^2\, BC$ ולכן $\frac{PL}{LY} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$

ומכאן ש- $\frac{PL}{LY} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2+\lambda}$. מזה נובע כי

$$PL = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2 + \lambda}\, PY = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + \lambda}\, AP$$

ולכן

$$S_{BPL} = \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2 + \lambda}\, S_{ABC}$$

כמו כן

$$S_{ARN} = S_{CQM} = \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2 + \lambda}$$

אם נציב את כל ההערכות האלה ב-(1), נראה כי

$$\frac{S_{LMN}}{S_{ABC}} = 1 - 3\lambda + \frac{3\lambda^3}{(1-\lambda)^2 + \lambda}$$

$$= \frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda^2 - \lambda + 1} \qquad (4)$$

תוצאה המהווה הכללה של (3).

עכשיו נציג הוכחה שונה לגמרי של הנוסחה (3) אבל לצערנו לא מצאנו דרך להרחיב את ההוכחה הזאת לנוסחה (4) הכללית יותר. אנו יוצאים איפוא מ- $\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} = \frac{AR}{AB} = \frac{1}{3}$ וכצעד ראשון נוכיח כי $BL=LM$ (ראה ציור 1). למעשה קל מאד להוכיח את העובדה האחרונה הזאת ע"י הוכחה הנדסית טהורה ואת זה נשאיר כתרגיל לקורא. ניתן כאן הוכחה מבוססת על חשבון וקטורים כי השיטה טובה גם לבעיות מסובכות יותר. נסמן את הוקטור $\overline{BC}$ ב-γ ו-$\overline{BA}$ ב-α. אזי $\overline{BP} = \frac{1}{3}\gamma$, מאחר ש- Q מחלק את AC לפי היחס 2:1 יוצא כי

$$\overline{BQ} = \frac{2}{3}\,\overline{BC} + \frac{1}{3}\,\overline{BA} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\gamma) \qquad (5)$$

אבל $\overline{BL}$ הוא באותו כיוון כמו $\overline{BQ}$ ולכן $\overline{BL} = \frac{\lambda}{3}(\alpha+2\gamma)$ כשיש
עוד לקבע את המספר λ. אם נגדיר $\mu = \frac{AL}{AP}$, יש לנו

$$\begin{aligned}\overline{BL} &= \mu\overline{BP} + (1-\mu)\,\overline{BA} \\ &= \frac{1}{3}\mu\gamma + (1-\mu)\,\alpha \qquad (6)\end{aligned}$$

משתי ההצגות האלה של $\overline{BL}$ נובע כי $\frac{1}{3}\lambda(\alpha+2\gamma) = \frac{1}{3}\mu\gamma + (1-\mu)\alpha$
ולכן $\frac{1}{3}\lambda = 1-\mu$, $\frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{3}\mu$, ז.א. $\mu = \frac{6}{7}$, $\lambda = \frac{3}{7}$

ו- $\overline{BL} = \frac{1}{7}(\alpha+2\gamma)$

כמו כך אם נגדיר $\theta = \frac{BM}{BL}$, $\nu = \frac{CM}{CR}$ יהיה

$$\overline{BM} = \theta\overline{BL} = \frac{\theta}{7}(\alpha + 2\ )$$

וגם

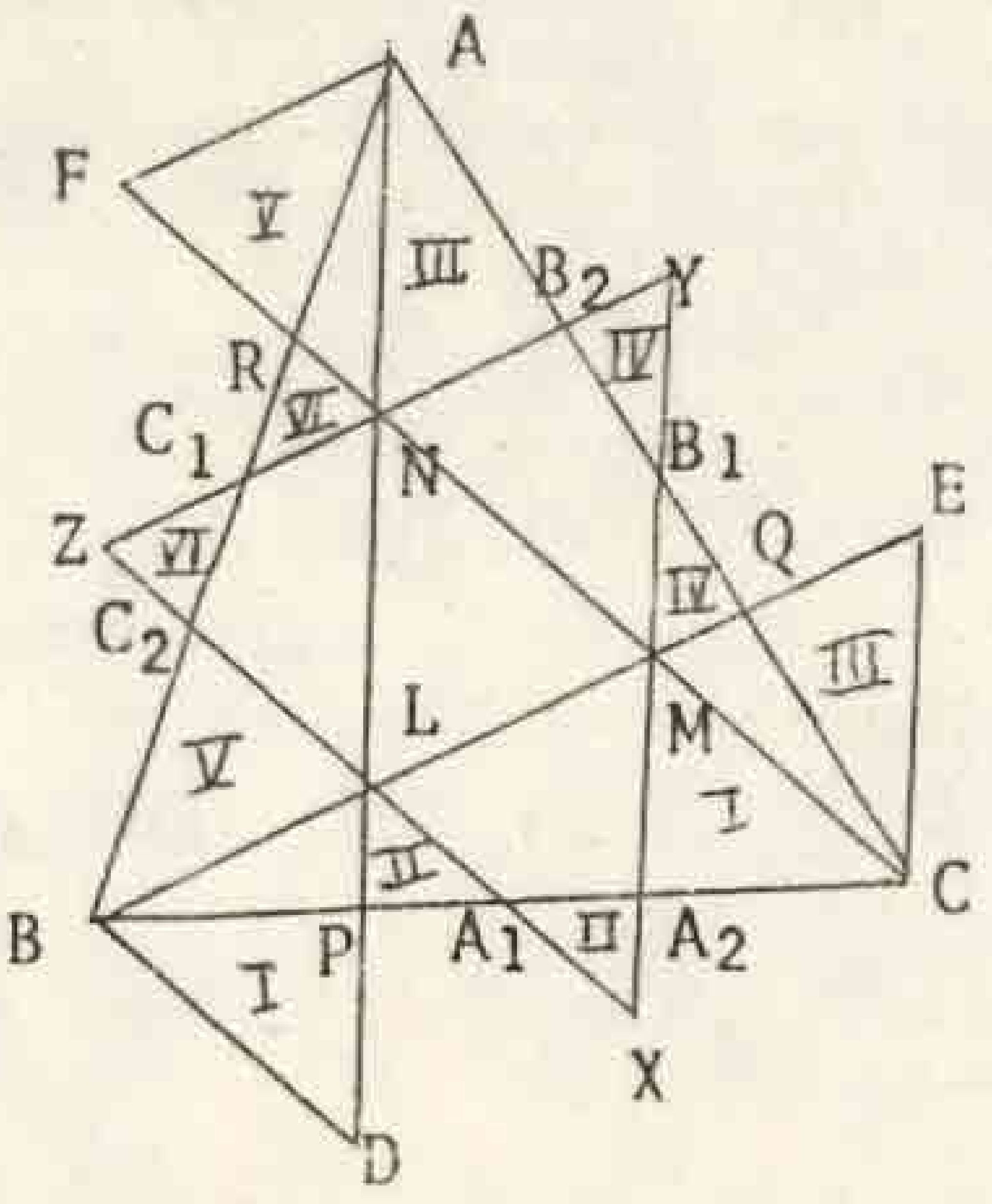
$$\begin{aligned}&= \nu \cdot \overline{BR} + (1-\nu)\,BC \\ &= \frac{2}{3}\nu\alpha + (1-\nu)\gamma\end{aligned}$$

ואם נזהה את שתי ההצגות האלה של $\overline{BM}$ נקבל $\theta = 2$, $\nu = \frac{4}{7}$ מכאן
$BM = 2 \cdot BL$ ולכן $BL = LM$. כמו כך $AN = NL$ ו- $MN = CM$.

