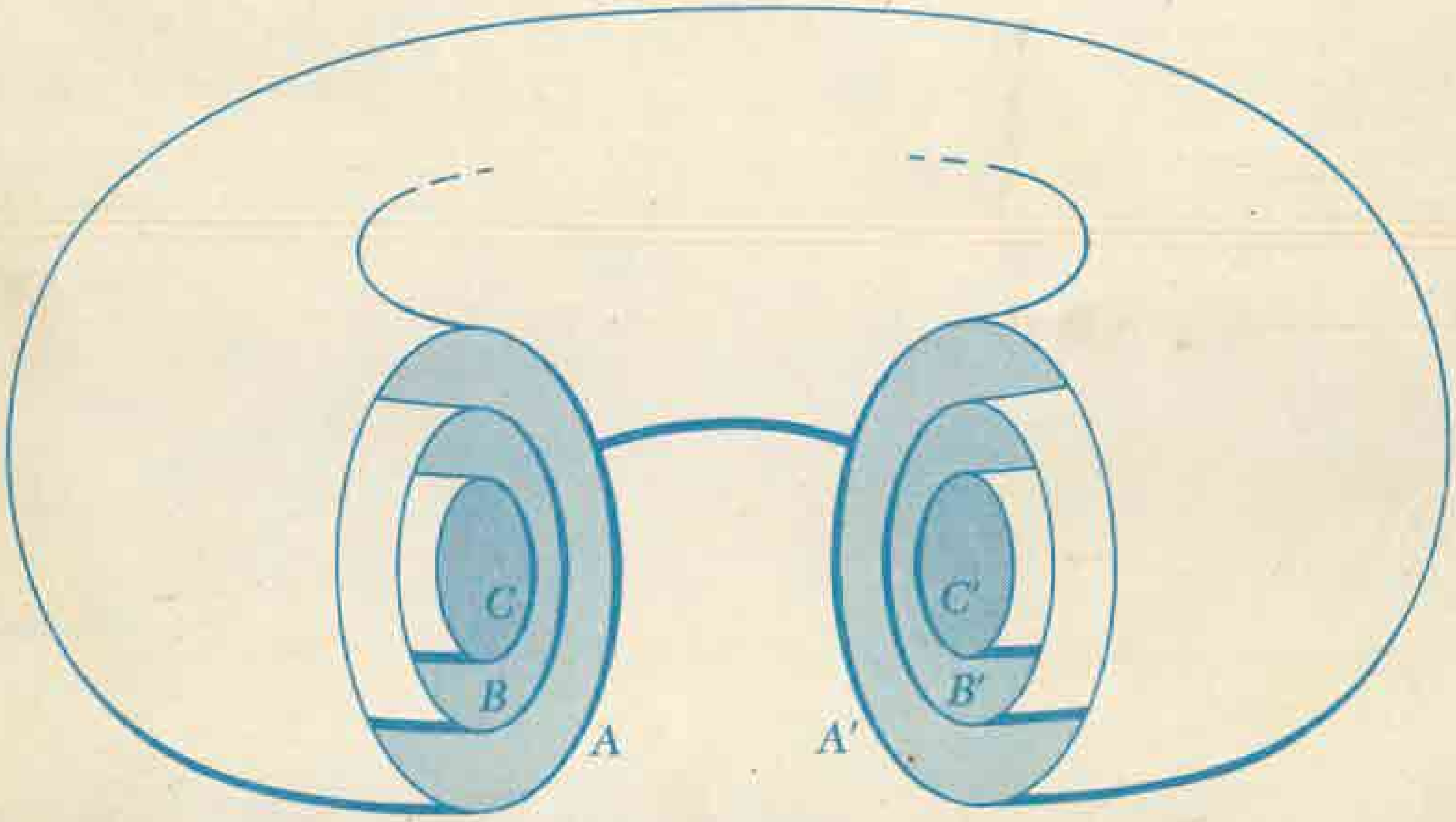


הרמונוגרם. ציור עשוי במכונה הנמצאת
במוזיאון המדע והטכנולוגיה, תל-אביב.

כרך 3 תשרי תשכ"ט - ספטמבר 1968 מס 6

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

שוב חלו עיכובים מצערים בהוצאת גליונות מתמטיקה. אחרי שהתגברנו על כל ההפרעות שאחר מלחמת ששת הימים חשבנו כי יצאנו לרווחה, אבל הפעם נדחתה ההוצאה לאור בגלל מחלת העורך. אנו תקוה כי נוכל עכשיו להמשיך בעבודתנו ללא תקלות. בין השאר יש בתכניתנו להוציא את החוברת הבאה בעתיד הקרוב.

אנו מודים לצבור הקוראים בעד כל הסבלנות שהראו נוכח כל התקלות והעיכובים ומצדנו נשתדל למנע כאלה בעתיד.

בעיה

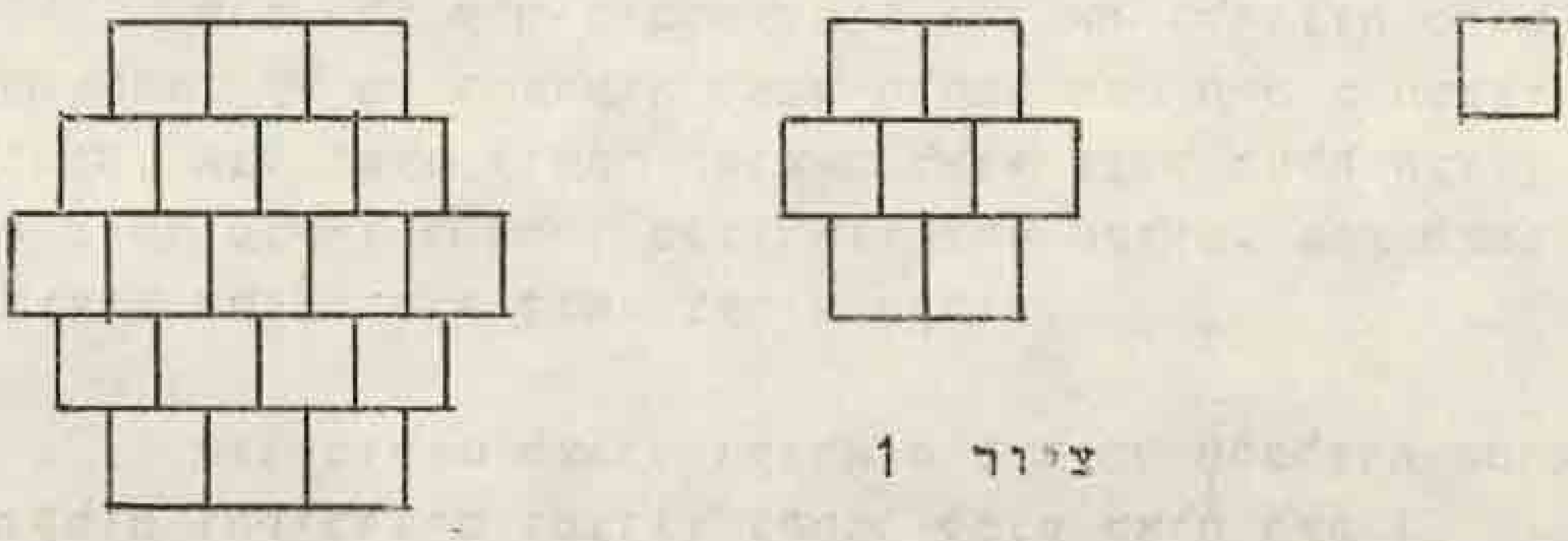
ראובן, שמעון, ולוי הוכנסו לחדר והוצגו בפניהם חמישה כובעים, מהם שלשה שחורים ושנים אדומים. אחרי שחבשו לשלשתם את העינים הלבישו על כל אחד כובע. התחבושות הוסרו ואיפשרו לראובן לראות את הכובעים שעל שמעון ולוי, ולשמעון לראות את הכובע של לוי בלבד. לוי לא הורשה לראות בכלל איזה כובעים חובשים האחרים. בקשו מראובן לנחש את צבע הכובע שעל ראשו והוא הודיע כי איננו יכול. אחרי זה דרשו משמעון לנחש את צבע כובעו הוא, וגם הוא נכנע. בסוף פנו אל לוי וזה נחש על נכון את צבע כובעו. איזה צבע חבש לוי ואיך ידע לנחש?

(פתרון הבעיה בעמוד 3)

משושה קסם

רן דונג׳י (חולון)

בחוברת קודמת (כרך 3, מס׳ 4) הופיע מאמר על הנושא רבועי קסם. נושא קרוב לזה הוא "משושי קסם" ובהם נדון במאמר זה. בציור מס׳ 1 נראה למה כוונתנו כשאנו מדברים על משושה קסם מסדר n.



ציור 1

הכלל המתקבל הוא שבשורה האופקית העליונה נמצאות n משבצות, בזאת מתחתה $n + 1$ משבצות, וכו׳, עד שבשורה ה- n ישנן $2n-1$ משבצות. מכאן והלאה הולך מספר המשבצות וקטן עד שבשורה התחתונה יש שוב בדיוק n משבצות.

מערכת המשבצות מתחלקת איפוא לשלשה חלקים: השורה האמצעית, החלק שמעליה, והחלק שמתחתה. בכל אחד משני החלקים האחרונים נמצאות משבצות במספר $(2n-2)+\dots\dots+(n-1)+n$, ז.א. $1/2\,(n-1)(3n-2)$, ואילו בשורה האמצעית נמצאות $(2n-1)$ משבצות. המספר הכולל הוא איפוא

$$(n-1)(3n-2)+(2n-1) = 3n^2- 3n + 1$$

עלינו יהיה להציב בהן את המספרים הטבעיים מ-1 עד $3n^2-3n+1$. יהיה S סכום האיברים בכל שורה. מאחר שישנן $2n-1$ שורות יוצא כי $(2n-1)S$ שווה לסכום המספרים הטבעיים מ-1 עד $3n^2-3n+1$ ז.א.

$$(2n-1)S = \frac{1}{2}(2n^2-3n+1)(3n^2-3n+2)$$

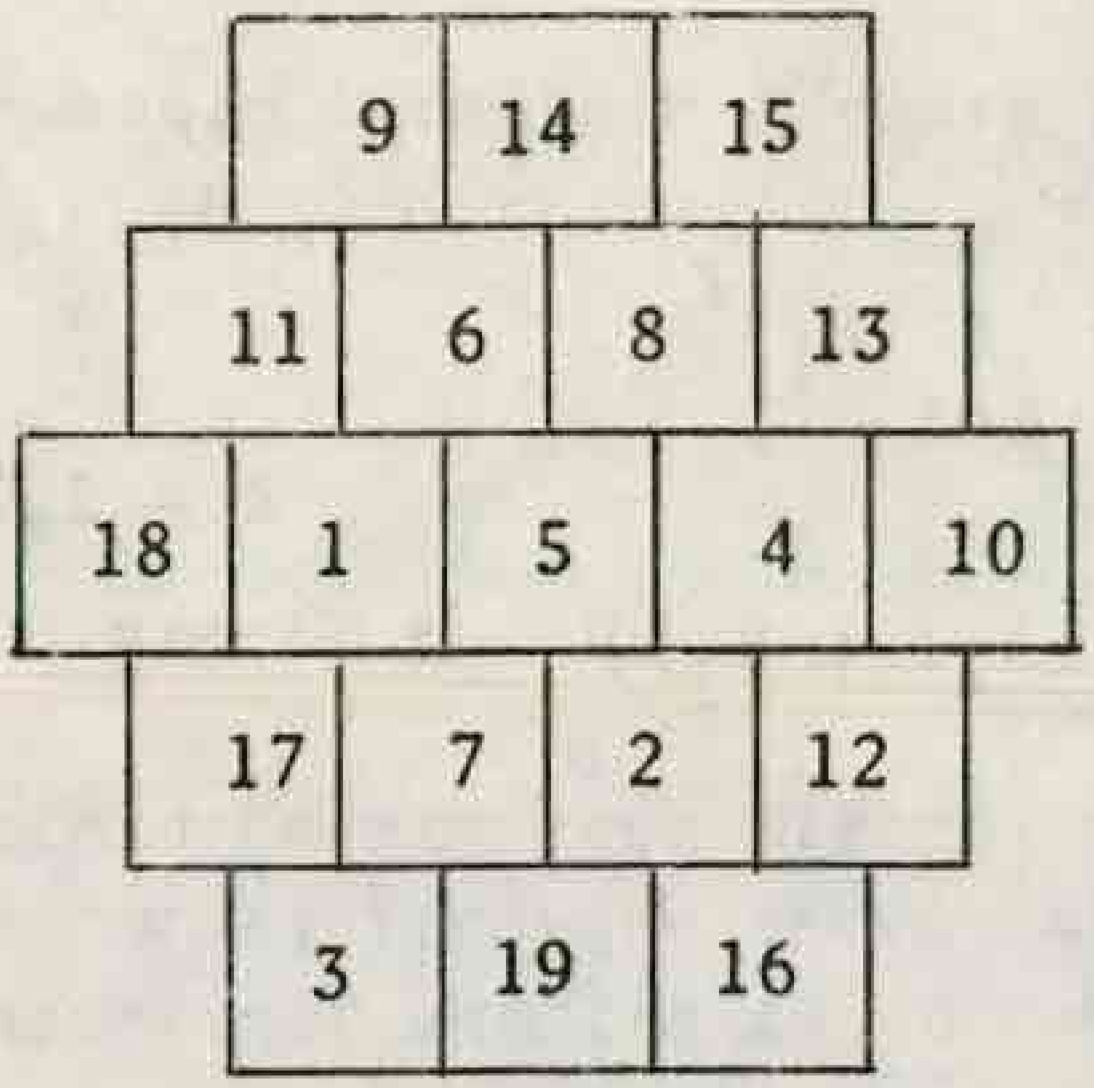
בכאן נובע שתנאי הכרחי לקיומו של משושה מסדר n הוא כי $(3n^2-3n+1)(3n^2-3n+2)$ יתחלק $(2n-1)$. אבל

$$\begin{aligned}(3n^2-3n+1)(3n^2-3n+2) &= 9n^4-18n^3+18n^2-9n+2\\ &= (2n-1)(4n^3-7n^2+5n-2) + n^4 + n^2\end{aligned}$$

