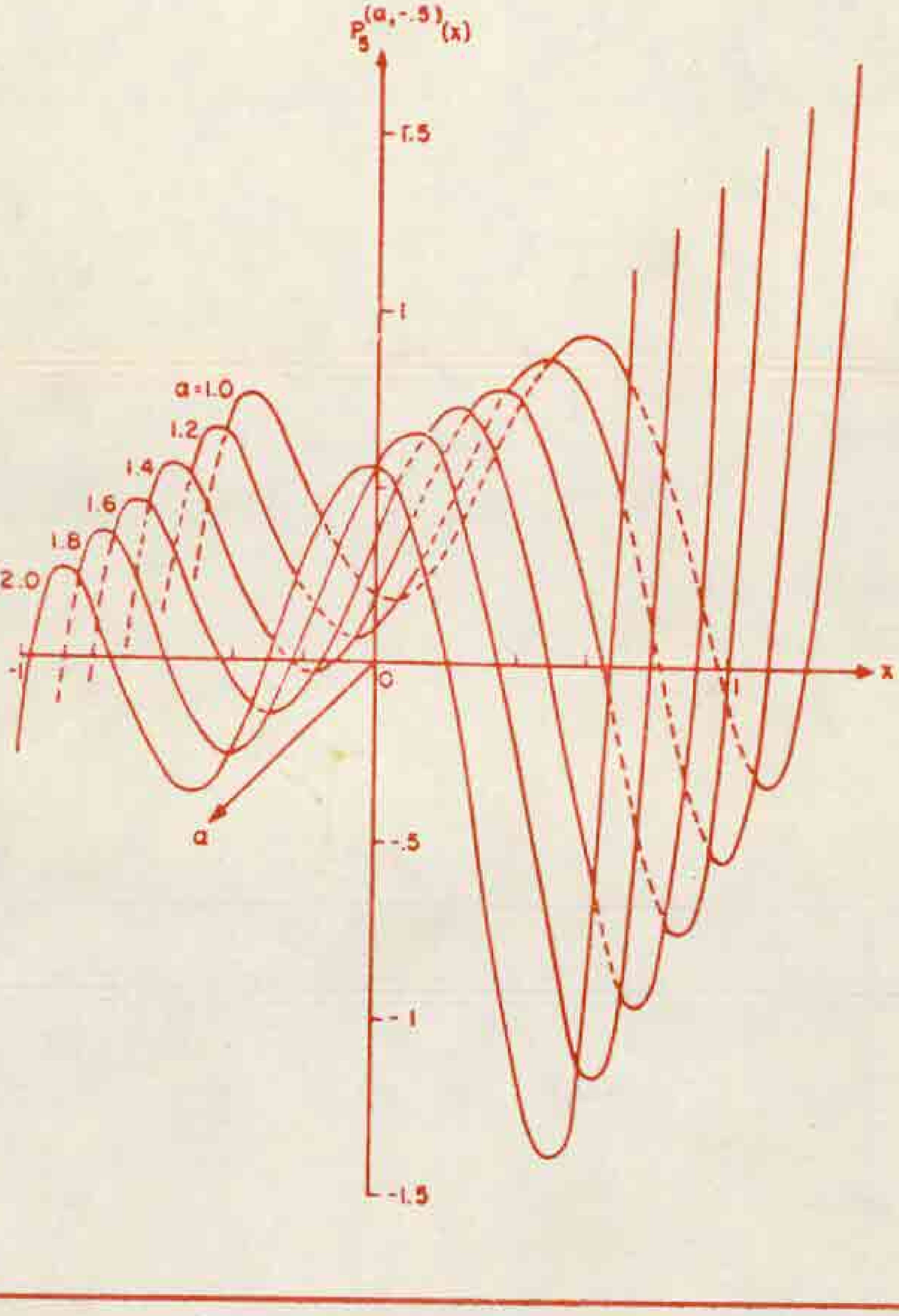
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 3 — שבט תשכ"ט - ינואר 1969 — מס 7

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

אנו מציינים בסיפוק כי בחוברת זו מופיעים שלושה מאמרים שנתרמו ע"י קוראים. תופעה זו הופכת לשכיחה ואנו מקווים כי עם הזמן ילך ויגדל חלקם של צבור הקוראים בחבור המאמרים.