אחרי שקבענו את העובדות האלה ניגש לבניה הבאה (ראה ציור 3) נמשוך קו ישר דרך L מקביל ל- MN, אחד דרך M מקביל ל- NL; ואחד דרך N מקביל ל- LM. שלשת הקווים האלה יוצרים את המשלש XYZ. עכשיו ניקח קו דרך B מקביל ל-MN שיפגש את AP ב- D; אחד דרך C מקביל ל- LN שיפגש את BQ ב- E; ואחד דרך A מקביל ל-LM שיפגש את CR ב- F. יהיו $A_1; A_2$ נקודות המפגש של XY, XZ עם BC; B_2, B_1 אלה של YZ, XY עם CA; ו- C_1, C_2 אלה של ZY, ZX עם AB. ראינו כבר כי

$$LM = BL$$

ולכן $PA_2 = BP = \frac{1}{3}BC$



ציור 3

ומכאן $A_2C = BP$. מזה אנו רואים כי המשולשים A_2CM, BPD חופפים, (ולכן סימננו את שניהם בציור 3 במספר I). אבל גם קל לראות כי כל ששת המשולשים BDL, LXM, CEM, MYN, AFN, NZL חופפים ל-LMN. יספיק איפוא אם נוכל להוכיח כי סכום שטחיהם של ששת המשולשים האלה ושל LMN שווה לשטח ABC, אבל דבר זה נובע מהחפיפות (ולכן השויון בשטח) בין זוגות המשולשים המסומנים ע"י אותו מספר רומי.

מדור מתקדם

על בעיה באלגברה

ש. רייך, הטכניון, חיפה

יהא נתון אסף G של אלמנטים $a,b,c,\ldots$ עם הפעולה המיחסת לכל זוג מסודר מביניהם a,b (לאו דוקא שונים) אלמנט c. נסמן את זה ע"י $[a, b] = c$.

האסף נקרא חבורה למחצה אם (א) כל $[a, b]$ שייך גם הוא ל-G, ואז אומרים גם ש-G קשיר לגבי הפעולה, ו-(ב) לכל a, b, c קיים $[a, [b,c]] = [[a,b],c]$ (ז.א. שהפעולה היא אסוציטיבית).

דוגמאות: (i) G_1 הוא אוסף המספרים הטבעיים ו- $[a,b]$ הוא הסכום $a + b$.

(ii) G_2 הוא אוסף המספרים הממשיים החיוביים ו- $[a,b]$ הוא ab.

(iii) G_3 הוא אוסף המספרים הטבעיים עם $[a,b]=b$.

(iv) G_4 הוא אוסף הנקודות במישור ו- $[a,b]$ הוא הנקודה האמצעית בין שתי הנקודות b,a.

(v) G_5 הוא אוסף המספרים השלמים ו- $[a,b] = a-b$.

בין הדוגמאות הנ"ל אנו רואים כי בכולן מוגדרת הפעולה $[a,b]$ המייחסת לכל זוג a,b של אלמנטים איבר שלישי אשר גם הוא שייך לאוסף. G_1, G_2, G_3 הם אסוציטיביים מאחר ש- $a + (b+c) = (a+b) + c$ עבור מספרים טבעיים a,b,c ; וכמו כן $a(bc) = (ab)c$ כש-a,b,c הם מספרים ממשיים כלשהם, וגם ב-G_3 $[[a,b], c] = [b,c] = c$, $c = [a,c] = [a,[b,c]]$. מאידך G_4 אינו אוסציטיבי מאחר שבדרך כלל

$a-(b-c) \neq (a-b)-c$ [אלא אם כן $c=0$], וכמו כן ב- G_5

$[[a,b],c] = a-b-c$, $[a,[b,c]]=a-b+c$; ולכן G_5, G_4 אינם חבורות למחצה.

אנחנו אומרים על חבורה למחצה שהיא קומוטטיבית אם, עבור כל a,b, $[a,b]=[b,a]$. אם נסתכל בדוגמאות דלעיל נראה כי G_1, G_2, G_3 הם קומוטטיביים בעוד ש- G_4 אינו קומוטטיבי. בהמשך נגביל את הדיון רק לאוספים אסוציאטיביים ולכן לא נתייחס בכלל למקרים כמו G_3.

האוסף ייקרא <u>חבורה</u> אם הוא חבורה למחצה ואם מתקיימים בו שני תנאים נוספים: -

(i) ישנו לפחות אלמנט אחד, e, באוסף המקיים $[e,a] = a$ עבור כל a של G. לאלמנט כזה נקרא יחידה שמאלית.

(ii) לכל a של G אפשר למצא לפחות אלמנט אחד, ההפוך של a, אשר נסמנו ב- a^{-1}, המקיים $[a^{-1},a] = e$, כש-e הוא יחידה שמאלית.

אוסף R של אלמנטים נקרא <u>חוג</u> אם קיימות בו שתי פעולות, $[a,b]$ ו- $\{a,b\}$ כך ש-

(i) R הוא חבורה קומוטטיבית לגבי הפעולה $[a,b]$,

(ii) R הוא חבורה למחצה לגבי הפעולה $\{a,b\}$

(iii) לכל 3 אלמנטים a,b,c של R קיים

$$\{a,[b,c]\} = [\{a,b\},\{a,c\}]$$

ו- $$\{[b,c],a\} = [\{b,a\},\{c,a\}]$$

במקרה כזה נוהגים לסמן $[a,b]$, $\{a,b\}$ ע"י $a+b$, ab בהתאמה, ומכנים אותם כ"חיבור" ו-"כפל". אבל יש להדגיש כאן כי זו רק שיטת סימון ואין לה קשר עם המושגים של חיבור וכפל, מה עוד כשהאלמנטים $a,b,c, \ldots$ אינם צריכים להיות בכלל גדלים מספריים.

לפי התנאי (i) יהיה אלמנט e כך ש- $a+e = e+a = a$ עבור כל a. את האלמנט הזה מסמנים ב-0. ההפוך של a לגבי "חיבור" מסמנים ב- $-a$, כך ש- $-a+a = a+(-a) = 0$. את $a + (-b)$ כותבים $a-b$. לכל a ב-R קיים $0 \circ a = a \circ 0 = 0$ (נשאיר את הוכחת העובדה הזאת לקורא).

החוג R ייקרא <u>שדה משפע</u> אם כל האלמנטים בו, פרט ל-0, מהווים חבורה לגבי הכפל. חבורה זו נקראת החבורה הכפלית של השדה המשפע. האוסף ייקרא סופי אם מספר האלמנטים בו סופי.

חזקות של אלמנט a בחבורה למחצה, בצורת כתיבה כפלית, מוגדרות באופן אינדוקטיבי ע"י $a^1=a$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$. קל להוכיח ע"י אינדוקציה מתוך שימוש בתכונת האסוציטיביות כי $a^s, a^t = a^{s+t}$ ו- $(a^s)^t = a^{st}$.

הבעיה

כאן נפתור את הבעיה הבאה שהופיעה כ- Advanced Problem 5462 בעתון American Mathematical Monthly בפברואר 1967, ושהוצעה ע"י W.A. McWorter:- להוכיח שחוג סופי הוא שדה אך ורק אם יש בו אלמנט אחד בלבד a המקיים $a^n = 0$ עבור n טבעי ולכל היותר 2 אלמנטים b,c המקיימים $b^2 = b$, $c^2 = c$.

הכרחיות:

(i) $0^n = 0$ עבור כל n טבעי (נובע מיד מהגדרת 0)

(ii) כל a השונה מ-0 שייך לחבורה הכפלית של השדה ולכן גם a^n עבור כל n טבעי. מכאן ש- $a^n \neq 0$ כי 0 אינו שייך לחבורה זו.

(iii) אם e הוא היחידה של החבורה הכפלית יש לנו $e^2=e$, קיים גם $0^2=0$ ונוכל לקחת $c=e, b=0$. יהיה d כל אלמנט שהוא המקיים $d^2=d$. עלינו להוכיח כי d שווה ל-0 או ל- e מ- $d^2=d$ נובע כי

$$(d-e) \cdot d = d^2 - ed = d - d = d + (-d) = 0$$

מאידך אם $d \neq 0$ וגם $d-e \neq 0$ אז גם d וגם d-e שייכים לחבורה הכפלית ולכן גם הכפל $(d-e) \cdot d$. אבל 0 אינו שייך לחבורה זו.

מספיקות

ראשית נוכיח כי כל חבורה למחצה סופית, G, מכילה לפחות איבר אחד המקיים $a^2=a$, וזאת ע"י אינדוקציה לגבי N, הוא מספר האיברים ב-G.