ולכן התנאי ההכרחי הוא ש- n^4+n^2 יתחלק ב- $(2n-1)$. אבל $(2n-1)$ אי-זוגי ולכן יתקיים התנאי הזה אך ורק אם גם $16(n^4+n^2)$ יתחלק ב- $(2n-1)$. עכשיו

$$16(n^4+n^2) = (2n-1)(8n^3+4n^2+10n+5) + 5$$

והתנאי הוא איפוא כי המספר 5 יתחלק ב- $(2n-1)$, ז.א. $n = 1,3$. המקרה $n=1$ הוא טריביאלי ואמנם קיים פתרון עבור $n=3$ (ראה ציור 2).



ציור 2

(הערת העורך: מעניין כי המשושה הזה שבציור 2 הוא היחידי האפשרי מסדר 3, פרט לאלה המתקבלים ממנו ע"י פעולות סימטריה כגון שקוף או סיבוב. את העובדה הזאת הוכיח מר ר. פרלמן (מכון ויצמן, רחובות) בעזרת מחשב אלקטרוני).

פתרון הבעיה מע' 1

אילו היו גם לשמעון וגם ללוי כובעים אדומים הרי אז היה יכול ראובן להסיק כי כובעו שחור (מאחר שלא היו בכלל אלא שנים אדומים), ולכן מעצם העובדה שראובן לא ידע להגיד את צבע כובעו יכול שמעון להסיק כי או הוא (שמעון) או לוי או שניהם חובשים כובע שחור. לכן אילו היה לוי חובש כובע אדום אזי היה שמעון יכול להסיק כי כובעו הוא שחור. אבל למעשה גם שמעון נכנע ולכן ידע לוי להגיד שעל ראשו נמצא כובע שחור.

מדור מתקדם

בעית טארי - אסקוט ופתרונה בעזרת המחשב

מאת: יוסף בן-דב (חיפה)

א. בעית טארי - אסקוט ומצבה הנוכחי

בעית טארי-אסקוט הקלאסית היא למצוא n מספרים $A_1, A_2, \ldots, A_n$
ו- n מספרים $B_1, B_2, \ldots, B_n$ כך ש:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} (A_i)^K = \sum_{i=1}^{m} (B_i)^K$$

עבור: $K = 1, 2, \ldots, m-1$

במקרה זה נגדיר את הפתרון כ- $\{(A_i) \; ; \; B_j)\}$.

בעיה זו ניתנת להרחבה בכמה אופנים. פתרון שבו יש רק m איברים מכל צד של השויון (וההזקות עולות מ-1 עד $m-1$) יקרא בשם <u>פתרון מינימלי</u>. אפשר לקבל פתרונות גם עם יותר מ-m איברים מכל צד של השויון, כאשר השויון קיים עבור $m-1$ חזקות, ואז לא יהיה זה כמובן, פתרון מינימלי. ניתן גם למצוא פתרונות פרמטריים לבעיה, כאשר ה- A_i וה-B_i מהוים תבניות אלגבריות (למשל בשני משתנים x,y) המספקות את המשוואה (*) עבור כל ערך של המשתנים. פתרון כזה יקרא <u>פתרון פרמטרי</u>.

עד היום נחקרו ונבדקו פתרונות מספריים של הבעיה המינימלית עבור ערכי m הנעים בין 2-10 (ראה 1). לא ידועים עדיין פתרונות מינימליים מסדרים גבוהים יותר. פתרונות פרמטריים ידועים עבור הבעיה המינימלית מהסדרים 2-8 לפי הפירוט: לבעיה מהסדרים 3,4,6, ידועים פתרונות פרמטריים מהמעלה הראשונה. לבעיה מהסדרים 5,8 , ידועים פתרונות פרמטריים מהמעלה השניה. לבעיה מסדר 7 ידוע פתרון פרמטרי מהמעלה החמישית אך יש לצפות לפתרון מהמעלה השלישית. לבעיה מסדר 9 ידועים רק שני פתרונות מספריים לא אקוילנטיים (שני פתרונות הם אקוילנטיים כאשר ניתן לעבור מפתרון אחד למישנהו ע"י הוספה של אותו מספר לכל האיברים והכפלתם באותו גורם), אך עדיין לא נמצא פתרון פרמטרי לבעיה. יש לצפות למציאת פתרון פרמטרי מהמעלה השלישית לבעיה זו. לבעיה מסדר 10 ידועים אין-סוף פתרונות מספריים אך גם כאן עדיין לא נמצא יצוג פרמטרי לפתרונות. יש לצפות לקבלת פתרון פרמטרי מהמעלה השניה לבעיה מסדר 10.

ב. מעבר מפתרון מסדר m לפתרון מסדר m +1.

יהיה $\{(A_i);(B_j)\}$ פתרון מסדר m לבעית טארי-אסקוט, אזי גם $\{(A_i,\, B_j+t);(B_i, A_j+t)\}$ יהווה פתרון מסדר m+1 (אמנם מאורך כפול)
ההוכחה של משפט זה היא מידית, ונעשית בעזרת משפט הבינום של ניוטון.

כי נניח שהקבוצות $\{A_i\}$ ו- $\{B_i\}$ מהוות פתרון מסדר m, ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{\,k} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{\,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

אם נקח כל מספר שלם t וניצור שתי קבוצות מורחבות,

האחת $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1+t, B_2+t, \ldots, B_n+t$
והשניה $B_1, B_2, \ldots, B_n, A_1+t, A_2+t, \ldots, A_n+t$

הרי נקבל כי:

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_i^{\,k} + \sum_{i=1}^{n} (B_i+t)^k \Big\} - \Big\{ \sum_{i=1}^{n} B_i^{\,k} + \sum_{i=1}^{n} (A_i+t)^k \Big\}$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_i^{\,k} + B_i^{\,k}) + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} t^r \Big[\sum_{i=1}^{n} B_i^{\,k-r} \Big] \Big\} -$$

$$- \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (B_i^{\,k} + A_i^{\,k}) + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} t^r \Big[\sum_{i=1}^{n} A_i^{\,k-r} \Big] \Big\}$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} t^r \Big[\sum_{i=1}^{n} B_i^{\,k-r} - \sum_{i=1}^{n} A_i^{\,k-r} \Big]$$

אבל אם $1<k<m$ ו- $1<r<k$ יהיה $0 < k-r < m-1$ ולכן יהיה

$\sum_{i=1}^{n} B_i^{\,k-r} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{\,k-r}$, מאחר שהקבוצות $\{A_i\}$ ו- $\{B_i\}$ מהוות

לפי ההנחה פתרון מסדר m. ראינו איפוא כי שתי הקבוצות המורחבות פותרות את הבעיה עבור $1\leq k\leq m$, זאת אומרת שהן מהוות פתרון מסדר m+1.

בדרך כלל לא יהיה פתרון זה מסדר m+1 פתרון מינימלי; אבל לפעמים ניתן לבחור ב- t כך שלשתי הקבוצות המורחבות יהיו איברים משותפים אשר, כפי שהאמור לעיל, ניתן למחוק אותם וע"י כך להתקרב יותר (ובמקרים מוצלחים גם להגיע) לפתרון מינימלי.

הדוגמה הבאה מראה (בעזרת מספרים) איך עוברים בדרך כלל מפתרון מסדר 2 לזה מסדר 3 ומכאן לסדרים 4, 5, 6, 7, ו-8. הפתרון מסדר 7 המתקבל בדרך-זו, איננו מינימלי כי יש בו שמונה איברים מכל צד. אך הפתרון מסדר 8 הוא שוב מינימלי.

נתון פתרון מסדר 2: 1 ; 9 ∼ 4 ; 6 $\quad m = 2$

נוסיף t=2 לכל איבר ונקבל: 3 ; 11 ∼ 6 ; 8

נחבר עתה בהצלבה את שתי הקבוצות כדי לקבל ו-

1 ; 6 ; 8 ; 9 ∼ 3 ; 4 ; 6 ; 11

ניתן למחוק את המספר 6 ונקבל פתרון מסדר:

1 ; 8 ; 9 ∼ 3 ; 4 ; 11 $\quad m = 3$

בהתאם לתהליך הנ"ל נוסיף כעת t = 1 לכל איבר ונקבל:

1 ; 8 ; 9 ; 4 ; 5 ; 12 ∼ 3 ; 4 ; 11 ; 2 ; 9 ; 10

ניתן למחוק שני מספרים: 9 , 4 ונקבל פתרון מסדר:

1 ; 5 ; 8 ; 12 ∼ 2 ; 3 ; 10 ; 11 $\quad m = 4$

נוסיף t=7 לכל איבר ונקבל:

1;5;8;12;9;10;17;18 ∼ 2;3;10;11;8;12;15;19

לאחר מחיקת שלושה מספרים 12, 10, 8 נקבל פתרון מסדר:

1 ; 5 ; 9 ; 17 ; 18 ∼ 2 ; 3 ; 11 ; 15 ; 19 $\quad m = 5$

נוסיף t=8 לכל איבר ונקבל:

1;5;9;17;18;10;11; ∼ 2;3;11;15;19;9;13;

19;23;27 $\qquad$ 17;25;26

כאן ניתן למחוק ארבעה מספרים: 9,11,17,19 ונקבל פתרון מסדר:

1;5;10;18;23;27 ∼ 2;3,13,15,25,26 $\quad m = 6$

נוסיף t=13 לכל איבר ונקבל:

1;5;10;18;23;27;15 ∼ 2;3;13;15;25;26;14;

16;26;28;38;39 $\qquad$ 18;23;31;36;40

ניתן למחוק כאן את ארבעה המספרים 15,18,23,26 ונקבל לכן פתרון לא מינימלי עבור הבעיה מסדר: $\quad m = 7$

1;5;10;16;27;28;38;39 ∼ 2;3;13;14;25;31;36;40

נוסיף לאחרונה t=11 לכל איבר ונקבל:

;39;13;14;24;25;36;42;47;51 ∿2;3;13;14;25;31;36;40;12;16;21;

1;5;10;16;27;28;38 27;38;39;49;50

אנחנו מצליחים הפעם למחוק שמונה מספרים: 39, 38, 36, 27, 25, 16, 14, 13
ולקבל שוב פתרון מינימלי עבור הבעיה מסדר: m = 8

1;5;10;24;28;42;47; ∿2;3;12;21;31;40;49;50

<u>ג. הבעיה המוצגת למחשב, ושלבי הפתרון</u>

עד עתה נוסחה השיטה הנ"ל למעבר מפתרון למישנהו רק עבור פתרונות מסדרים נמוכים. ננסה להשתמש בשיטה זו לשם מעבר מפתרון פרמטרי מסדר 8 לפתרון פרמטרי (ואח"כ גם מספרי) מסדר 10, תוך קפיצה על הבעיה מסדר 9 ומציאת פתרונות לא מינימליים עבורה.

השתמשנו בפתרונו הפרמטרי של ז'בוטינסקי כנקודת מוצא למחקר.

A_i	B_i
$A_1 = 1X^2 - 23XY + 84Y^2$	$B_1 = 1X^2 + 5XY - 56Y^2$
$A_2 = 3X^2 - 35XY + 112Y^2$	$B_2 = 3X^2 - 23XY + 28Y^2$
$A_3 = 4X^2 - 33XY + 56Y^2$	$B_3 = 4X^2 - 35XY + 84Y^2$
$A_4 = 2X^2 - 5XY - 28Y^2$	$B_4 = 2X^2 - 33XY + 112Y^2$
$A_5 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$B_5 = -1X^2 - 5XY + 56Y^2$
$A_6 = -3X^2 + 35XY - 112Y^2$	$B_6 = -3X^2 + 23XY - 28Y^2$
$A_7 = -4X^2 + 33XY - 56Y^2$	$B_7 = -4X^2 + 35XY - 84Y^2$
$A_8 = -2X^2 + 5XY + 28Y^2$	$B_8 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$

שלבי הפתרון של הבעיה:

(א) מעבר מפתרונו שפרמטרי המינימלי מסדר 8 של ז'בוטינסקי, לפתרון פרמטרי מסדר 9 עם 12 איברים.