בהזדמנות זו אנו מפנים את תשומת לבם של הקוראים לאולימפיאדה לנוער במתמטיקה, שתתקיים במכון וייצמן למדע ביום 1.4.1969. פרטים נוספים וגם טופס הרשמה נמצאים בדף המצורף לחוברת הזאת.

בעיה ופתרונה

בעל מכונית חדשה משתמש בצמיגים המסוגלים לנסוע בדיוק 20,000 ק"מ. בדעתו להשתמש במכונית ל- 45,000 ק"מ והוא רוצה להכין מראש מלאי מספיק של צמיגים. מה המספר הקטן ביותר של צמיגים שיוכל להסתפק בהם?

(הפתרון בעמ' מס.8).

"... אם יש מכאב כמכאבי..."

1. השאלה

במגילת איכה (פרק א', פסוק י"ב) מקונן הנביא ואומר: "לא אליכם כל עוברי דרך! הביטו וראו אם יש מכאב כמכאבי...". השאלה ששאלנו את עצמנו היתה בקשר לגודל המשימה שהטיל הנביא על האיש שעבר לפי תומו. במלים אחרות, כמה פעמים עשוי עובר הדרך שיצטרך להביט עד אשר אומנם ימצא מישהו אשר מכאבו איננו קטן ממכאבן? כדי לתת למושגים האלה צורה כמותית וע"י כך לתרגמם לשפת המתמטיקה נקדים מבוא קצר.

2. מושגי יסוד בהסתברות

למטרתנו נוכל להסתפק במושגים פשוטים ואלמנטריים ביותר. נניח כמושג יסודי את זה של שני מאורעות "בעלות אותה הסתברות" או "מאורעות שוות הסתברות", כשאין לנו שום סיבה לראות אחת מהן כיותר סבירה מהשניה. עכשיו נניח שאנו עושים איזה נסיון אשר לה n תוצאות אפשריות בעלות הסתברויות שוות, כש- m מתוך אלה נחשבות בחיוביות. במקרה זה נאמר שההסתברות של תוצאה חיובית היא $\frac{m}{n}$. לדוגמה נניח שזורקים קוביה ושאפשר להניח כי כל שש המספרים האפשריים הם בעלי אותה הסתברות. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?

במקרה כזה התוצאות האפשריות הן 1, 2, 3, 4, 5, או 6 והתוצאות ה"חיוביות" הן 2, 4, 6. רואים איפוא כי $m = 3$, $n = 6$ ולכן ההסתברות של תוצאה זוגית היא $\frac{3}{6}$, ז.א. $\frac{1}{2}$.

נעבור עכשיו לדוגמה קצת יותר מסובכת, והיא של זריקת שתי קוביות. התוצאות האפשריות עכשיו הן זוגות מספרים טבעיים (h,k) כש- $1 \leqslant h \leqslant 6$, $1 \leqslant k \leqslant 6$. מה ההסתברות לקבל שני מספרים שווים? כאן המקרים החיוביים הם הזוגות (h,h), $1 \leqslant h \leqslant 6$ שהם 6 במספר מתוך כלל התוצאות, שהן 36 במספר. התשובה היא איפוא $1/6$. מה ההסתברות לקבל זוג שסכומם הוא רבוע משוכלל? האפשרויות החיוביות הן כש- $h + k$ שווה ל- 4 או 9, כי ברור ש- $2 \leqslant h+k \leqslant 12$. לכן נשאר לבדוק כמה זוגות מקיימים אחד התנאים $h + k = 4$ או $h + k = 9$. את התנאי הראשון מקיימים $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$; ואת התנאי השני מקיימים $(6,3)$, $(5,4)$, $(4,5)$ ו- $(3,6)$. אנו רואים כי כאן 7 מתוך 36 האפשרויות הן חיוביות ולכן ההסתברות היא $7/36$.