עבור N=1 הדבר מידי כי a הוא אז האיבר היחידי ולכן a^2 (השייך גם הוא ל-G) מוכרח להתלכד אתו. נניח עכשיו שהמשפט נכון עבור N ויהיה G חבורה למחצה בעלת N+1 איברים. יהיה b איבר של G, ונסתכל באוסף כל האלמנטים b^k עבור מספרים טבעיים $k \geqslant 2$. נקרא לו G'. האוסף G' גם הוא חבורה למחצה וכל איבריו שייכים ל- G. מכאן שמספר איבריו, נגיד f, מקיים $f \leqslant N+1$. אם b אינו שייך ל- G'

יהיה $N \leqslant f$ ולכן, לפי ההנחה האינדוקטיבית יהיה בו איבר a המקיים $a^2 = a$. אם b שייך ל-G' יהיה $b = b^k$ עבור איזה k טבעי גדול מ-1. אם $k > 2$ נוכל לכתוב

$$b^{k-1} = b\cdot b^{k-2} = b^k\cdot b^{k-2} = b^{2k-2} = b^{k-1}\cdot b^{k-1} = (b^{k-1})^2$$

ואז $a = b^{k-1}$ יהיה האלמנט המבוקש.

עכשיו נחזור לחוג שלנו.

א) אם החוג מכיל רק את האיבר 0 אזי ברור שהוא שדה. נניח איפוא בהמשך כי יש ב-G לפחות אלמנט אחד שונה מ- 0.

ב) מכיון ש- $0^n=0$ הרי לפי הנתון יוצא כי עבור $a \neq 0$ יהיה גם $a^n \neq 0$.

ג) אנו יודעים כי $0^2=0$. לכן לפי הנתון יימצא לכל היותר איבר אחד נוסף, $e \neq 0$, המקיים $e^2 = \ell$ עבור אלמנט y כלשהו. נסתכל באוסף של y^ℓ עבור כל ℓ טבעי וחיובי; האוסף הזה, G'', הינו חבורה למחצה. אבל כחלק של G הוא בהכרח סופי ולכן, בדומה לטיעון למעלה, אפשר לראות כי קיים k כך ש- $(y^k)^2 = y^k$. לפי הנתון יוצא כי $y^k = 0$ או $y^k = e$. אבל האפשרות הראשונה נופלת, גם כך לפי הנתון מאחר ש- $y \neq 0$. לכן קיים אמנם $e \neq 0$ כך ש- $x^2 = x$ ועבור כל $y \neq 0$ קיים מספר טבעי ℓ כך ש- $y^\ell = e$.

ד) עכשיו נוכיח כי עבור $a \neq 0$, $b \neq 0$ יהיה גם $ab \neq 0$. לשם זה נסתכל בחבורות למחצה $\{a^2, a^3, \ldots\}$ ו- $\{b^2, b^3, \ldots\}$. שתיהן סופיות (בתור קבוצות חלקיות של G) ולכן שוב יתקיימו מספרים טבעיים, $k \geqslant 2$ ו- $1 \geqslant 2$ כך ש- $(a^k)^2 = a^k$ ו- $(b^\ell)^2 = b^\ell$. מאחר ש- $a^k \neq 0$ $b^\ell = 0$ יוצא מ-(ג) כי $a^k = b^\ell = e$.

$$a^k b^\ell = a^{k-1}\cdot a\cdot b\cdot b^{\ell-1} = a^{k-1}\cdot ab\cdot b^{\ell-1} = 0$$

ומכאן הסתירה.

ה) ניקח את האיבר $e \neq 0$ המקיים $e^2 = \ell$ ויהיה a איבר כלשהו של G. יהיה $ea = x$. אז $ea = e^2a = ex$ ולכן $e(a-x) = ea-ex = 0$.

מכיון ש- $e \neq 0$ יוצא מ-(ג) ש-$a-x=0$, ז.א. $a=x$, ז.א. $ea=a$
ומכאן ש- e היא יחידה כפלית שמאלית.

ו) יהיה $a \neq 0$ איבר כלשהו של G (פרט ל-0) ונכפיל את כל איברי G (פרט ל-0) מימין ב-a. אם $ba=ca$ אז $(b-c)a = 0$ ומאחר ש- $a \neq 0$ אנו רואים מ-(ד) ש- $b \neq c$, ז.א. שהאיברים

$\{a^2, ba, ca, \ldots\ldots\}$ הם כלם שונים אחד מהשני ולכן הם כוללים בדיוק איברי G השונים מ-0. מכאן שקיים בדיוק איבר אחד, x, כך ש- $xa = e$, כלומר לכל $a \neq 0$ בחוג יש הפוך שמאלי.

ז) הוכחנו איפוא כי בתנאי הבעיה G הוא שדה משפע. אפשר להסיק שהוא שדה על פי משפט ידוע של Wedderburn האומר כי כל שדה משפע סופי הוא שדה. אבל הוכחת משפט זה מסבכת במקצת ונוותר עליה. הקורא המעונין יוכל למצא את ההוכחה כמעט בכל ספר על אלגברה מופשטת.

~~~~~~~~~~~~~~~

ההטלה הסטריאוגרפית

ד. ציילברגר (חולון)

כבר בימי קדם התעוררה הבעיה של מפוי חד-חד ערכי של פני הכדור, ובמיוחד בעית מפוי כדור הארץ על מפה מישורית.

כידוע אי אפשר להעתיק את פני הכדור על המישור באופן איסומטרי מדויק; כלומר לא נוכל לדרוש כי כל הגדלים (מרחקים, זויות, שטחים, וכו') והצורות יתאימו בדיוק למקור ללא סטיות, ומטרתנו צריכה להיות לצמצם את הסטיות האלה עד כמה שאפשר. עד עכשיו הוצעו כבר מספר רב של הטלות, כל אחת עם יתרונותיה וחסרונותיה. אחת מהן, ההטלה הסטריאוגרפית תשמש נושא למאמר זה.

<u>הגדרה</u>. אנו מניחים כדור על המישור xy של ההנדסה האנליטית וקוראים ל- 0, נקודת המגע של הכדור עם המישור, <u>הקוטב הדרומי</u>. לנקודה המנוגדת ל- 0, ז.א. לקצה השני של קוטר הכדור העובר דרך 0 קוראים <u>הקוטב הצפוני</u>. נסמן אותו ב- N. עכשיו יהיה P' נקודה כלשהי על שטח הכדור. נחבר NP' ונמשיך את הישר הזה עד שיפגוש את המישור ב- P. אומרים כי P על המישור הוא ההעתק הסטריאוגרפי של P' על מעטפת הכדור ולהיפך.

(המשך המאמר בעמוד 21)
~~~~~~~~~~~~~~~