(ב) בחירת ערכים מתאימים עבור X ו- Y לקבלת פתרון מספרי מסדר 9, בעל אורך קטן ביותר.

(ג) מעבר מהפתרון הפרמטרי מסדר 9 לפתרון פרמטרי מסדר 10 עם 18 איברים.

(ד) בחירת ערכים מתאימים עבור X ו-Y לקבלת פתרון מספרי מסדר 10, שיהיה הקצר ביותר, ואולי המינימלי.

ד. התוצאות שהושגו

(א) מציאת פתרון פרמטרי לא מינימלי לבעיה מסדר 9.

נתקבלו שלשה פתרונות פרמטריים שונים לבעיה מסדר 9 עם 12 איברים. פתרונות אלו נתקבלו לאחר מציאת שלשה הפרשים מתאימים (מהפתרון הנתון של ז"בוטינסקי) אשר קיימו את התנאי של מחיקת ארבעה איברים מכל צד של השויון, לאחר הוספת הפרשים אלו לפתרון הנתון.

1. $$t_{1,7} = 5X^2 - 56XY + 140Y^2$$

$C_1 = 3X^2 - 35XY + 112Y^2$	$D_1 = 1X^2 + 5XY - 56Y^2$
$C_2 = 2X^2 - 5XY - 28Y^2$	$D_2 = 4X^2 - 35XY + 84Y^2$
$C_3 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$D_3 = -1X^2 - 5XY + 56Y^2$
$C_4 = -3X^2 + 35XY - 112Y^2$	$D_4 = -3X^2 + 23XY - 28Y^2$
$C_5 = -4X^2 + 33XY - 56Y^2$	$D_5 = -4X^2 + 35XY - 84Y^2$
$C_6 = -2X^2 + 5XY + 28Y^2$	$D_6 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$
$C_7 = 6X^2 - 51XY + 84Y^2$	$D_7 = 6X^2 - 79XY + 224Y^2$
$C_8 = 8X^2 - 79XY + 168Y^2$	$D_8 = 8X^2 - 91XY + 252Y^2$
$C_9 = 9X^2 - 91XY + 224Y^2$	$D_9 = 9X^2 - 89XY + 196Y^2$
$C_{10} = 7X^2 - 89XY + 252Y^2$	$D_{10} = 7X^2 - 61XY + 112Y^2$
$C_{11} = 4X^2 - 61XY + 196Y^2$	$D_{11} = 2X^2 - 21XY + 28Y^2$
$C_{12} = 1X^2 - 21XY + 56Y^2$	$D_{12} = 3X^2 - 51XY + 168Y^2$

$$t_{1,8} = 3X^2 - 28XY + 56Y^2 \qquad .2$$

$C_1 = 3X^2 - 35XY + 112Y^2$	$D_1 = 3X^2 - 23XY + 28Y^2$
$C_2 = 4X^2 - 33XY + 56Y^2$	$D_2 = 4X^2 - 35XY + 84Y^2$
$C_3 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$D_3 = -1X^2 - 5XY + 56Y^2$
$C_4 = -3X^2 + 35XY - 112Y^2$	$D_4 = -3X^2 + 23XY - 28Y^2$
$C_5 = -4X^2 + 33XY - 56Y^2$	$D_5 = -4X^2 + 35XY - 84Y^2$
$C_6 = -2X^2 + 5XY + 28Y^2$	$D_6 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$
$C_7 = 4X^2 - 23XY$	$D_7 = 4X^2 - 51XY + 140Y^2$
$C_8 = 6X^2 - 51XY + 84Y^2$	$D_8 = 6X^2 - 63XY + 168Y^2$
$C_9 = 7X^2 - 63XY + 140Y^2$	$D_9 = 7X^2 - 61XY + 112Y^2$
$C_{10} = 5X^2 - 61XY + 168Y^2$	$D_{10} = 5X^2 - 33XY + 28Y^2$
$C_{11} = - 5XY + 28Y^2$	$D_{11} = 7XY - 56Y^2$
$C_{12} = -1X^2 + 7XY - 28Y^2$	$D_{12} = -1X^2 + 5XY$

$$t_{3,4} = 2X^2 - 28XY + 84Y^2 \qquad .3$$

$C_1 = 1X^2 - 23XY + 84Y^2$	$D_1 = 1X^2 + 5XY - 56Y^2$
$C_2 = 3X^2 - 35XY + 112Y^2$	$D_2 = 4X^2 - 35XY + 84Y^2$
$C_3 = 2X^2 - 5XY - 28Y^2$	$D_3 = 2X^2 - 33XY + 112Y^2$
$C_4 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$D_4 = -3X^2 + 23XY - 28Y^2$
$C_5 = -3X^2 + 35XY - 112Y^2$	$D_5 = -4X^2 + 35XY - 84Y^2$
$C_6 = -4X^2 - 33XY - 56Y^2$	$D_6 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$
$C_7 = 5X^2 - 51XY + 112Y^2$	$D_7 = 3X^2 - 51XY + 168Y^2$
$C_8 = 6X^2 - 63XY + 168Y^2$	$D_8 = 5X^2 - 63XY + 196Y^2$
$C_9 = 4X^2 - 61XY + 196Y^2$	$D_9 = 6X^2 - 61XY + 140Y^2$
$C_{10} = 1X^2 - 33XY + 140Y$	$D_{10} = 1X^2 - 5XY$
$C_{11} = -2X^2 + 7XY$	$D_{11} = -1X^2 + 7XY - 28Y^2$
$C_{12} = 5XY - 28Y^2$	$D_{12} = - 23XY + 112Y^2$

(ב) מציאת פתרונות מספריים לא מינימליים לבעיה מסדר 9 (עם 10 איברים).

נתקבלו שלושה פתרונות מספריים שונים לבעיה מסדר 9 עם 10 איברים. פתרונות אלו נתקבלו מהפתרון הפרמטרי של הבעיה מסדר 9, ע"י פתירת משוואות רבועיות מתאימות, ומציאת ערכים מסויימים עבור X ו- Y, כך שניתן היה למחוק מכל צד של השויון שני מספרים נוספים ולהגיע לפתרון עם 10 מספרים. (ראה נספח מס' 1).

אולי כדאי להתעכב כאן לרגע כדי להבהיר בדיוק את מה שעשינו. לקחנו לדוגמא את שתי המערכות הפרמטריות המופיעות ב- 1), אותן המאופיינות ע"י ה-t הפרמטרי שקראנו לו (מטעמים היסטוריים) $t_{1,7}$. השווינו כל C_i עם כל D_j כדי למצוא זוג X,Y אשר הערכים המתאימים של C_i ו- D_j יהיו שווים, דבר שיאפשר את מחיקתם מהמערכות המספריות. בין אלה חפשנו אותם שאיפשרו מחיקתם גם של מספרים נוספים, בהיותם משותפים לשתי המערכות. את החיפושים האלה בצענו בעזרת מחשב אלקטרוני.

(1) עבור $t_{1,7}$ וערכי X ; Y הבאים (שנתקבלו ע"י פתירת המשוואות הרבועיות שמספריהן מסומנים) קבלנו את הפתרון הבא:

$(C_2 ; D_7)$ $X = -36$ $Y = -8$ $(C_5 ; D_{10})$ $X = -56$ $Y = -22$

$(C_7 ; D_4)$ $X = 112$ $Y = 18$ $(C_{10} ; D_1)$ $X = 132$ $Y = 12$

2;9;32;44;78;29;115;145;151;166 ∿ 1;16;22;52;75;89;123;135;158;164

(2) עבור $t_{1,7}$ וערכי X ; Y הבאים קבלנו את הפתרון:

$(C_1; D_{10})$ $X = -52$ $Y = -8$ $(C_4; D_{12})$ $X = -112$ $Y = -12$

$(C_7 ; D_5)$ $X = 60$ $Y = 20$

1;10;11;37;38;42;60;69;83;84 ∿ 3;4;18;27;45;49;50;76;77;86

(3) עבור $t_{1,8}$ ו- $t_{3,4}$ וערכי X ;Y הבאים קבלנו את הפתרון:

$t_{1,8}$ $(C_1; D_{10})$ $X = 28$ $Y = -4$ $(C_7; D_5)$ $X = 84$ $Y = 16$

$(C_1; D_9)$ $X = -52$ $Y = -8$ $(C_8; D_5)$ $X = 60$ $Y = 20$

$t_{3,4}$ $(C_3; D_8)$ $X = -36$ $Y = -6$ $(C_{10}; D_2)$ $X = 24$ $Y = -6$

$t_{3,4}$ $(C_4; D_8)$ $X = -112$ $Y = -12$

1;5;10;22;28;42;51;59;68;69 ∿ 2;3;12;20;29;43;49;61;66;70

(ג) מציאת פתרון פרמטרי לא מינימלי לבעיה מסדר 10 עם 18 איברים.

נתקבלו שלושה פתרונות פרמטריים לבעיה מסדר 10 עם 18 איברים.
פתרונות אלו נתקבלו מהפתרון הפרמטרי מס' 2 של הבעיה מסדר 9, ולאחר
בחירת הפרשים מתאימים שיקיימו את התנאי של מחיקת ששה איברים מכל צד
של השוויון.

1. $T_{1,2} = -1X^2 - 2XY + 56Y^2$

$G_1 = 4X^2 - 33XY + 56Y^2$	$H_1 = 3X^2 - 23XY + 28Y^2$
$G_2 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$H_2 = -1X^2 - 5XY + 56Y^2$
$G_3 = -3x^2 + 35XY - 112Y^2$	$H_3 = -3X^2 + 23XY - 28Y^2$
$G_4 = 4X^2 - 23XY$	$H_4 = -4X^2 + 35XY - 84Y^2$
$G_5 = 6X^2 - 51XY + 84Y^2$	$H_5 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$
$G_6 = 7X^2 - 63XY + 140Y^2$	$H_6 = 4X^2 - 51XY + 140Y^2$
$G_7 = 5X^2 - 61XY + 168Y^2$	$H_7 = 7X^2 - 61XY + 112Y^2$
$G_8 = - 5XY + 28Y^2$	$H_8 = 5X^2 - 33XY + 28Y^2$
$G_9 = -1X^2 + 7XY - 28Y^2$	$H_9 = 7XY - 56Y^2$
$G_{10} = 2X^2 - 25XY + 84Y^2$	$H_{10} = 2X^2 - 37XY + 168Y^2$
$G_{11} = 3X^2 - 37XY + 140Y^2$	$H_{11} = -2X^2 + 21XY - 28Y^2$
$G_{12} = -2X^2 - 7XY + 112Y^2$	$H_{12} = -5X^2 + 31XY$
$G_{13} = -4X^2 + 21XY + 28Y^2$	$H_{13} = -3X^2 + 3XY + 84Y^2$
$G_{14} = -5X^2 + 33XY - 28Y^2$	$H_{14} = 3X^2 - 25XY + 56Y^2$
$G_{15} = -3X^2 + 31XY - 56Y^2$	$H_{15} = 5X^2 - 53XY + 140Y^2$
$G_{16} = 3X^2 - 53XY + 196Y^2$	$H_{16} = 6X^2 - 65XY + 196Y^2$
$G_{17} = 5X^2 - 65XY + 224Y^2$	$H_{17} = 4X^2 - 63XY + 224Y^2$
$G_{18} = -2X^2 + 3XY + 56Y^2$	$H_{18} = -1X^2 - 7XY + 84Y^2$

$$T_{4,7} = -7X^2 + 58XY - 112Y^2 \qquad .2$$

$G_1 = 3X^2 - 35XY + 112Y^2$	$H_1 = 3X^2 - 23XY + 28Y^2$
$G_2 = 4X^2 - 33XY + 56Y^2$	$H_2 = 4X^2 - 35XY + 84Y^2$
$G_3 = -1X^2 + 23XY - 84Y^2$	$H_3 = -2X^2 + 33XY - 112Y^2$
$G_4 = -4X^2 + 33XY - 56Y^2$	$H_4 = -4X^2 - 51XY + 140Y^2$
$G_5 = -2X^2 + 5XY + 28Y^2$	$H_5 = 6X^2 - 63XY + 168Y^2$
$G_6 = 4X^2 - 23XY$	$H_6 = 7X^2 - 61XY + 112Y^2$
$G_7 = 6X^2 - 51XY + 84Y^2$	$H_7 = 5X^2 - 33XY + 28Y^2$
$G_8 = 7X^2 - 63XY + 140Y^2$	$H_8 = 7XY - 56Y^2$
$G_9 = 5X^2 - 61XY + 168Y^2$	$H_9 = -1X^2 + 5XY$
$G_{10} = -8X^2 + 53XY - 56Y^2$	$H_{10} = -4X^2 + 23XY$
$G_{11} = -10X^2 + 81XY - 140Y^2$	$H_{11} = -3X^2 + 25XY - 56Y^2$
$G_{12} = -11X^2 + 93XY - 196Y^2$	$H_{12} = -8X^2 + 81XY - 196Y^2$
$G_{13} = -9X^2 + 91XY - 224Y^2$	$H_{13} = -10X^2 + 93XY - 224Y^2$
$G_{14} = -3X^2 + 7XY + 28Y^2$	$H_{14} = -11X^2 + 91XY - 168Y^2$
$G_{15} = - 3XY$	$H_{15} = -9X^2 + 63XY - 84Y^2$
$G_{16} = -2X^2 + 25XY - 84Y^2$	$H_{16} = -2X^2 - 3XY + 56Y^2$
$G_{17} = -7X^2 + 65XY - 168Y^2$	$H_{17} = -7X^2 + 53XY - 84Y^2$
$G_{18} = -8X^2 + 63XY - 112Y^2$	$H_{18} = -8X^2 + 65XY - 140Y^2$