מנהרות להובלה

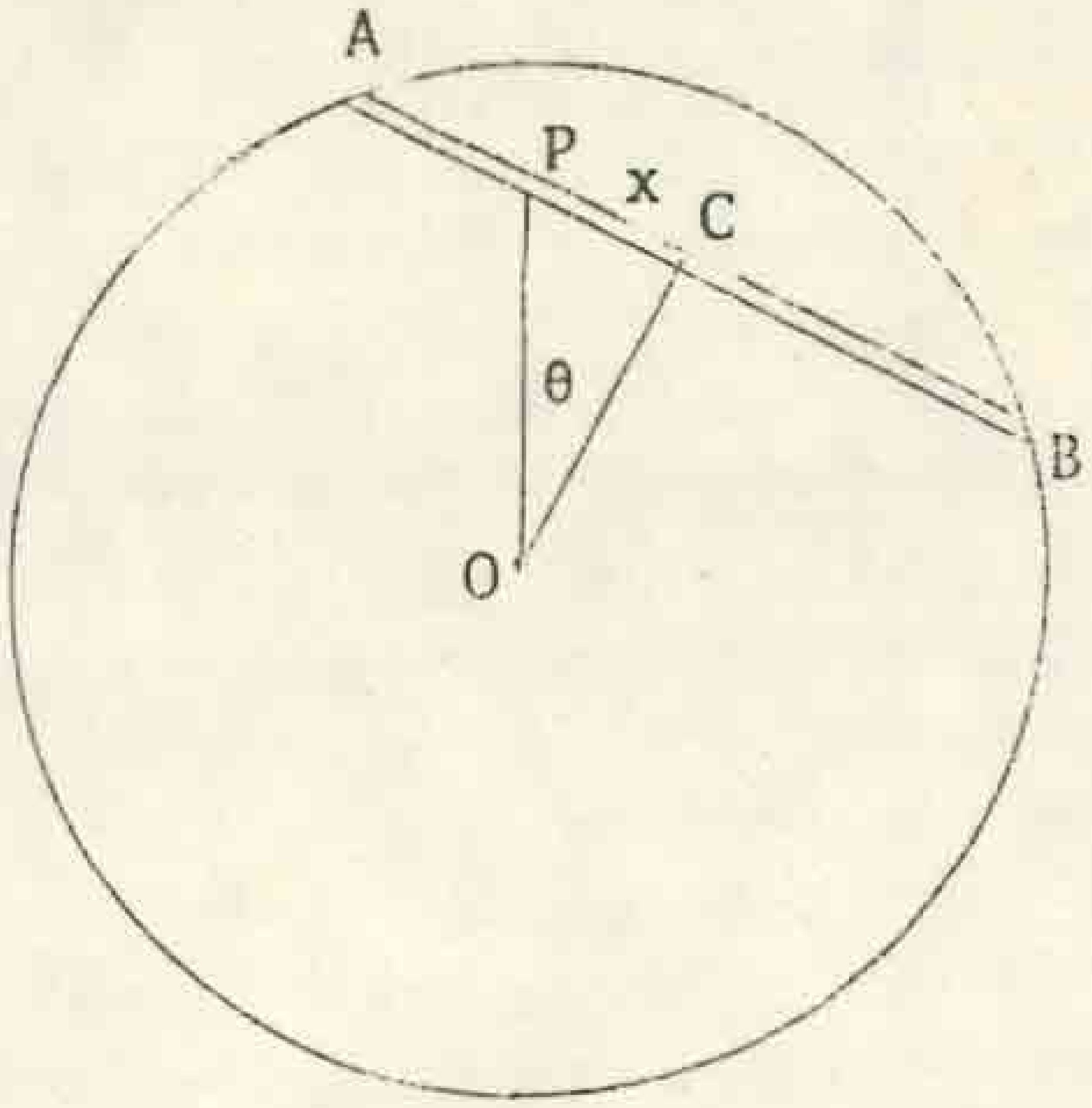
המאמר הזה מבוסס על כמה רעיונות מהפיסיקה ונבהיר אותם כבר בהתחלה כדי שגם אלה אשר עוד טרם הכירו את המושגים האלה יוכלו להבין את ההמשך. עם זה המושגים פשוטים למדי ומותר להניח כי אלה מבין הקוראים אשר לא הספיקו עדין ללמד אותם, יעשו את זה בקרוב.

א. תנועה הרמונית

אם חלקיק נע על קו ישר מסביב לנקודה מרכזית (הנמצאת גם היא על הקו) כך שתאוצת החלקיק לקראת המרכז עומדת ביחס קבוע למרחקו מהמרכז, אזי אנו אומרים כי החלקיק נע בתנועה הרמונית. תהיה האוצת החלקיק לקראת המרכז שווה ל- $x\mu$ ($\mu>0$) כשמרחקו מהמרכז הוא x . אזי החלקיק יבצע תנודות סביב המרכז וזמן כל תנודה שלמה יהיה $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, ללא קשר עם רוחב התנודה.

ב. כח הכבדות

אם נניח כי כדור הארץ הוא גוף הומוגני (בין השאר שצפיפות החומר אחידה בכל הכדור) אזי ימשוך כדור הארץ כל חלקיק הנמצא בתוכו לקראת המרכז בהקנותו לו תאוצה פרופורציונלית למרחקו מהמרכז. לכן אם a הוא הרדיוס של כדור הארץ ו- g התאוצה על השטח הרי במרחק r מהמרכז תהיה התאוצה $\frac{rg}{a}$.



הועלתה הצעה לחפר מנהרה ישרה בתוך כדור הארץ בין שתי נקודות B,A שעל שטחו (ראה ציור). הבה נבדק מה יקרה אם נכנס גוף קטן כלשהו, בעל מסה m , לתוך המנהרה ב- A ונתן לו "ליפול" עד B . יהיה C האמצע של AB ו- P נקודה במנהרה במרחק x מ- C. נסמן את מרכז כדור הארץ ב- O ויהיה θ הזוית $\sphericalangle COP$.

כשנמצא הגוף ב- P יפעל עליו כח $\frac{mg}{a}$ בכיוון PO. הרכיב של הכח OP. הזה בכיוון המנהרה יהיה OP sinθ $\frac{mg}{a}$, ז.א. $\frac{mgx}{a}$. יוצא מזה כי תאוצת הגוף במנהרה לקראת C היא $\frac{g}{a}x$ ולכן אנו עומדים בפני בעיה של תנועה הרמונית כש- $\mu = \frac{g}{a}$. לפי האמור לעיל יהיה הזמן של מחזור שלם, דהיינו תנועת הגוף מ- A ל- B וחזרה ל- A בדיוק $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. מכאן שהזמן הדרוש להעברת הגוף מ- A ל- B, שזה חצי מחזור, יהיה $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