3. $$T_{4\ 12} = -2X^2 + 28XY - 84Y^2$$

$G_1 =$	$3X^2$	$35XY$	$112Y^2$	$H_1 =$	$3X^2$	$23XY$	$28Y^2$
$G_2 =$	$4X^2$	$33XY$	$56Y^2$	$H_2 =$	$-1X^2$	$5XY$	$56Y^2$
$G_3 =$	$-1X^2$	$23XY$	$84Y^2$	$H_3 =$	$-4X^2$	$35XY$	$84Y^2$
$G_4 =$	$-2X^2$	$5XY$	$28Y^2$	$H_4 =$	$-2X^2$	$33XY$	$112Y^2$
$G_5 =$	$6X^2$	$51XY$	$84Y^2$	$H_5 =$	$4X^2$	$51XY$	$140Y^2$
$G_6 =$	$7X^2$	$63XY$	$140Y^2$	$H_6 =$	$6X^2$	$63XY$	$168Y^2$
$G_7 =$	$5X^2$	$61XY$	$168Y^2$	$H_7 =$	$7X^2$	$61XY$	$112Y^2$
$G_8 =$		$5XY$	$28Y^2$	$H_8 =$		$7XY$	$56Y^2$
$G_9 =$	$-1X^2$	$7XY$	$28Y^2$	$H_9 =$	$-1X^2$	$5XY$	
$G_{10} =$	$1X^2$	$5XY$	$56Y^2$	$H_{10} =$	$1X^2$	$7XY$	$28Y^2$
$G_{11} =$	$2X^2$	$7XY$		$H_{11} =$	$2X^2$	$5XY$	$28Y^2$
$G_{12} =$	$-5X^2$	$51XY$	$112Y^2$	$H_{12} =$	$-3X^2$	$51XY$	$168Y^2$
$G_{13} =$	$-6X^2$	$63XY$	$168Y^2$	$H_{13} =$	$-5X^2$	$63XY$	$196Y^2$
$G_{14} =$	$-4X^2$	$61XY$	$196Y^2$	$H_{14} =$	$-6X^2$	$61XY$	$140Y^2$
$G_{15} =$	$2X^2$	$23XY$	$56Y^2$	$H_{15} =$	$2X^2$	$5XY$	$84Y^2$
$G_{16} =$	$3X^2$	$5XY$	$56Y^2$	$H_{16} =$	$5X^2$	$35XY$	$56Y^2$
$G_{17} =$	$-2X^2$	$35XY$	$140Y^2$	$H_{17} =$	$3X^2$	$33XY$	$84Y^2$
$G_{18} =$	$-3X^2$	$33XY$	$84Y^2$	$H_{18} =$	$-2X^2$	$23XY$	$56Y^2$

ד. מציאת פתרונות מספריים לא מינימליים לבעיה מסדר 10 עם 14 איברים.

נתקבל פתרון מספרי לא מינימלי אחד לבעיה מסדר 10 עם 14 מספרים.
פתרון זה נתקבל מהפתרונות הפרמטריים שנתקבלו לבעיה מסדר 10, וע"י הצבת ערכים מתאימים ל-X ו-Y תוך קיום התנאי של מחיקת ארבעה מספרים מכל צד של השוויון, וקבלת פתרון בין 14 מספרים.

עבור $T_{1,2;4,7}$ וערכי X, Y הבאים קבלנו את הפתרון המבוקש:

$T_{1,2}$ $(G_4;H_4)$ $X = 84$ $Y = 16$ $(G_{13};H_{16})$ $X = -60$ $Y = -20$

$T_{4,7}$ $(G_1;H_4)$ $X = 28$ $Y = -4$ $(G_{15};H_{10})$ $X = 52$ $Y = 8$

;59;68;84;90;102;107;111 ∿ 2;3;12;20;29;46;49;63;66;83;92;100;109;110
1;5;10;22;28;44;53

ביבליוגרפיה

(1) Dr. Albert Gloden, "Mehrgradige Gleichungen" הוצאת P.Noordhoof, 1944, עמ' 56.

(2) ערי ז'בוטינסקי, "לבעית טארי-אסקוט המינימלית", (רבעון למתמטיקה, כרך 4, חוברת 3-4 1950, עמ' 43.

צפור אחת בשתי אבנים

ממוצעים

I מבוא

אחד המשפטים המפורסמים ביותר של המתמטיקה אומר שהממוצע החשבוני של קבוצת מספרים אי-שליליים אף פעם לא יהיה קטן מהממוצע ההנדסי, ושני הממוצעים יהיו שווים אך ורק במקרה שכל המספרים שוים. במלים אחרות:

אם $a_1, a_2, \ldots, a_n$ הם n מספרים אי-שליליים כלשהם אזי

$$\frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

עם שוויון אך ורק כש- $a_1 = a_2 \ldots = a_n$.

אפשר לנסח אותו משפט בצורה שונה במקצת והיא כדלקמן: אם $a_1, a_2; \ldots; a_n$ הם משתנים אי-שליליים אשר סכומם S, נתון אזי תהיה מכפלתם מירבית במקרה ש- $a_1 = a_2 \ldots = a_n = \frac{S}{n}$. בצורה זו

היה המשפט ידוע כבר לאבקלידס בשביל $n=2$. ניסוחו של אבקלידס היה כי אם קובעים את היקפו של מלבן אזי יהיה שטחו מירבי כשהמלבן הוא ריבוע.

למעשה בשביל $n=2$ קל מאד להוכיח את המשפט כי הרי

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$$

ולכן ברור כי

$$a_1 a_2 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

עם שוויון אך כש- $a_1 = a_2$. אבל הוכחת המשפט עבור ערכים אחרים של n מעלה כמה שיקולים מעניינים.

II הוכחה לקויה

הוכחה אחת שהיתה מצויה בספרי לימוד מלפני כמה עשרות שנים היתה כדלקמן: נניח כי $S = a_1 + a_2 \ldots + a_n$ הוא נתון וכי בחרנו מבין כל הקבוצות a_i המקיימות את התנאי הזה את זו אשר עבורה $a_1a_2 \ldots a_n$ הוא מירבי. עכשיו אם $a_1 \neq a_2$ נכתוב $b_1=b_2=\frac{a_1+a_2}{2}$, $b_3=a_3$, $b_4=a_4$, $\ldots$, $b_n=a_n$ אזי גם $\sum_{i=1}^{n} b_i = S$ אבל $b_1b_2 > a_1a_2$ (לפי האמור ב- I) ולכן $b_1b_2 \ldots b_n > a_1a_2 \ldots a_n$, מה שסותר את ההגדרה כי $a_1a_2 \ldots a_n$ הוא מירבי. הליקוי בהוכחה זו הוא בהנחה שאמנם קיימת קבוצה בעלת מכפלה מירבית. נכון כי אפשר להוכיח דבר זה אבל ההוכחה היא בהחלט בלתי אלמנטרית ומוציאה אותנו הרחק מתחום המושגים אשר בהם התחלנו. במאמר זה ננסה להציג כמה הוכחות שונות.

III הוכחה של קושי (Cauchy)

(א) ראינו כבר כי
$$a_1a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

אלא אם כן $a_1 = a_2$, ולכן
$$a_1a_2a_3a_4 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2$$

(פרט למקרה $a_1=a_2$, $a_3=a_4$)

$$= \left[\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_3+a_4}{2}\right]^2$$

$$< \left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}\right)\right]^2\right\}^2$$

(אלא אם כן $\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2}$)

$$= \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$$

זה מוכיח את המשפט עבור $n=4$. עבור שוויון במקרה זה צריכים שני האי-שוויונות להיפך למשוואות וזה גורר $a_1=a_2$, $a_3=a_4$, $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_3+a_4}{2}$;

ז.א. $a_1=a_2=a_3=a_4$. ברור כי נוכל להמשיך את התהליך הזה וככה, ע"י אינדוקציה נוכיח כי המשפט עבור $n=2^m$, כש- m הוא מספר טבעי כלשהו.

עכשיו יהיה n מספר טבעי אחר ונבחר m כך ש- $n<2^m$.

נכתוב $A = \frac{a_1+a_2...+a_n}{n}$ ונגדיר קבוצה חדשה $b_1, b_2, ..., b_{2^m}$ ע"י $b_i = a_i$ $(i=1,2,...,n)$; $b_r=A$ $(r= n+1, n+2, ..., 2^m)$. מאחר שמספר האיברים בקבוצה החדשה הוא 2^m נוכל להפעיל עליהם את המשפט

$$\left(\frac{b_1+b_2...+b_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} \geq (b_1 b_2 ... b_{2^m})$$

עם שוויון אך ורק כשכל ה-b-ים שווים. אם ניזכר בהגדרת ה-b-ים נקבל מצד שמאל

$$\left\{\frac{1}{2}\ [a_1+a_2...+a_n+(2^m-n)A]\right\}^{2^m}$$

$$= \left\{\frac{1}{2^m}\ [nA + (2^m - n)A]\right\}^{2^m} = A^{2^m}$$

מצד ימין יש לנו $(a_1 a_2 ... a_n) \cdot A^{2^m-n}$

ולכן $A^{2^m} \geq (a_1 a_2 ... a_n) \cdot A^{2^m-n}$

ז.א. $A^n \geq a_1 a_2 ... a_n$

דהיינו המשפט. אין קושי לבדוק כאן גם את התנאים לשוויון.

IV הערה כללית על ההוכחה

ההוכחה שהוצגה ב- III מתבססת למעשה על סוג חדש של אינדוקציה, "האינדוקציה ההפוכה". האינדוקציה הרגילה אומרת שאם אנחנו רוצים להוכיח איזה משפט P_n התלוי במספר טבעי n אזי יספיק אם נוכל להוכיח את P_1 ולהוכיח גם כי אמיתות המשפט P_n תגרור תמיד זו של P_{n+1}. אם הוכחנו את שתי העובדות האלה יהיה לנו $P_1 \Rightarrow P_2, P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$ וכו', ז.א. המשפט יהיה נכון עבור כל n טבעי. לדוגמה אם נרצה להוכיח כי

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

נקרא למשפט P_n, המשפט P_1 נכון, כפי שקל לבדוק $\left(\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1^2\right)$

אם P_n נכון אזי

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + (2n+1)$$
$$= n^2 + 2n + 1$$
$$= (n+1)^2$$

ז.א. $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

העקרון של אינדוקציה הפוכה הוא ש-P_n יהיה נכון עבור כל n טבעי אם

(i) $P_n \Rightarrow P_{n-1}$

(ii) P_n נכון עבור קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים n. במשפט הממוצעים ראינו כבר בהתחלה כי המשפט נכון כש-n הוא חזקה כלשהי של 2, ולכן התנאי (ii) מתקיים. נשאר איפוא להראות כי גם (i) מתקיים.
למטרה זו נקח מספרים לא-שליליים $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ויהיה $A = \frac{a_1+a_2\ldots+a_{n-1}}{n-1}$. נניח כי P_n נכון ונפעיל אותו על הקבוצה A, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ אשר יש בה n איברים. מזה יצא ש-

$$\left(\frac{a_1+a_2 \ldots +a_{n-1}+A}{n}\right)^n \geqslant A\, a_1a_2\ldots a_{n-1}$$

ז.א.

$$\left[\frac{(n-1)A+A}{n}\right]^n \geqslant A\, a_1a_2\ldots a_{n-1}$$

ולכן
$$A^n \geqslant A\, a_1 \ldots a_{n-1}$$
$$A^{n-1} \geqslant a_1a_2\ldots a_{n-1}$$

במלים אחרות, ניתן להסיק את P_{n-1} מתוך P_n.

V <u>אינדוקציה ישירה</u>

ניתן להוכיח את המשפט גם ע"י אינדוקציה ישירה רגילה. נתבסס על שני משפטי עזר קלים:-

<u>משפט עזר 1</u>: יהיו $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n מספרים לא שליליים אשר הקטן ביניהם הוא C_1 והגדול ביניהם C_2. יהיו A, G הממוצע החשבוני וההנדסי בהתאמה של $C_1, \ldots, C_n$. אזי $C_1<A<C_2$, $C_1<G<C_2$ (אלא אם כך $C_1=C_2\ldots=C_n$ ואז גם A ו-G שוים לערכם המשותף).

<u>הוכחה:</u>
$$\sum_{r=1}^{n} (C_r-A) = \sum_{r=1}^{n} C_r - nA = 0$$

ולכן או שכל המספרים C_r-A מתאפסים, ז.א. $C_1=C_2...=C_n=A$, או שיהיו ביניהם גם חיובים וגם שליליים. אבל הקטן ביניהם הוא C_1-A והגדול C_2-A ולכן $C_2-A>0>C_1-A$, ז.א. $C_1<A<C_2$.

כמו כן $\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{C_r}{G}\right)=1$ ולכן אם אין כל הגורמים $\frac{C_r}{G}$ שווים ל- 1 יהיו ביניהם גדולים מאחד וגם קטנים מ-1.

<u>משפט עזר 2</u>: אם Q,P חיוביים ו- n הוא מספר טבעי גדול מ-1

אזי

$$(P+Q)^n > P^n + n\,P^{n-1}Q$$

ההוכחה מידית כי לקחנו רק את שני האיברים הראשונים מפתוח הבינום והזנחנו את שאר האיברים (שכולם חיוביים).

עכשיו נחזור למשפט הממוצעים ונניח כי $a_1 \leqslant a_2 \dots \leqslant a_n$ (מה שתמיד מותר) וגם ש- $a_1 < a_n$ (כי אחרת המשפט טריביאלי). נסמן ב- A_r, G_r הממוצעים החשבוני וההנדסי בהתאמה של $a_1, a_2, \dots, a_r$. לפי הדרך הרגילה של הוכחות אינדוקטיביות נניח כי $A_{n-1} \geqslant G_{n-1}$. אזי

$$A_n = \frac{(n-1)\,A_{n-1}+a_n}{n} = A_{n-1} + \frac{a_n-A_{n-1}}{n}$$

ממשפט עזר 1 ניתן להסיק ש- $a_n \geqslant A_{n-1}$

ולכן לפי משפט עזר 2,

$$A_n^{\,n} > A_{n-1}^{\,n} + n\cdot A_{n-1}^{\,n-1}\cdot\frac{a_n-A_{n-1}}{n}$$

$$= a_n \cdot A_{n-1}^{\,n-1}$$

$$> a_n \cdot G_{n-1}^{\,n-1}$$

$$= a_n \cdot (a_1\, a_2 \dots a_{n-1})$$

$$= a_1\, a_2 \dots a_n$$

$$= G_n^{\,n}$$

$$A_n > G_n$$

VI הוכחה בלי אינדוקציה

יהיו נתונים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ו- $A = \frac{a_1+a_2\ldots+a_n}{n}$. נניח כי אין כל ה- a_i -ים שווים, והפעם יהיה a_1 הקטן ביניהם ו- a_2 הגדול. נוציא את a_1 ו- a_2 מהקבוצה ונכניס במקומם A, a_1+a_2-A. הסכום, ולכן הממוצע החשבוני, לא ישתנה, מאידך

$$A\,(a_1+a_2-A) - a_1a_2 = (A-a_1)(a_2-A)$$

$$> 0$$

(לפי משפט עזר 1 לעיל) ולכן הממוצע ההנדסי יגדל. תוך לא יותר מ- n צעדים מעין זה נשיג קבוצת מספרים שכולם שווים ל- A ואילו ממוצעם ההנדסי גדול מזה של הקבוצה המקורית. לכן עם הממוצע ההנדסי הזה היה G ברור ש- $G < A$, מ.ש.ל.

VII סכום

הצגנו במאמר זה כמה הוכחות אבל אלה למעשה רק מספר קטן מתוך עשרות הוכחות הידועות עבור המשפט המפורסם הזה. מטרתנו היתה כפולה:-

(i) להוקיע את הליקוי באחת ההוכחות המסורתיות, וגם

(ii) לבחור בהוכחות המתבססות על עקרונות שונים.

אולימפיאדה זוטא במתמטיקה (תשכ"ח)

זה כמה שנים שנוהגים במקומות שונים בעולם לקיים תחרות לאומית במתמטיקה. בתחרויות האלה משתתפים כרגיל תלמידי בתי-ספר על-יסודיים. גם אצלנו הוחלט לקיים תחרות כזאת במכון וייצמן והיא נועדה לחופשת פסח. בגלל מחלת המארגן נדחתה התחרות עד מחרת חג השבועות, 3.6.68. הדחייה הזאת היתה מצערת, בעיקר שהיא מנעה מכמה מבין הנרשמים שישתתפו בגלל עונת הבחינות שמשה לבוא. למרות זה השתתפו 45 תלמידים והתוצאות היו מעודדות מאד. חולקו פרסים כדלקמן:

פרס ראשון: - שבתאי גרצק (חיפה)
פרס שני: - אילן המל (קרית-מוצקין) ויוסף שטמן (אשקלון)
ציונים לשבח: - חיים ברמן (רמת-השרון), יואל וודבוז (פתח-תקוה), אהוד קרני (כפר-סבא) ודורון קרצר (חיפה).

יש לקוות כי מארגני האולימפיאדה למדו מהשגיאות שנעשו בארגון התחרות וכי יוכלו לחזור על המאמץ מדי שנה תוך שיפור מתמיד של הצד הארגוני והמדעי כאחד. למטה אנו מוסרים את גליון השאלות כפי שהוצג בפני המשתתפים, תוך תקוה שקוראים ימצאו בו ענין.

מכון ויצמן למדע

רחובות

- * -

אולימפיאדה זוטא במתמטיקה

יום שני, ז' סיון תשכ"ח-3.6.68

בין השעות 10:30 לפנה"צ עד 1:30 אחה"צ

1. למצא את כל המספרים הממשיים x המקיימים $0 < x < 2\pi$ כך ש-

$$2 \cos x < \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right|$$

(עבור כל מספר חיובי y אנחנו מסמנים ב- $\sqrt{y}$ את השרש הרבועי החיובי של y).

2. למצא את כל הקבוצות של ארבעת מספרים ממשיים (x_1, x_2, x_3, x_4) כך שסכום של כל אחד מהם עם מכפלת שלושת האחרים שווה ל-2.

3. a ו- b הם אורכי שתי צלעות של משולש ו- a>b. אורכי הניצבים לשתי הצלעות האלה מהקדקדים המנוגדים הם h_b, h_a בהתאמה. להוכיח כי $a+h_a \geqslant b+h_b$. באילו תנאים ייתכן שוויון?

4. לחשב:

$$3 \binom{n}{1} + 7 \binom{n}{2} + 11 \binom{n}{3} \ldots + (4n-1)\binom{n}{n} \qquad (i)$$

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 \qquad (ii)$$

5. מערכת המספרים בציור נוצרה כדלקמן:

(i) השורה הראשונה מכילה רק את המספר 1

(ii) בכל שורה אחרי הראשונה כל מספר הוא הסכום של שלושת המספרים הקרובים אליו בשורה שמעליו, ז.א. סכום של המספר שלמעלה ממנו ושל שני שכניו של זה (כשאין שכן לוקחים 0 במקומו).

```
                1
            1   1   1
        1   2   3   2   1
    1   3   6   7   6   3   1
1   4  10  16  19  16  10   4   1
```

אנו מסמנים ב- $B_{n,r}$ $(r = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ את איברי השורה מספרת

(לדוגמה: $B_{5,7}=10;\ B_{4,3}=6;\ B_{2,1}=B_{2,2}=B_{2,3}=1;\ B_{1,1}=1$)

הוכח כי: (i) $B_{n,1} + B_{n,2} \ldots\ldots + B_{n,2n-1} = 3^{n-1}$

(ii) $B^2_{n,1} + B^2_{n,2} \ldots\ldots + B^2_{n,2n-1} = B_{2n-1,2n-1}$

6. למצא מספר שלם a כך ש- $(x-a)(x+10) + 1$ ניתן לפרוק לגורמים $(x+b)(x+c)$ כש- b ו- c הם שלמים.

7. הוכח כי עבור כל u,v,w חיוביים, $\frac{vw}{u} + \frac{wu}{u} + \frac{uv}{w} \geqslant u + v + w$
עם שוויון אך ורק כש- $u=v=w$.

8. הוכח כי- $2^{37}-1$ מתחלק ב- 223.

9. הוכח כי עבור כל n טבעי $(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})$ מתחלק ב- $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.

10. מצולע בעל 2_n צלעות חסום במעגל; n מצלעותיו שוות ל- a ו-n האחרות ל- b. הוכח כי רדיוס המעגל הוא

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab\cos\frac{\pi}{n} + b^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cosec}\,\frac{\pi}{n}$$

- * - * -

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:-

1) לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס).
2) להשתמש רק מצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3) למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ- 15.11.68.
4) לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

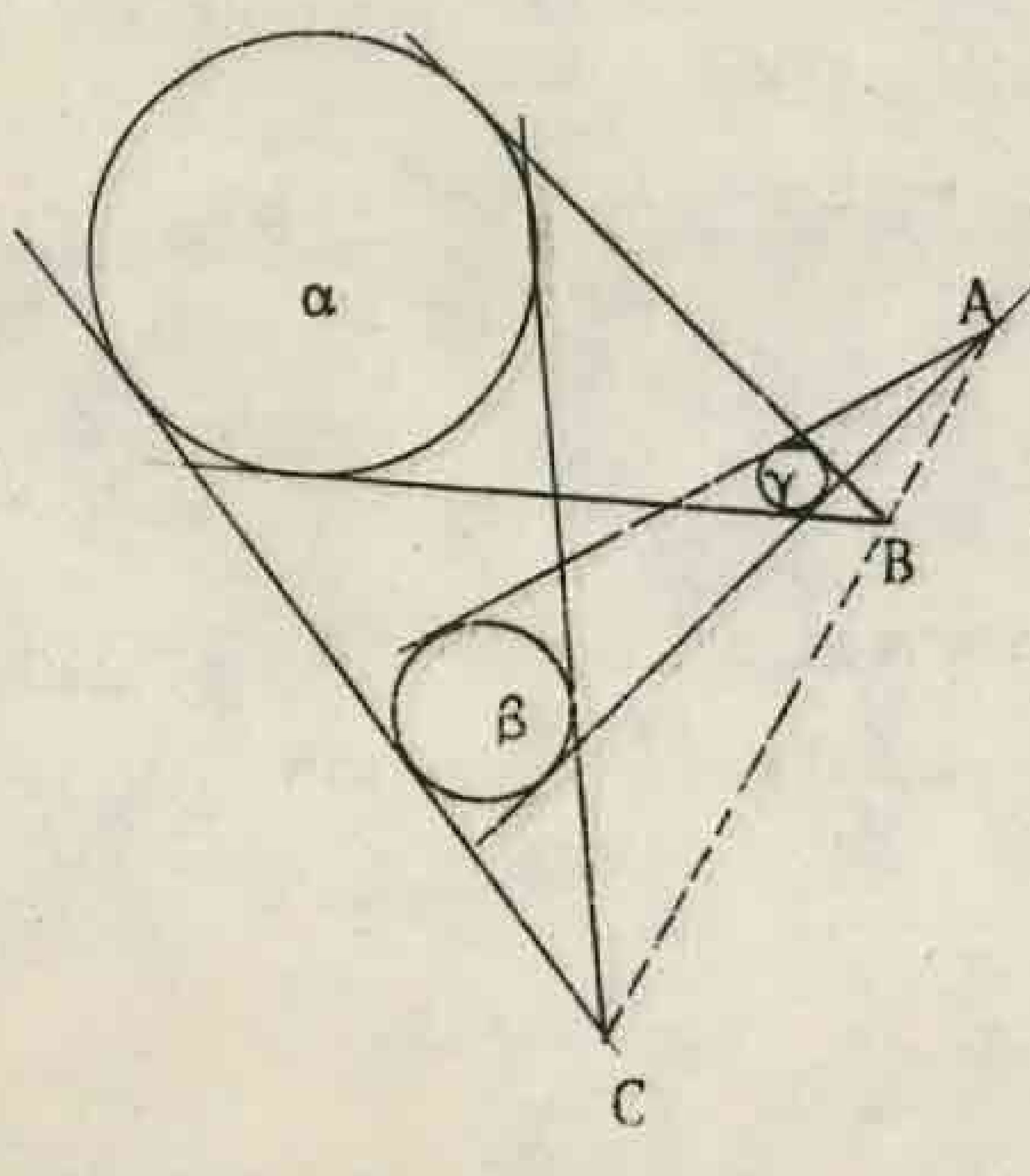
המספר בסוגריים על-יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיועדות לבעיה.

השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' לבד (אין פרוש הדבר שהן קלות).

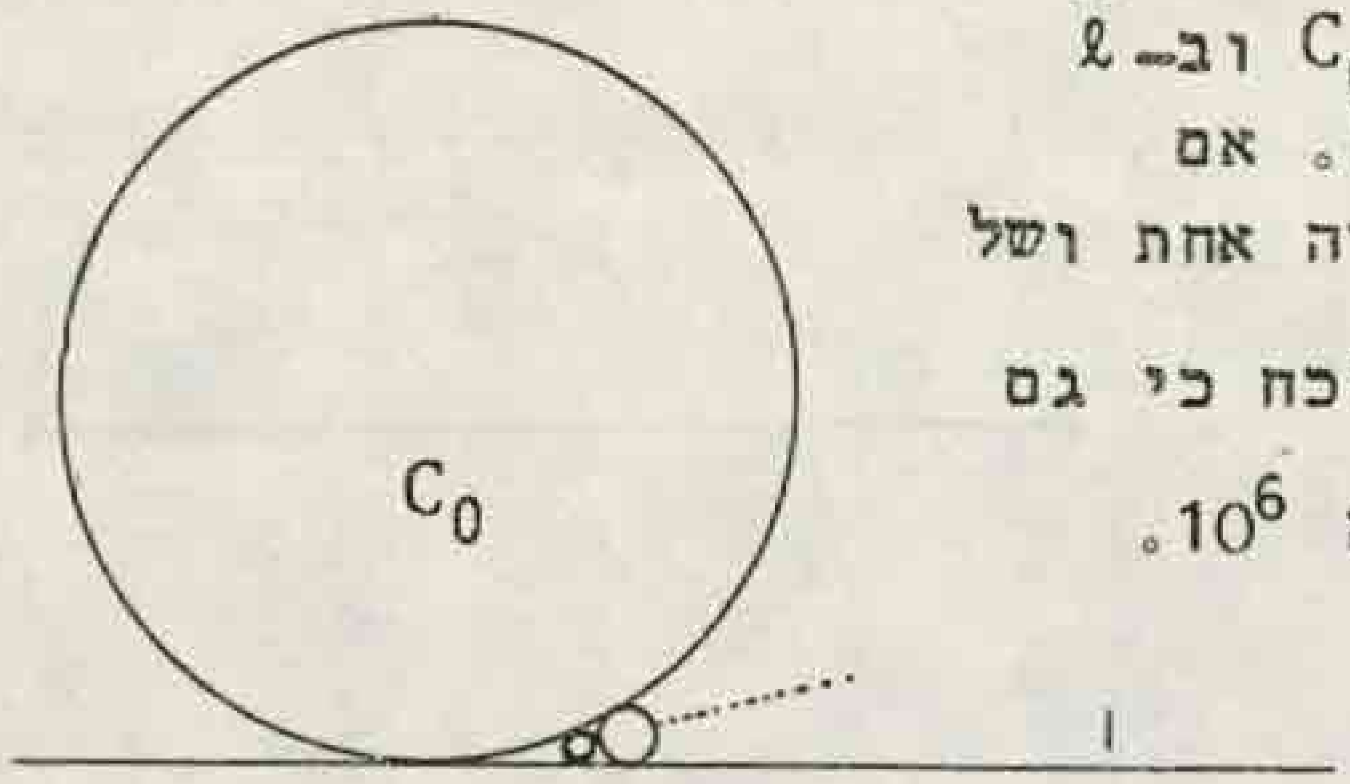
*331 (2) ראובן ושמעון משחקים בקוביה. ההסדר הוא כי המפסיד במשחק הראשון ישלם למנצח אגורה אחת; במשחק השני יזכה המנצח ב-2 אגורות, וכו'. בכל משחק יוכפל התשלום לעומת המשחק הקודם. אחרי משחק מסויים הודיע ראובן, שהתחיל עם הון של שש ל"י ואגורה אחת, כי במשחק אחרון זה גמר בדיוק את כל הונו. כמה משחקים היו ובכמה מהם זכה ראובן בהצלחה?

*332 (3) שלשה איכרים, אברהם, ברוך וגרשון, הלכו לשוק לקנות צאן. גם נשיהם, אורנה, ברכה, וגילה (לאו דוקא באותו סדר) עשו אותו הדבר. כשחזרו הביתה גילו כי כל אחד מהם קנה מספר ראשי צאן שוה למספר הלירות ששלם עבור כל ראש. כל בעל הוציא 75 ל"י יותר מאשתו. אברהם קנה 27 ראשי צאן יותר מגילה וברוך קנה 9 יותר מאורנה. מה שמה של אשת אברהם? (מחירו של כל ראש צאן היה מספר שלם בלירות).

333 (4) יהיו α, β, γ שלשה מעגלים באותו מישור. המשיקים המשותפים החיצוניים ל- γ, β נפגשים ב- A; אלה של γ α נפגשים ב- B, ואלה של α β ב- C (ראה ציור). הוכח כי A, B, C נמצאים על קו ישר.



*334 (4) המעגל C_0 נוגע בקו הישר ℓ; המעגל C_1 נוגע גם ב- C_0 וגם ב-ℓ. עבור $k=2,3,\ldots$, מגדירים C_k כמעגל הנוגע ב- C_0, C_{k-} וב-ℓ (כלם מבחוץ; ראה ציור). אם הרדיוס של C_1 הוא יחידה אחת ושל C_0 הוא 10^6 יחידות. הוכח כי גם הרדיוס של C_{1000} יהיה 10^6.



$C_1 C_2$

335 (3) הוכח כי

$$\operatorname{arc\,ctg} 3 + \operatorname{arc\,ctg} 5 \ldots + \operatorname{arc\,ctg} (2n+1)$$
$$= \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{4}{3} \ldots + \operatorname{arc\,tg} \frac{n+1}{n} - \frac{n\pi}{4}$$

336 (3) הוכח כי ישנם שלשה ערכים של θ בין 0 ל-π המקיימים

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{2 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \frac{4(\cos\theta - \sin\theta)(\cos 2\theta - \sin 2\theta)}{4(\cos 2\theta - \sin 2\theta)^2 - (\cos\theta - \sin\theta)^2}$$

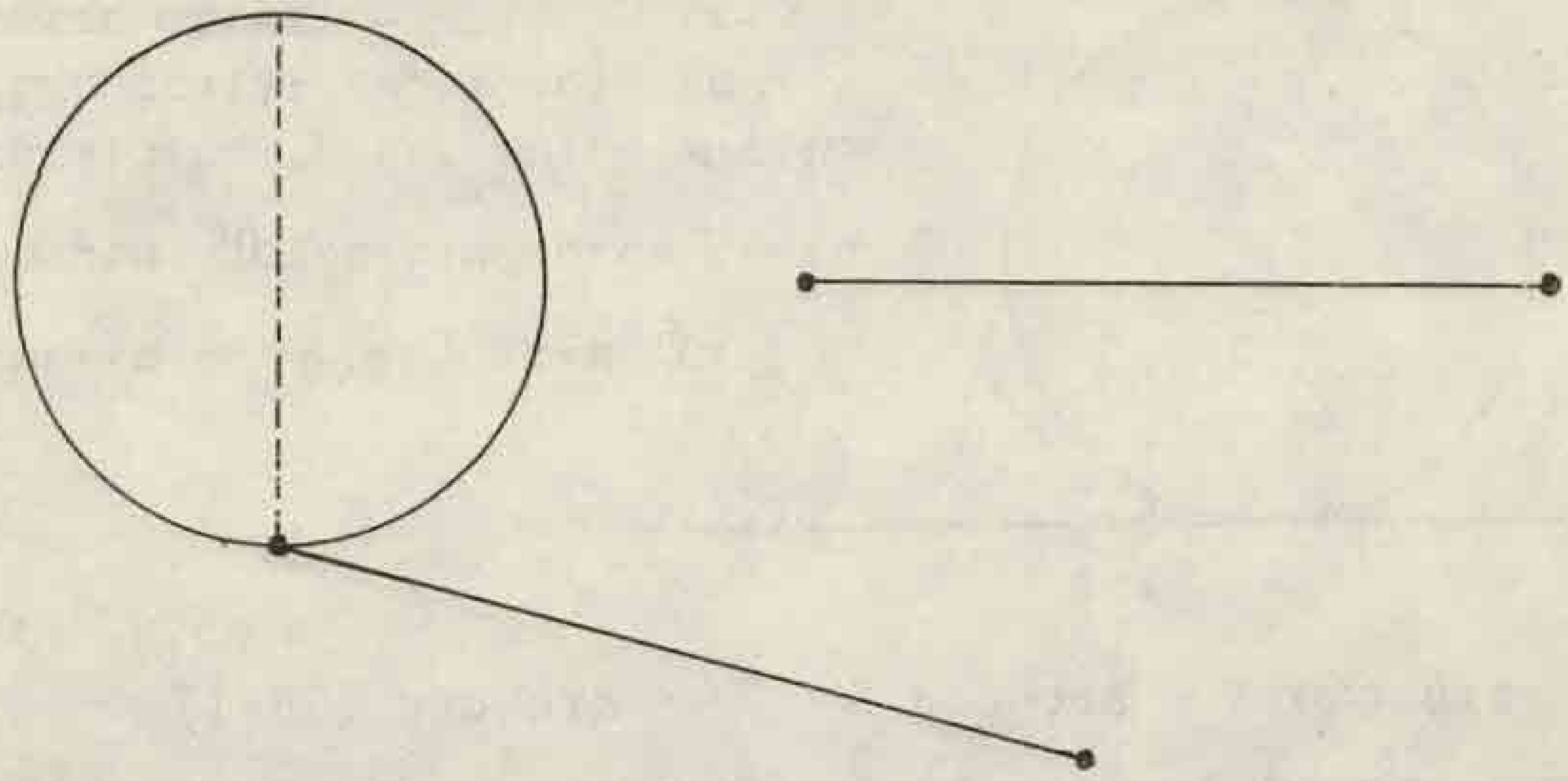
וכי אם נסמן אותם ב- $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, אזי

$$\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_3 = 9$$

337 (4) נתון משלש ABC. על הצלע BC לוקחים $(n-1)$ נקודות כלשהן $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, והישרים $AM_1, \ldots, AM_{n-1}$ מחלקים איפוא את ABC ל-n משלשים קטנים $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. נסמן ב- r_i את רדיוס המעגל החסום ב- Δ_i, וב- ρ_i את רדיוס המעגל החסום בו מבחוץ מול הקדקד A. כמו כן נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום ב-ΔABC וב-ρ את רדיוס המעגל החסום בו מבחוץ מול A. הוכח כי

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$

338 (4) שני עזים נקשרו בשדה; אחד בחוט של 11 מטר אשר קצהו השני הוא על-יד גורן עגול בעל קוטר $\frac{22}{\pi}$ מטר (ואה ציור) בעוד שהשני נקשר באמצע המרעה, ללא בנין שיפריע לו, אבל אורך החוט שלו הוא רק 10 מטר. לאיזה מבין שני העזים יש שטח מרעה גדול יותר?



*339 (2) נתון ש- $(\sqrt{2}+1)^{29}=I+F$ כש- I הוא מספר שלם ו- $0<F<1$,
הוכח כי $F(I+F) = 1$.

340 (3) נתונים m כדורים שחורים ו- n לבנים ורוצים לסדר אותם
בשורה עם כדור שחור בקצה השמאלה ולבן בקצה הימני, כשמספר
הגושים של כדורים שחורים הוא r (מובן כי אז יהיה r גם שוה
למספר הגושים הלבנים). הוכח כי מספר הסדורים האפשריים הוא

$\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}$ (אין מבחינים בין שני כדורים בעלי אותו צבע).

*314 (3) לחשב את הסכום

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

342 (4) נתונים מספרים חיוביים a,b,c,d ו- $a<b<c$, הוכח כי
למשואה

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} + x + d = 0$$

קיימים ארבעה פתרונות ממשיים. הוכח גם כי אם נסמן את הפתרונות
ב- $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ אזי

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} + \frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)} + \frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)} = 0$$

343 (4) הוכח כי אם $a+b+c=0$ אזי

$$a^7 + b^7 + c^7 = 7abc\,(bc + ca + ab)^2$$

344 (3) d,c,b,a הם חיוביים ו- $S = \frac{1}{3}(a+b+c+d)$. ידוע גם כי $S-d,\ S-c,\ S-b,\ S-a$ הם חיוביים, הוכח כי

$$81\,(S-a)(S-b)(S-c)(S-d) \leqslant abcd$$

ושויון אך ורק כש- $a=b=c=d$.