אם נקח את המטר כיחידת אורך והשניה כיחידת זמן יש לנו

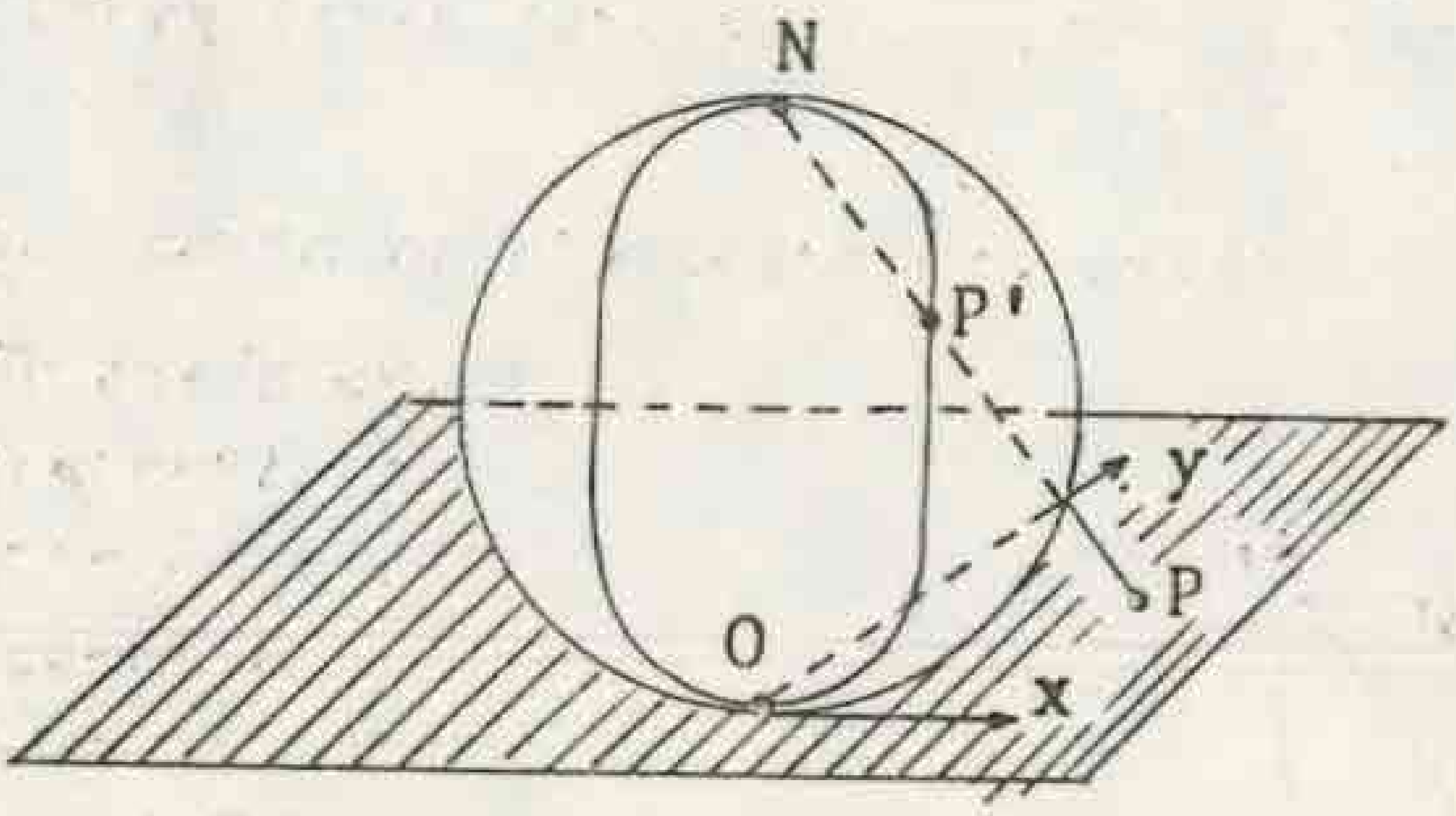
$a = 6.357\text{x}10^6$, $g = 9.8$, יצא עבור הזמן 2529 שניות, שהן כ-42 דקות. המענין בתוצאה הוא שהזמן הזה אינו תלוי ב- A או ב- B, והוא הזמן שידרש איפוא להעביר גוף דרך מנהרה ישרה וחלקה בין כל שתי נקודות על כדור הארץ. למען הדיוק יש להדגיש כי כל החישוב הזה מבוסס על ההנחה שצפיפות כדור הארץ אחידה. מאחר שהנחה זו ידועה כבלתי נכונה לחלוטין נשארת רק תגובה אחת אפשרית על כל ההצעה והיא: חבל שהדבר אינו מעשי!

~~~~~~~~~~~~~~~~~~

ההטלה הסטריאוגרפית

(המשך המאמר מעמוד 19)

אנו רואים מיד מההגדרה כי מפוי זה הוא חד-חד ערכי, גם נוכל לראות בקלות כי אזורי הכדור הסמוכים לקוטב הדרומי לא יסטו בהרבה מעותקם במישור, ואילו אזורים הסמוכים לקוטב הצפוני יעברו סטיה ניכרת.



נוכיח כי ההטלה הסטריאוגרפית היא מעגלית ואיסוגונית. התכונה הראשונה פרושה שכל מעגל על פני הכדור מועתק למעגל או לקו ישר על המישור ולהיפך; והשניה פרושה כי כל שני עקומים במישור נחתכים באותה זוית כמו העתקיהם על פני הכדור.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

<u>משפט 1</u>. כל ישר במישור מועתק למעגל העובר בקוטב הצפוני.

<u>הוכחה</u>. הישר a והקוטב הצפוני N יוצרים מישור המכיל את כל הקרניים היוצאות מ-N לנקודות הישר a ולכן יכיל המישור הזה את כל נקודות ההעתק. אבל המישור חותך את הכדור ויוצר על מעטפתו מעגל העובר דרך N.

<u>משפט 2</u>. הזוית בין שני ישרים a ו-b במישור שווה לזו בין מעגלי העתקיהם a' ו- b' (על פני הכדור).

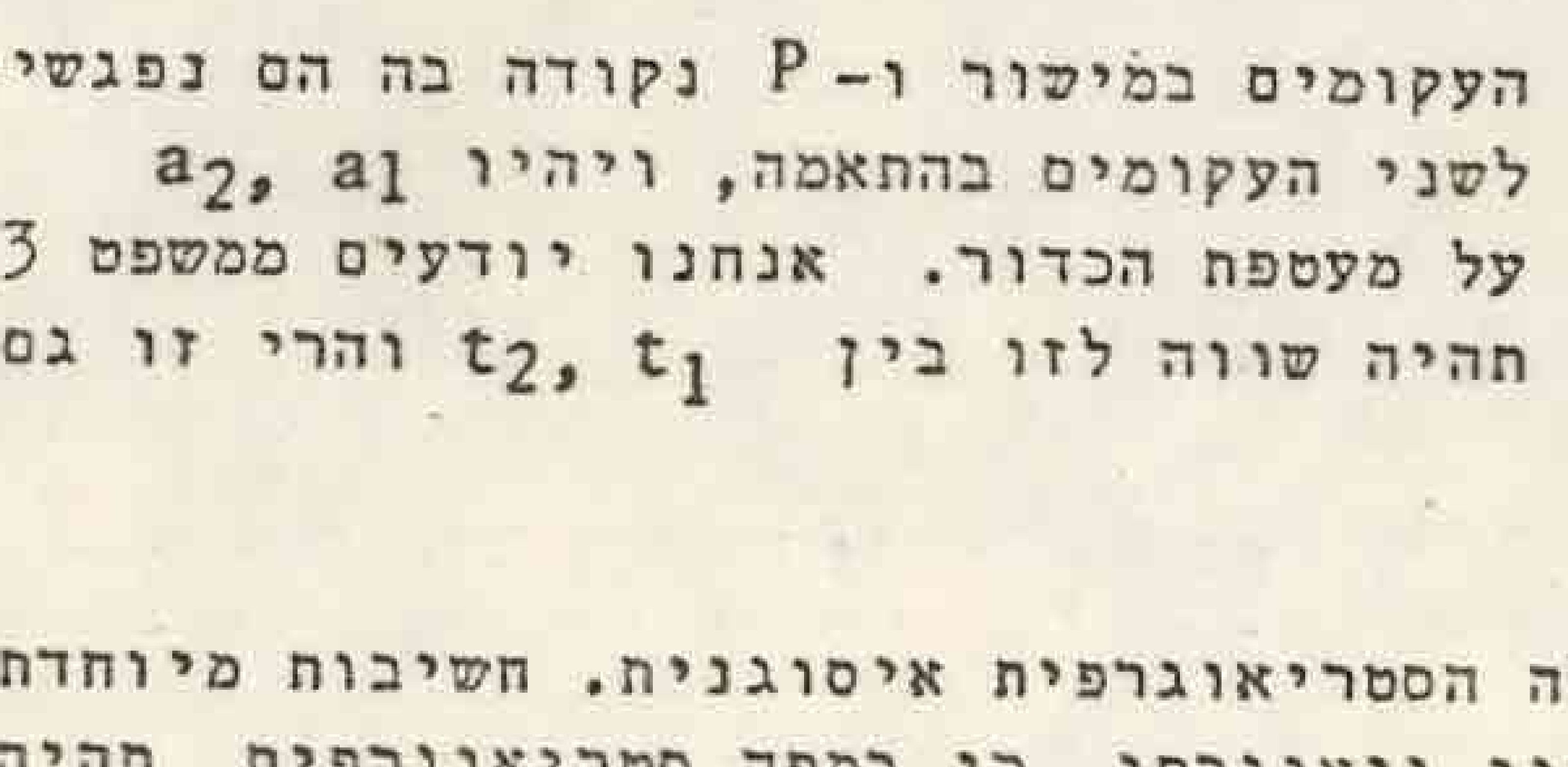
<u>הוכחה</u>. תהיה P נקודת המפגש של a ו-b במישור, ו- P' ההעתק של P על הכדור. אזי a' ו- b' ייפגשו ב- P' וגם ב- N, וברור כי הזוית ביניהם ב- P' שווה לזו ב- N. יהיה α המשיק ל-a' ב-N ו- β המשיק ל-b'. מאחר שכל המשיקים ב- N מקבילים למישור xy יוצא כי גם α מקביל למישור זה. מאידך קל לראות כי α ו- a נמצאים במישור אחד ולכן יהיו מקבילים אחד לשני. כמו כן רואים כי β מקביל ל- b, והמשפט נובע מיד.

<u>משפט 3</u>. שני עקומים במישור נחתכים בזוית שווה לזו שנחתכים העתקיהם על מעטפת הכדור.

<u>הוכחה</u>. יהיו R_1, R_2 העקומים במישור ו- P נקודה בה הם נפגשים. נעביר ב- P משיקים t_1, t_2 לשני העקומים בהתאמה, ויהיו a_1, a_2 ההעתקות של t_1, t_2 בהתאמה על מעטפת הכדור. אנחנו יודעים ממשפט 3 כי זוית החיתוך של a_1, a_2 תהיה שווה לזו בין t_1, t_2 והרי זו גם הזוית בין R_1 ל-R_2.

הוכחנו איפוא כי ההטלה הסטריאוגרפית איסוגנית. חשיבות מיוחדת נודעת לתכונה זו בקשר למיפוי גיאוגרפי, כי במפה סטריאוגרפית תהיה הזוית בין שני קווים הרריים, או בין יובל של נהר לנהר בנקודת המפגש שלהם, שוות בדיוק לזוית הפיסיקלית. עכשיו נוכיח: -

<u>משפט 4</u>. ההטלה הסטריאוגרפית היא מעגלית.



ניקח P נקודה כלשהי במישור עם קואורדינטות (x,y). נעביר גם ציר של z מ- O בכוון N. במערכת התלת-ממדית תהיינה הקואורדינטות של P $(x, y, 0)$. הישר NP פוגש את מעטפת הכדור ב-P', ויהיו (ξ, η, ζ) הקואורדינטות של P'.

נחבר 'OP ויהיה P'Q ניצב ל- ON , אזי $OQ = \zeta$. נגדיר $OP = p$, $QP' = p'$. נגדיר $ON = 2R$ (הגדרת הרדיוס R של הכדור). מאחר שהזוית $OP'N$ היא של 90° יש לנו כי המשולשים $PNO, P'NQ, OP'Q$ NOP' כולם דומים אחד לשני ולכן יש לנו

$$\frac{QP'}{NQ} = \frac{OP}{NO} = \frac{OQ}{QP'}, \text{ ז.א. } \frac{\zeta}{p'} = \frac{p}{p'} = \frac{p'}{2R-\zeta}$$ ומכאן מתקבל ש-

$$pp' = 2R\zeta \quad \text{ו-} \quad \zeta = \frac{2R\,(p-p')}{p}$$

ולכן
$$p' = \frac{4R^2p}{4R^2 + p^2}, \quad \zeta = \frac{2Rp^2}{4R^2 + p^2}$$

אבל ברור כי $\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{p'}{p}$ ולכן יש לנו

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{4R^2}{4R^2 + x^2 + y^2}$$

$$\zeta = \frac{2R\,(x^2 + y^2)}{4R^2 + x^2 + y^2}$$

אבל אם המקום של P הוא מעגל תתקיים השוואה בצורת

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

כש- f, g, c קבועים. אבל מהנוסחאות דלעיל נובע כי

$$x^2 + y^2 = \frac{4R^2\zeta}{2R-\zeta}$$

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = 1 + \frac{\zeta}{2R-\zeta} = \frac{2R}{2R-\zeta}$$

ולכן
$$\frac{4R^2\zeta}{2R-\zeta} + \frac{4R\,(g\xi+f\eta)}{2R-\zeta} + c = 0$$

ז.א.
$$4Rg\xi + 4Rf\eta + (4R^2-c)\zeta + 2RC = 0$$

אבל זו משוואה של מישור והנקודה 'P נמצאת על עקומת המפגש בין מישור זה ומעטפת הכדור, ז.א. על מעגל.

מ.ע.ל.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים: -

1) לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס).
2) להשתמש רק מצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3) למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ- 29.2.68.
4) לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגרים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לבעיה.

השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט׳ ו-י׳ לבד (אין פרוש הדבר שהן קלות).

ת.316 (2) ארבעה חלקיקים שווים נמצאים על היקף של מעגל ומרכז הכובד שלהם הוא במרכז המעגל. להוכיח כי החלקיקים נמצאים בקדקדים של מלבן.

ת.317* (3) הוכח כי $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ מתחלק ע"י $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

ת.318* (3) α,β,γ הם מספרים שלמים בלתי שליליים המקיימים