345 (4) עבור x,p,q,r חיוביים הוכח כי

$$px^{q-r} + qx^{r-p} + rx^{p-q} \geqslant p+q+r$$

באילו תנאים יתקיים שויון?

פתרון הבעיין 300-315

300 הפתרון מידי מאחר שקבוצה כזאת מוכרחה להכיל שני מספרים עוקבים.

301 נניח כי $213!=2^a5^bc$ כש- c איננו מתחלק ב-2 או ב-5. אזי ברור כי התשובה על הבעיה תהיה $Min(a,b)$ ז.א. הקטן בין a ו-b. נחשב ראשית את b. רואים מיד כי כל כפולה של 5 בין 1 ל-213 תורמת גורם 5, כפולות של 5^2 תורמות 2 גורמים של s כל אחת, כפולות של 5^3 תורמות 3 גורמים, וכו". יוצא כי

$$b = \left[\frac{213}{5}\right] + \left[\frac{213}{5^2}\right] + \left[\frac{213}{5^3}\right] + \ldots$$

כש- $[x]$ מסמן את החלק השלם של x. מכאן

$$b = 42 + 8 + 1 = 51$$

מאידך

$$a = \left[\frac{213}{2}\right] + \left[\frac{213}{2^2}\right] + \ldots$$

$$= 106 + \ldots > b$$

ולכן הפתרון הוא 51.

302. נסתכל בשורה בה נמצא A ובטור בו נמצא B, ויהיה C התלמיד היושב במפגש של השורה והטור האלה. (C יכול להתלכד עם A או עם B; מתי?) מאחר ש-A הוא הגבוה בשורתו יש לנו $A \geq C$. כמו כן $B \leq C$ ולכן $A \geq B$. אבל נתון כי A שונה מ-B ולכן $A > B$.

303. יהיו המספרים $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ונגדיר $b_r = \sum_{i=1}^{r} a_i \quad (r = 1, 2, \dots, 10)$

אם אחד ה- b_r מתחלק ב-10 (וזה בטח לא יהיה b_1, למה?) הרי שמצאנו פתרון. אחרת ישאירו עשרת ה-b_r-ים שאריות שונות מאפס כשנחלק אותן ב-10. אבל ישנן רק תשע שאריות אפשריות כאלה ולכן ימצאו r ו- s כך ש-b_r ו- b_s ישאירו אותה שארית, ז.א. ש- $(b_r - b_s)$ יתחלק ב-10. אבל $b_r - b_s = \sum_{i=r+1}^{s} a_i$.

זה פותר את הבעיה. אגב אורחא נוכל להסיק מאותה הוכחה תוצאה קצת יותר מרחיקת לכת והיא שאם נסדר את המספרים a_i לפי כל סדר שהוא נוכל תמיד למצוא קבוצה של a_i-ים שכנים אשר סכומם מתחלק ב-10.

304. נצא מהעובדה כי, עבור כל n טבעי, $x^n - 1$ מתחלק ב- $(x-1)$, ומכאן נובע כי $x^{2n} - 1$ מתחלק ב- $(x^2 - 1)$. עכשיו נוכל לכתוב

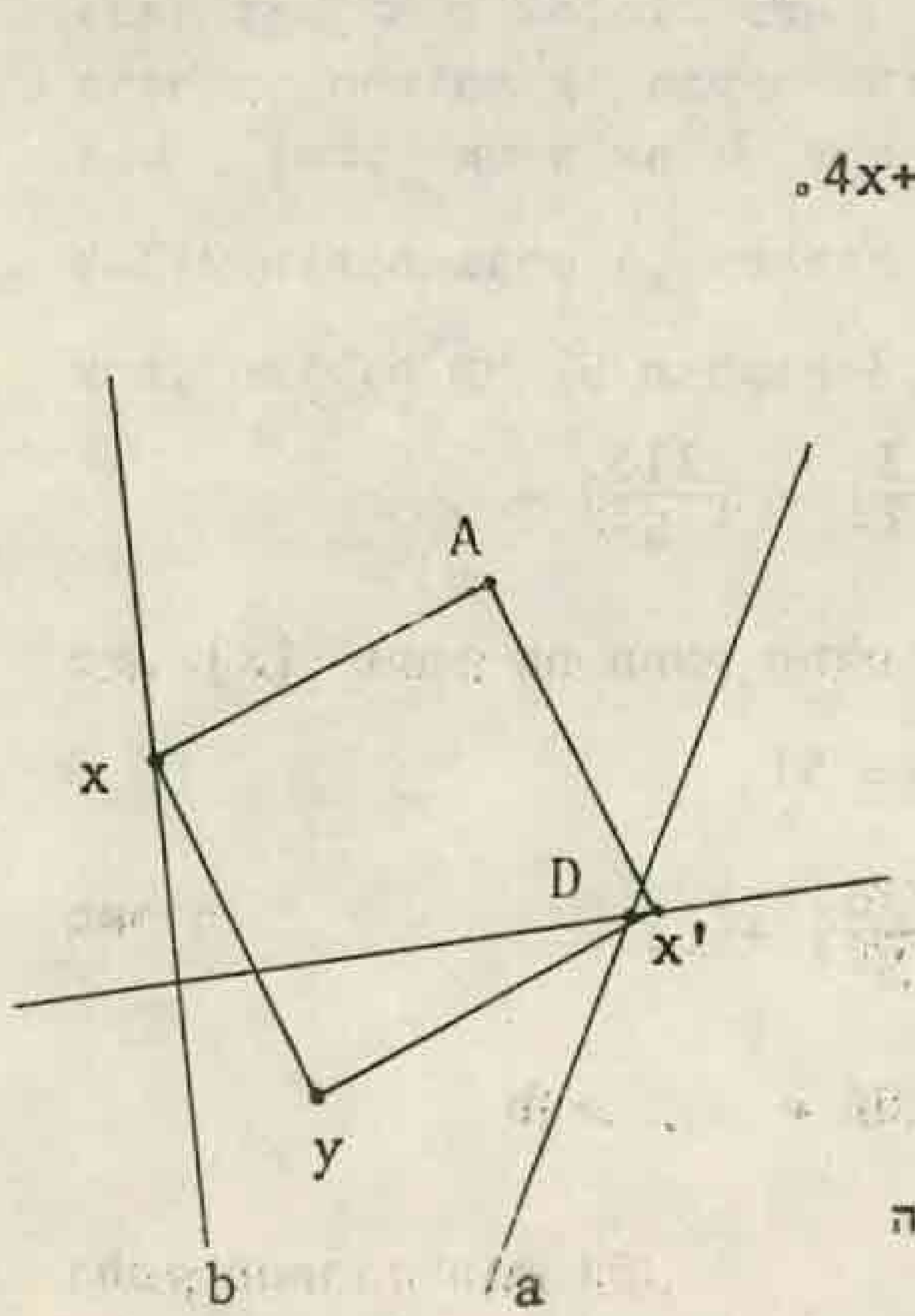
$$x^{179}+x^{167}+x^{53}+x^{17}+1 = x[(x^{178}-1)+(x^{166}-1)+(x^{52}-1)+(x^{16}-1)] + 4x + 1$$

ורואים מיד כי השארית היא $4x+1$.

305. יהיה $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$.

רואים מיד

$xy = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.



306. ראשית נוותר על הדרישה ש- D צריך להיות על d. אם ניקח כל נקודה שהיא, X, על b נוכל להשלים את הריבוע AXYX'. קל לראות כי עבור ה-X-ים השונים יהיה מקום ה- X' הקו הישר שמתקבל ע"י סיבוב של b מסביב ל-A ב- 90°. D יהיה מקום המפגש של הקו הזה עם d.

307. נצייר את המעגל עם מרכז A ורדיוס AB. אם המחוגה ואותו הרדיוס נסמן על היקף המעגל D,C כך ש- $AB = CD = BC$, עכשיו נעביר את המחוגה ל- D,C בהתאמה ומסביב לשניהם שוב נצייר מעגלים עם אותו הרדיוס. נקודת מפגש של שני המעגלים האחרונים תוכל לשמש כנוקדה E.

308. (בהצגת בעיה זו נפלה טעות מצערת, כי הכוונה היתה לכך ש-$AB+AC$ יהיה גדול ככל היותר. רוב הפותרים עמדו על השגיאה, אבל כדי שלא לפגוע באף אחד הענקנו נקודות מלאות עבור הבעיה לכל אלה שהגישו פתרונות בכלל, ואפילו לא נגעו בשאלה זו).

מאחר ש- BC נתון יותר כי AB^2+AC^2 $(=BC^2)$ גם כן נתון. אבל

$$(AB+AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB,AC$$

ולכן אנו רוצים ש- $AB.AC$ יהיה מירבי. במלים אחרות אנו רוצים כי $AB^2 \cdot AC^2$ יהיה מירבי כש- AB^2+AC^2 נתון. זאת בעיה ידועה שפתרונה $AB^2=AC^2$, $AB = AC$.

309. אולי הדרך הקלה ביותר להוכיח את הנוסחה היא ע"י הכפלה ישירה, ולא ניכנס כאן לפרטים הטכניים. מאחר שקיים הקשר הזה בין b,a ו- c נובע כי שלש המשוואות אינן בלתי תלויות. אם התנאי מתמלא יש לנו למעשה רק שתי משוואות ואי-אפשר לקבוע מהן y,x ו- z. במקרה שאין התנאי מתקיים נובע מהאמור כי x,y, ו- z אינם בכלל קיימים.

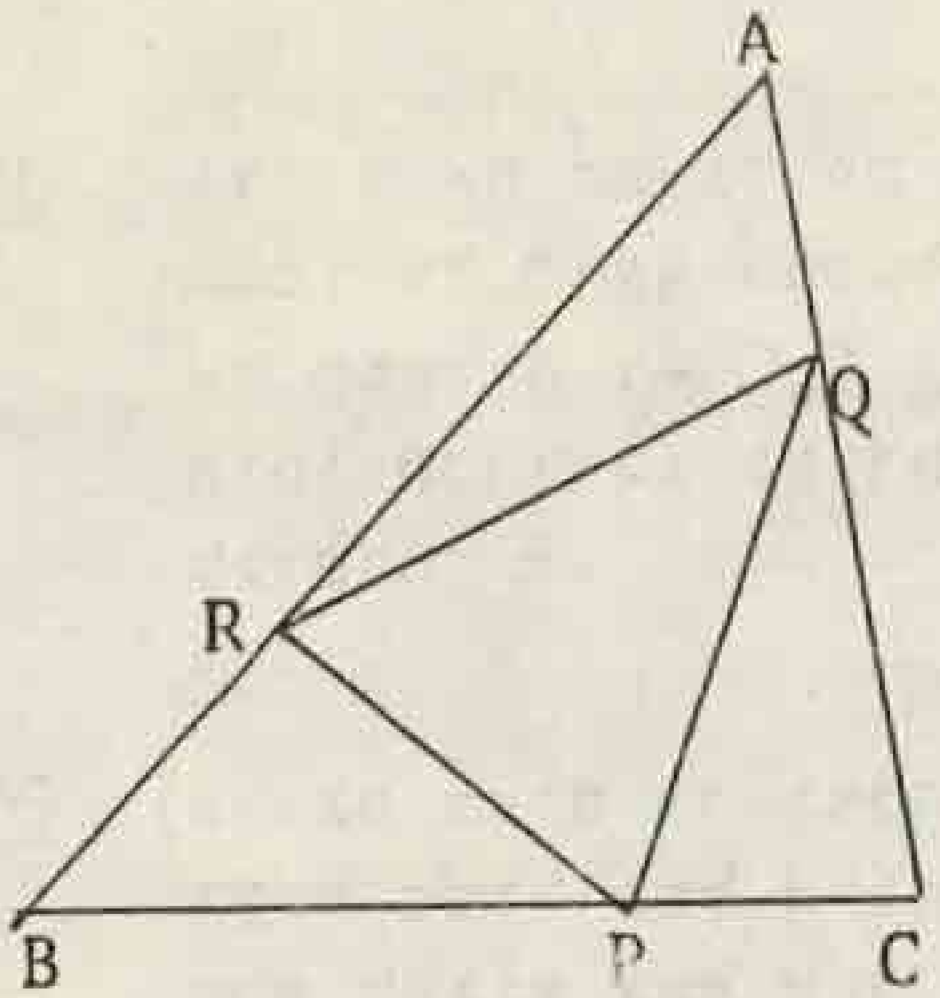
310. באופן קצת יותר כללי ניקח $x_1,x_2,\dots,x_n$ מספרים כלשהם (לאו דוקא שלמים או חיוביים) ונסמן ב-P_r את הסכום של כל המכפלות של r מבין ה- x_i-ים, אזי קל לראות כי

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) = 1 + P_1 + P_2 \dots + P_n$$

במקרה שלנו $x_r=2r-1$ $(n,\dots,2,1=r)$ ולכן

$$1 + Q + Q \dots + Q_n = 2\cdot4\cdot6\cdot\dots(2n) = 2^n \cdot n!$$

(אפשר גם להוכיח את הנוסחה ע"י אינדוקציה).