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 30(\alpha+\beta+\gamma) = (\alpha+\beta+\gamma)^3$$

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 11$$

למצוא את α, β, γ (הוצע ע"י אריה יוהם)

ת.319 (3) הוכח כי אם כל שרשי המשוואה

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

הם ממשיים וחיוביים אזי

$$\frac{p_1\, p_{n-1}}{p_n} > n^2$$

מתי יתקיים שויון? (הוצע ע"י אריה יוהם).

ת.320 (3) הנקודות K, L, M, N נמצאות בפיאות ABC, ABD, ACD, BCD בהתאמה של הטטראדר ABCD, כך שהקווים הישרים AK, BL, CM, DN עוברים כלם דרך הנקודה 0 .

הוכח כי
$$\frac{OK \cdot OL \cdot OM \cdot ON}{AK \cdot AL \cdot AM \cdot AN} \leq \frac{1}{256}$$
(הוצע ע"י עדו שמר)

ת.321* (2) פשט את הנוסחה

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\ \ldots\ldots\ \cos\frac{\alpha}{2^n}$$

ת.322* (4) אנו רוצים לכתב במקומות השלישי והחמישי של המספר 3,000,003 ספרות במקום האפסים, כך שיצא לנו מספר שמתחלק ב-13. איך אפשר לעשות את הדבר? בכמה אופנים ניתן הדבר להיעשות?

ת.323* (4) נתונים קו ישר s ושני מעגלים α, β הכל במישור אחד, לבנות ריבוע אשר שני קדקדים מנוגדים שלו יימצאו על s, ומהשנים הנותרים יהיה אחד על α והשני על β, הוכח כי מספר הפתרונות יכול להיות אחד או שנים או שבכלל לא יתקיים פתרון, הכל לפי הנסיבות.

ת.324 (2) D,C,B,A הם קדקדי מרובע החסום במעגל ו- DA,CD,BC,AB הם d,c,b,a בהתאמה. הוכח כי

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{b^2 - c^2 - d^2 + a^2} = \frac{\tan B}{\tan A}$$

ת.325* (4) כשנתונות ארבע נקודות במישור שאינן נמצאות על מעגל אחד, הוכח כי אפשר תמיד לבחור שלוש מביניהן כך שהמעגל העובר דרך השלוש יכלול בתוכו את הרביעית.

ת.326* הוכח כי, עבור כל מספר טבעי n, או n^{100} או $n^{100}-1$ מתחלק ב-125.

ת.327* ראובן ושמעון היו שותפים בשוק ומכרו n ראשי צאן וקבלו עבור כל אחד בדיוק n ל"י. התמורה נמצאה כלה בידי ראובן בשטרות של 10 ל"י ושל ל"י אחת כשמספר השטרות של ל"י אחת היה קטן מ-10. כדי לחלק את התמורה לקח ראובן שטר של 10 ל"י לעצמו, נתן אחד לשמעון, שוב אחד לעצמו, שוב אחד לשמעון, וכו' והשטר האחרון נפל בחלקו של ראובן. את כל הלירות הבודדות נתן לשמעון. איזה מהשנים קבל יותר מחברו וכמה היה ההפרש?

ת.328* (3) נתון כי
$$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots(1+c^Nx) = 1+A_1x+A_2x^2\ldots+A_Nx^N$$

הוכח כי

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{c^m - c^{N+1}}{1 - c^m} \quad (m = 1,2,\dots,N)$$

הוכח גם כי אם $|c| < 1$ אזי

$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\dots\dots$ (עד אין סוף)

$$= 1 + \frac{c}{1-c}x + \frac{c^3}{(1-c)(1-c^2)}x^2 \dots + \frac{c^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-c)(1-c^2)\dots(1-c^n)}x^n + \dots$$

ת.329 (4) קו ישר פוגש את הצלעות AB,CA,BC של המשולש ABC ב-N,M,L בהתאמה. BM ו- CN נפגשים ב- P; CN ו- AL ב- Q; AL ו- BM ב- R, הוכח כי CR,BQ,AP עוברים דרך נקודה אחת.

ת.330 (4) הוכח כי כאשר x,y,z הם מספרים חיוביים ראציונליים קיים

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z$$

עם שויון אך ורק כש- $x=y=z$.

פתרון הבעיות ת. 286 - 299

ת.286 $2222 = 7\cdot317 + 3$ ו- $5555 = 7\cdot793 + 4$, ולכן

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \pmod 7$$

אבל $3^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod 7$ ולכן

$$3^{5555} + 4^{2222} = 3^{6\cdot925+5} + 4^{6\cdot370+2}$$

$$\equiv 3^5 + 4^2 = 259 \equiv 0 \pmod 7)$$

ת.287 קיים $m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4m^4n + 12n^5$

$$= (m-n)(m+n)(m-2n)(m+2n)(m+3n)$$

אבל הגורמים של 33 הם רק 3, ו-11 ולכן לא תוכל הנוסחה להיות 33 אם חמשת הגורמים יהיו שונים אחד מהשני בערכם המוחלט. קל לברר כי אמנם אין שנים שווים; לדוגמא: -

$m+n = m-n$ היה גורר $n = 0$ ולכן $m^5 = 33$, מה שבלתי
אפשרי, או $m - n = -(m+2n)$ היה גורר $2m = -n$ ואז
$33 = -225m^2$.

ת.288 מתוך שלושת המספרים העוקבים $8p-1, 8p, 8p+1$ מוכרח אחד להתחלק ב-3 אבל $8p+1$ הוא ראשוני $(3 \neq -1)$. אם $p \neq 3$ אזי גם $8p$ לא יוכל להתחלק ב-3 ומכאן ש- $8p + 1$ יתחלק ב-3. במקרה $p = 3$ יש לנו $8p+1 = 25$.

ת.289 הרבוע של מספר זוגי מסתיים בספרה זוגית. למספר אי-זוגי תהיה אחת הצורות $10n + r$ $(r = 1,3,5,7,9)$.

$$(10n+1)^2 = 100n^2+20n+1, \quad (10n+3)^2 = 100n^2+60n+1$$

$$(10n+5)^2 = 100n(n+1)+25, \quad (10n+7)^2 = 100n(n+1)+40(n+1)+9$$

$$(10n+9)^2 = 100n(n+1) + 80(n+1) + 1$$

ברור כי בכל אלה ספרת העשר זוגית.

ת.290 יהיה x מספר המשתתפים מכיתה יא' ו- $10x$ מכיתה יב'. המספר הכללי של נקודות שווה למספר הכללי של משחקים, ז.א. $\frac{11x\,(11x-1)}{2}$. מאלה קבלה כתה יא' $\frac{11x\,(11x-1)}{2} \cdot \frac{2}{11}$, ז.א. $x\,(11x-1)$.
מהמשחקים בין תלמידי כיתה יא' לבין עצמם קבלה כיתה זו $\frac{x\,(x-1)}{2}$ נקודות. כלל מספר הנקודות ממשחקים בין תלמידי כיתה י' לאלה מ-יב' הוא $10x^2$ ולכן

$$x\,(11x-1) \leqslant \frac{x\,(x-1)}{2} + 10x^2$$

ז.א. $x < 1$. מכאן ש- $x = 1$.

ת.291 $x^{10} + x^5 + 1 = \frac{x^{15}-1}{x^5-1}$. אבל $x^n = 1$ כש- $x = e^{\frac{2r\pi i}{n}}$ ולכן שרשי המשוואה $x^{10} + x^5 + 1 = 0$ הם המספרים המורבים $z_r = e^{\frac{2r\pi i}{15}}$, כש- $r = 1,2,4,5,7,8,10,11,13,14$.

אבל $z_{15-r} = z_r$ ולכן

$$(x-z_r)(x-z_{15-r}) = x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{15} + 1$$

מכאן נובע ש-

$$x^{10}+x^5+1 = (x^2-2x\cos\frac{2\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{8\pi}{15}+1)$$
$$(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{3}+1)(x^2-2x\cos\frac{14\pi}{15}+1)$$
$$= (x^2+x+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{15}+1)$$
$$(x^2-2x\cos\frac{8\pi}{15}+1)(x^2-2x\cos\frac{14\pi}{15}+1)$$

ת.292 $\frac{1}{\log_2\pi} + \frac{1}{\log_5\pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > 2$

מאחר ש- $\pi^2 < 10$.

ת.293 נכתב $a = \frac{1}{2}(1+x)$, $b = \frac{1}{2}(1-x)$ כש- $0 < x < 1$.

אזי .
$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4$$
$$= (a+b)^2 - 2ab + \frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2} + 4$$
$$= 5 - 2ab + \frac{1-2ab}{a^2b^2}$$

אבל .
$$ab = \frac{1}{4}(1-x^2) \leqslant \frac{1}{4}$$

ולכן $1 - 2ab > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a^2b^2} \geqslant 16$

ומכאן $5 - 2ab + \frac{1-2ab}{a^2b^2} \geqslant 5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 16$

$$= \frac{25}{2}$$

שויון יתקיים אך ורק כש- $ab = \frac{1}{4}$, ז.א. $x = 0$, $a = b = \frac{1}{2}$.

ח.294

$$101^n - 99^n = (100)^n \{(1+\frac{1}{100})^n - (1-\frac{1}{100})^n\}$$

$$= 2 \cdot (100)^n \{\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{100} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{100^3} + \ldots\}$$

דרוש כי

$$\geq \frac{n}{50}(100)^n$$

ולכן עבור $101^n < 100^n + 99^n$ דרוש כי $\frac{n}{50}(100)^n \leq 100^n$,

ז.א. $n < 50$. נוכל איפוא להגביל את החיפוש לתחום $n < 50$.

מאידך רואים כי

$$F_n = 101^n - 99^n - 100^n = (100)^n \{2[\binom{n}{1}\frac{1}{100}+\binom{n}{3}\frac{1}{100^3}+\ldots]-1\}$$

והפונקציה הזאת הולכת וגדלה עם n . קל לאשר כי $F_{49} > 0$ ו- $F_{48} < 0$, ואפשר לחשב את הערך הקריטי מתוך טבלאות של לוגריתמים.

ח.295

$$x_2 - x_4 = (x_1+x_2)-(x_1+x_4) = \alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)$$

וכמו כן

$$x_2 - x_4 = (x_2+x_3)-(x_3+x_4) = \alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)$$

מכאן שאם קיים פתרון, אזי יהיה $\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4) = \alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)$,

ולכן <u>או</u> $\alpha_2 = \alpha_4$ <u>או</u> $\alpha_1 = \alpha_3$ (A)

כמו כן <u>או</u> $\alpha_1 = \alpha_4$ <u>או</u> $\alpha_2 = \alpha_3$ (B)

ו- <u>או</u> $\alpha_1 = \alpha_2$ <u>או</u> $\alpha_3 = \alpha_4$ (C)

מתוך כל זוג (A), (B), (C) מוכרח להתקיים לפחות אחד מתוך שני התנאים, דבר שייתכן אך ורק אם שלושה מתוך $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שווים אחד לשני. במקרה ש- $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ רואים כי

$$x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = \alpha_1^2$$

ו-

$$x_1 + x_4 = \alpha_1\alpha_4$$

ולכן $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}\alpha_1^2$, $x_4 = \alpha_1(\alpha_4-\frac{1}{2}\alpha_1)$.

ת.296 כשמגיע הקשר למצב מנוחה יהיו הכוחות האופקיים הפועלים עליו בדיוק המתחים בשלשה החוטים. אבל מתחים אלה שווים זה לזה מאחר שהמשקלות שוות, ולכן לא יהיה איזון אע"כ הזוית בין כל זוג של חוטים בקשר תהיה של $120°$.

ת.297 אנחנו יכולים להסתמך על העובדה הידועה כי

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

ולכן
$$AA'^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$$

מכאן ש-
$$PP'^2 = \frac{1}{4}(2PQ^2 + 2PR^2 - QR^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2CC'^2 + 2BB'^2 - AA'^2)$$

$$= \frac{1}{4}\{2[\frac{1}{4}(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2) + \frac{1}{4}(2BA^2 + 2BC^2 - CA^2)] - \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)\}$$

$$= \frac{1}{8}\{(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2) + (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) - \frac{1}{2}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)\}$$

$$= \frac{9}{16} BC^2$$

$$PP' = \frac{3}{4} BC$$

ת.298 נכתוב
$$S = \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos r x}{(n-r)!(n+r)!}$$

אזי
$$e^{-inx}(e^{ix} + 1)^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r} e^{(r-n)ix}$$

$$= e^{-inx} + \binom{2n}{1} e^{-i(n-1)x} + \binom{2n}{2} e^{-i(n-2)x} + \dots + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} e^{ix} + \binom{2n}{n+2} e^{2ix} \dots + e^{inx}$$

$$= 2\ \{\cos nx + \binom{2n}{1}\cos(n-1)x + \binom{2n}{2}\cos(n-2)x + \dots\} + \binom{2n}{n}$$

$$= (2n)!\ \{2S + \frac{1}{(n!)^2}\}$$

מכאן נובע כי

$$(2n)!\ \{2S + \frac{1}{(n!)^2}\} = (e^{\frac{1}{2}ix} + e^{-\frac{1}{2}ix})^{2n}$$

$$= 2^{2n} \cos^{2n} \frac{x}{2}$$

ולכן $$S = \frac{2^{n-1}}{(2n)!} \cos^{2n} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n!)^2}$$

<u>ת.299</u> עבור כל זוית θ קיים $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$,
$\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)$.

נכתוב $\alpha = \frac{\pi}{n}$

ואז