311. נסמן $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$;

ונכתוב $\frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{RB}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$

אזי יהיו $AR=\lambda c, AQ=(1-\lambda)b$

ולכן, לפי משפט הקוסינוסים

$$QR^2 = \lambda^2c^2+(1-\lambda)^2b^2- - 2\lambda(1-\lambda)bc\cos A$$

נוסחאות דומות קיימות עבור RP^2, PQ^2 ואזי מקבלים

$$QR^2+RP^2+PQ^2 = [\lambda^2+(1-\lambda)^2](a^2+b^2+c^2) - 2\lambda(1-\lambda)(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$$

$$= [\lambda^2+(1-\lambda)^2](a^2+b^2+c^2) - 2\lambda(1-\lambda)[\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}]$$

$$= [a^2+b^2+c^2][\lambda^2+(1-\lambda)^2-\lambda(1-\lambda)]$$

$$= (1-3\lambda+3\lambda^2)(a^2+b^2+c^2)$$

המינימום יושג כש- $1-3\lambda+3\lambda^2 = 3(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ הוא קטן ככל האפשר
ז.א. כש- $1-\lambda = \frac{1}{2} = \lambda$.

312. נכתוב $\theta_r=\frac{r\pi}{15}$, $c_r=\cos\theta_r$ $(r=0,1,\dots,29)$. מאחר ש- $\cos 30\theta_r=1$
אנו רואים כי המספרים c_r יהיו שרשי המשוואה $\cos 30\theta=1$ אם
נציג את $\cos 30\theta$ כפולינום ב- $\cos\theta$. נכתוב $c=\cos\theta$, מסיקים מיד
ממשפט דה-מואבר כי

$$\cos 30\theta=c^{30}-\binom{30}{2}c^{28}(1-c^2)+\binom{30}{4}c^{26}(1-c^2)^2\dots+ + \binom{30}{28}c^2(1-c^2)^{14} - (1-c^2)^{15} = f(c)$$

והמשוואה היא $f(c)-1=0$. המקדם של c^{30} במשוואה זו הוא

$$1+\binom{30}{2}+\binom{30}{4}+\dots+\binom{30}{28}+\binom{30}{30} = \frac{1}{2}[(1+1)^{30}+(1-1)^{30}]$$

$$= 2^{29}$$

ואילו האיבר האבסלוטי הוא 2^{-} . מזה נובע כי

$c_0c_1c_2\cdots c_{29} = -\frac{1}{2^{28}}$ אבל $c_{r+15} = -c_r$

ולכן $-(c_0c_1\cdots c_{14})^2 = -\frac{1}{2^{28}}$, ז.א. $\prod_{r=0}^{14} c_r = \pm\frac{1}{2^{14}}$

במכפלה האחרונה האיברים השליליים הם הקשורים עם $8<r<14$,

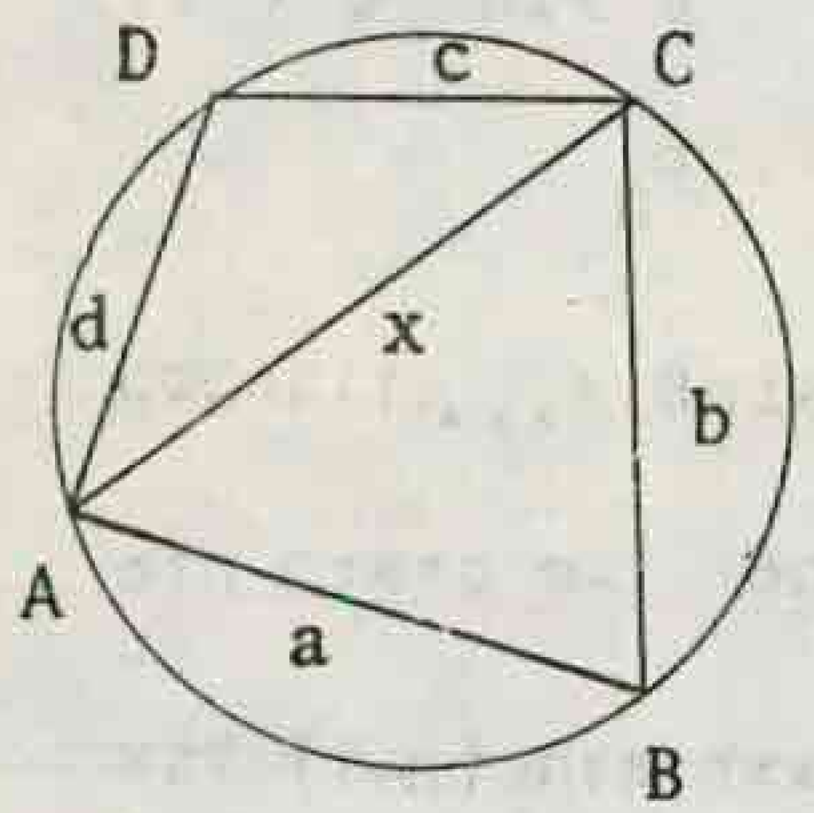
ז.א. שבע במספר ולכן $\prod_{r=0}^{14} c_r = -\frac{1}{2^{14}}$. אבל שוב $c_0=1$,

$$c_r = -c_{15-r}$$

$$-\frac{1}{2^{14}} = -\left(\prod_{r=1}^{7} c_r\right)^2$$

ולכן $\prod_{r=1}^{7} c_r = \pm\frac{1}{2^7}$. אבל כל איברי המכפלה האחרונה חיוביים.

.313 יהיה $AC=x$, יש לנו (ראה ציור)



$$x^2 = c^2+d^2-2cd\cos D$$
$$= a^2+b^2-2ab\cos B$$
$$= a^2+b^2+2ab\cos D$$

ולכן $\cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}$

מכאן נובע כי

$$\sin^2 D = (1-\sin D)(1+\sin D)$$

$$= \frac{\{2(ab+cd)-[c^2+d^2-a^2-b^2]\}\{2(ab+cd)+[c^2+d^2-a^2-b^2]\}}{4(ab+cd)^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]}{4(ab+cd)^2}$$

$$= \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}$$

$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2}$$

מאידך
$$x^2 = c^2 + d^2 - \frac{2cd\ [c^2+d^2-a^2-b^2]}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

אם R הוא רדיוס המעגל, קיים $R = \frac{x}{2\sin D}$ ולכן, לפי האמור לעיל

$$R^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{4(ab+cd)} \cdot \frac{(ab+cd)^2}{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

והמסקנה נובעת מיד.

<u>314</u>. נוכיח כי, עבור כל n טבעי אי-זוגי $\sin n\theta - n\sin\theta$ מתחלק ב- $\sin^3\theta$, כי ממשפט דה-מואבר נובע ש-

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\ \sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\ \sin^3\theta + \ldots$$

$$= n\cos^{n-1}\theta\ \sin\theta - \sin^3\theta \cdot F_n$$

כשכתבנו $F_n = \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta - \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\ \sin\theta + \ldots$

מזה רואים ש- $-n\sin\theta(1-\cos^{n-1}\theta)-\sin^3\theta\cdot F_n=\sin n\theta-n\sin\theta$

אבל $(n-1)$ הוא זוגי ולכן $1-\cos^{n-1}\theta$ מתחלק ב- $1-\cos^2\theta$

ז.א. $\sin^2\theta$.

עכשיו נבוא לבעיה שלנו.

$$23\sin 19\theta - 19\sin 23\theta$$

$$= 23\,[\sin 19\theta - 19\sin\theta] - 19\,[\sin 23\theta - 23\sin\theta]$$

ושני החלקים מתחלקים ב- $\sin^3\theta$.

315. נתחיל במשפט עזר קל:- בין כל המשלשים החסומים במעגל נתון והעומדים על בסיס נתון, יהיה משלש שווה-השוקיים השטח הגדול ביותר. (נשאיר לקורא להוכיח משפט זה). עכשיו יהיה ABC המשלש החסום בתוך מעגל נתון אשר שטחו מירבי. אם $AB \neq AC$ נוכל למצוא משלש יותר גדול על הבסיס BC, הוא המשלש שווה-השוקיים על בסיס זה, ודבר זה היה סותר את התכונה של ABC, מכאן $AB = AC$ ובדרך דומה $AB=BC$.

"פרשה" בתולדות המתמטיקה

בשנת 1535 מצא מתמטיקאי איטלקי טרטליה (Nicolo Tartaglia) שיטה כללית לפתרון משואות מהסוג

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

אבל החליט לשמור את שיטתו בסוד, כי בתקופה ההיא היה נהוג שהמתמטיקאים היו מעמידים בעיות לפתרון בצורת תחרות, וכמה מהבעיות האלה היו תמיד קשורות בפתרון משואות מיוחדות מהסוג המדובר. ידיעת טכניקה כללית לפתרון כל משואה כזאת היוותה איפוא אמצעי חשוב להצליח בתחרויות האלה.

באותו זמן חי במילנו מדען בשם קרדנו (Girolamo Cardano) שהיה בעל כשרונות גדולים, אבל גם שחצן ושאפתן. קרדנו עמד לפרסם ספר מתמטי ובקש לכלול בו את שיטתו של טרטליה, אשר על קיומה נודע לו ממקורות אחרים. טרטליה השיב שכשיחליט לפרסם את פתרונו יעשה זאת בספר משלו. אבל אחרי הפצרות רבות (אשר כללו גם עלבונות ואיומים) נכנע טרטליה לפשרה, והיא שהסכים לגלות את שיטתו לקרדנו בתנאי שזה לא יפרסמה, ואמנם קרדנו נשבע בכל מיני שבועות לשמור את השיטה בסוד ורק ליהנות ממנה כמדען.

קרדנו הפר את שבועתו ופרסם את השיטה בספרו. לזכותו ייאמר כי הבהיר בספר שהפתרון הוא של טרטליה. למעשה נעשתה הבגידה הגדולה יותר לא ע"י קרדנו, כי אם ע"י ההסטוריה. כי למרות זה שקרדנו ייחס את הפתרון לטרטליה, ידועה השיטה עד היום הזה בשם "נוסחת קרדנו".

רשימת פותרי הבעיות מס' 300 - 315
(בסוגריים ס"ה הנקודות של הפותר)

1.	אברבוך דוד	י"א	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(14)
2.	בהגן יוסף	י"א	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(38)
3.	בן-נתן יעקב	י"א	בית-ספר טשרניחובסקי, נתניה	(38)
4.	גבאי משה		צ.ה.ל.	(31)
5.	גולדהירש יצחק	י"ב	בי"ס תיכון, נצרת-עלית	(45)
6.	דוני צפי	י"א	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(11)
7.	הופר חיים	י'	ישיבת מרום-ציון, ירושלים	(6)
8.	המל אילן	י"א	בי"ס ע"ש א. לוינהרץ, קרית-מוצקין	(25)
9.	הראל יהודה		צ.ה.ל.	(8)
10.	הראל צבי	י"ב	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(41)
11.	הרש סרג'יו	י"ב	תיכון עירוני ו', תל-אביב	(44)
12.	וייס דוד	ט'	ביה"ס להנדסה ע"י אוניברסיטת ת"א	(6)
13.	חביב חיים		צ.ה.ל.	(19)
14.	נחליאלי ישראל	י"ב	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(35)
15.	ניסנבוים יורם	י'	בית-הספר הריאלי העברי, חיפה	(30)
16.	סגל מרדכי	י"א	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(39)
17.	סופרמן זיו	י'	הגמנסיה העברית, ירושלים	(43)
18.	צוקרמן משה	י'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(26)
19.	ציליברג דורון		חולון	(23)
20.	קליין אמריך	י"ר	בי"ס ע"ש טשרניחובסקי, נתניה	(41)
21.	קנדל שמואל	י'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(11)
22.	קרונמן גבריאל		צ.ה.ל.	(22)
23.	שוחט חיים	י"ב	בי"ס אהל-שם, רמת-גן	(41)
24.	שייניגר אורי	י"א	בי"ס הריאלי העברי, חיפה	(21)
25.	שפירא רוני	י'	תיכון עירוני א', תל-אביב	(17)
26.	שריר מיכה	י"ב	תיכון ע"ש קוגל, חולון	(45)

ה ת כ ן

		עמוד
דבר המערכת		1
בעיה		1
משושה קסם	רן דונגי	2
פתרון הבעיה מעמוד 1		3
בעית טארי - אסקוט (מדור מתקדם)	יוסף בן-דב	4
צפור אחת בשתי אבנים - ממוצעים		14
אולימפיאדה זוטא במתמטיקה (תשכ"ח)		19
בעיות חדשות		22
פתרון הבעיות ת. 300 - 315		25
"פרשה" בתולדות המתמטיקה		31
רשימת פותרי הבעיות מס. 300 - 315		32

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.