$$S = \sum_{r=1}^{4} \cos^4 r\alpha$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{r=1}^{n} [3 + 4\cos 2r\alpha + \cos 4r\alpha]$$

$$= \frac{1}{8}[12 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos\alpha - 4\cos 3\alpha - \cos 3\alpha - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha]$$

(בהסתמך על $\cos(9 \pm r)\alpha = -\cos\alpha$)

ולכן $$S = \frac{1}{8}[12 - 5\cos\alpha + 5\cos 2\alpha - 5\cos 3\alpha + 5\cos 4\alpha]$$

$$= \frac{1}{8}[12 - 5(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)]$$

$$= \frac{1}{8}\{12 - \frac{5}{2\sin\alpha}[\sin 2\alpha + (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) + \dots + (\sin 8\alpha - \sin 6\alpha)]\}$$

$$= \frac{1}{8}\{12 - \frac{5 \sin 8\alpha}{2 \sin \alpha}\}$$

$$= \frac{1}{8}\{12 - \frac{5}{2}\} \qquad (\sin 8\alpha = \sin \alpha \text{ כי})$$

$$= \frac{19}{16}$$

אולי יהיה מעניין לראות דרך שניה להוכיח אותה תוצאה. נצא מ-

$$\cos 9\theta + i \sin 9\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^9$$

ולכן $\sin 9\theta$ שווה לחלק המדומה של $(\cos\theta + i\sin\theta)^9$.

לפי משפט הבינום יש לנו איפוא ש-

$$\sin 9\theta = 9 \sin\theta \cos^8\theta - 84 \sin^3\theta \cos^6\theta + 126 \sin^5\theta \cos^4\theta - 36 \sin^7\theta \cos^2\theta + \sin^9\theta$$

ולכן

$$\frac{\sin 9\theta}{\sin\theta} = 9\cos^8\theta - 84\cos^6\theta(1-\cos^2\theta) + 126\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 36\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)^3 + (1-\cos^2\theta)^4$$

$$= 256 x^8 - 448 x^6 + 240 x^4 - 40 x^2 + 1$$

כשכתבנו $x = \cos\theta$. אבל $\frac{\sin 9\theta}{\sin\theta}$ מתאפס כש- $\theta = \frac{r\pi}{9}$

$(r = 1,2,\dots,8)$ ולכן $x_r = \cos\frac{r\pi}{9}$ הם שרשי הפולינום

$$F(x) = 256 x^8 - 448 x^6 + 240 x^4 - 40 x^2 + 1$$

מאחר ש- $x_{9-r} = -x_r$ אנו רואים כי שרשי $F(x)$ הם למעשה

x_1, x_2, x_3, x_4, נכתב $y = x^2$ ואז שרשי המשוואה

$$256 y^4 - 448 y^3 + 240 y^2 - 40 y + 1 = 0$$

יהיו בדיוק $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$. מכאן ש-

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 - 2\Sigma x_i^2 x_j^2$$

$$= \left(\frac{448}{256}\right)^2 - 2\left(\frac{240}{256}\right)$$

$$= \frac{19}{16}$$

רשימת פותרי השאלות מס. 286 - 299

(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

אברבוך דוד	י"א	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(4)
אטלס שלמה	י"ב	תיכון, חדרה	(12)
איתן חנן	י'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(3)
אליאס אורי	י"ב	בי"ס ריאלי, חיפה	(39)
בהגן יוסף	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(28)
בודנשטין יהודה	י"ב	בי"ס מקצועי ליד הטכניון, חיפה	(15)
בן-ישראל יצחק	י"ב	גמנסיה הרצליה, תל-אביב	(37)
גולדהירש יצחק	י"ב	תיכון, נצרת-עיליה	(23)
גייזלר דן	י"א	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(22)
גיליס אורגד	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(20)
גרצ'יק שבתאי	י"א	בית חינוך תיכון, חיפה	(40)
גרש אגון		צ.ה.ל.	(21)
הברמן אהוד	י'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(6)
הופר חיים	י'	ישיבת מרום-ציון, ירושלים	(3)
הראל יהודה		צ.ה.ל.	(8)
הראל צבי	י"ב	בי"ס ריאלי, חיפה	(42)
הרס סרג'יו	י"ב	תיכון עירוני "כל ישראל חברים", תל-אביב	(41)
וייסלברג דוד	י"ב	גמנסיה עבריה, ירושלים	(19)
ויסמן יצחק	י"ב	תיכון עירוני חדש, חולון	(15)
זמל עמוס	י"ב	גמנסיה עבריה, ירושלים	(36)
חביב חיים		צ.ה.ל.	(17)
טוכמן אלי	י"א	בית ספר ריאלי, חיפה	(7)
מאיר גד	י'	בית ספר ריאלי, חיפה	(23)
מגבי שלמה	י"ב	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(39)
מנדלבאום יצחק	י"ב	גמנסיה עבריה, ירושלים	(22)
מס דניאל	י"ב	תיכון עירוני ג', תל-אביב	(3)
נחליאל ישראל	י"ב	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(28)
סגל מרדכי	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(29)
סטשבסקי שמואל	י'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(3)
סופרמן זיו	י'	גמנסיה רחביה, ירושלים	(36)
עזוז אמנון	י"ב	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(28)
פליקס שלומית	י"ב	בי"ס מעלה, ירושלים	(31)
פמש רפאל	י"ב	תיכון עירוני א', תל-אביב	(41)
פקרצ'יק צבי	י"ב	גמנסיה הרצליה, תל-אביב	(33)
פרנס אלכסנדר	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(22)
ציילברגר דורון		תל-אביב	(34)
קורנברג יוסף	י"ב	בי"ס ע"ש טשרניחובסקי, נתניה	(11)
קליין אמריך	י'	בי"ס ע"ש טשרניחובסקי, נתניה	(30)
קרשנר דוד	י"א	בית ספר ריאלי, חיפה	(25)
רזניק גבי		צ.ה.ל.	(13)
ריבק ארז	י"ב	בית ספר ריאלי, חיפה	(11)
רייכמן אריה	י"א	תיכון עירוני א', תל-אביב	(36)
שוחט חיים	י"ב	בית ספר אהל-שם, רמת-גן	(33)
שושן איתמר		צ.ה.ל.	(24)
שיינינגר אורי	י"א	בית ספר ריאלי, חיפה	(26)
שילה יוסף	י"ב	תיכון עירוני א', תל-אביב	(40)
שמר עדו		ירושלים	(32)
שנברג יצחק	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(34)
שנורמן דוד		חיפה	(5)
שריר מיכה	י"ב	תיכון ע"ש קוגל, חולון	(40)

-8 I 68 REHOVOT

ישראל ISRAEL =0.18 דמי דואר שולמו א 425

277 לכבוד

מר פרוכסמן משה

~~קבוץ סנן~~ שבולת שלום 9

~~ד.נ. הנגב~~

רמת השרון

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.