באופן כללי נדבר על ההסתברות של קבוצה K של תוצאות אפשריות (תמיד לפי ההנחה שהן שוות ביניהן). אם המספר הכללי של תוצאות אפשריות הוא n ומספר התוצאות הכלולות בקבוצה K הוא m, אזי ההסתברות של הקבוצה K היא $\frac{m}{n}$.

עכשיו נבוא למושג נוסף. נניח כי מדובר באיזה נסיון שיכול להוביל לקבוצה R של תוצאות שוות אשר קבוצה חלקית ממנה, K, היא קבוצת התוצאות החיוביות. נניח כי K_1 היא קבוצה חלקית של K וכי מספר האיברים ב־R, K ו־K_1 הוא n, m, m_1 בהתאמה. נסמן ב־p, p_1 את ההסתברות של K, K_1 בהתאמה. אם נסמן ב־$(K-K_1)$ את קבוצת אותם האיברים של K אשר אינם שייכים ל־K_1 רואים מיד כי מספר האיברים ב־$(K-K_1)$ הוא $m-m_1$ ולכן ההסתברות של קבוצה זו היא $\frac{m-m_1}{n}$, ז.א. $p-p_1$.

3. מושגים נוספים בהסתברות

מהאמור לעיל נובע כי לתופעה ודאית יש ליחס את ההסתברות 1, כי במקרה זה התוצאות החיוביות הן האוסף של כל תוצאות האפשריות. כי אילו היתה קיימת אפשרות שלילית הרי אז לא היתה התוצאה הנדונה ודאית. כמו כן ברור שתוצאה בלתי אפשרית היא בעלת הסתברות 0.

נניח עכשיו שאנו מבצעים איזה נסיון שהתוצאה שלו תהיה איזה מספר (לאו דוקא חיובי או שלם). אם המספרים האפשריים הם $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כשההסתברויות של התוצאות האלה הן $p_1, p_2, \ldots, p_n$ אנו מגדירים את <u>התוחלת</u> או <u>הערך הצפוי</u> של המספר ע"י הסכום $p_1x_1+p_2x_2 \ldots +p_nx_n$. מאחר ש־ $p_1 + p_2 \ldots +p_n = 1$ (כי ההסתברויות האלה ממצות לפי ההנחה את כל האפשרויות) אנו רואים כי התוחלת היא למעשה ממוצע משוקלל של התוצאות.

נקח לדוגמה זריקת שתי קוביות כשאנו מעונינים בסכום של המספרים שיתקבלו. הערכים האפשריים עבור סכום זה הם כל מספר מ־2 עד 12, אלא שלא לכל אחד תהיה אותה הסתברות, כי ראינו כבר שמספר האופנים אשר בהם יכולות הקוביות ליפול הוא 36. רואים מהטבלה את הזוגות הנותנים את הסכומים השונים.

סכום	ז ו ג ו ת	מספר הזוגות	
2	(1,1).	1	1/36
3	(1,2), (2,1).	2	2/36
4	(1,3), (2,2), (3,1).	3	3/36
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	4/36
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5	5/36
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6	6/36
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5	
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4	
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3	
11	(5,6), (6,5)	2	
12	(6,6)	1	1/36

לפי זה קל לחשב את ההסתברויות של הסכומים השונים, למשל ההסתברות לקבל את הסכום 4 היא $\frac{3}{36}$, ז.א. $\frac{1}{12}$. לפי ההגדרות האלה נוכל להגיד כי התוחלת של הסכום היא

$$7 = \frac{1}{36}\ (1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+5\times8+4\times9+3\times10+2\times11+1\times12)$$

4. הבעייה התנ"כית

לשם טפול בבעיתנו נצטרך להניח כמה הנחות יסוד. למעשה נוכל להסתפק בהנחות הבאות (שהן סבירות למדי): -

(א) הכאב של בן-אדם ניתן למדידה, ואפשר תמיד להגיד על שני בני-אדם של מי הכאב הגדול יותר (בעצם טמונה הנחה זו כבר בצעקת הנביא, כי אחרת אין משמעות לפסוק).

(ב) ההתפלגות של כאבים אצל בני-אדם היא ללא משוא פנים, ולכל אחד יש אותו סיכוי לסבל ובאותה מידה.

(ג) המקרה שלשני בני-אדם תהיה בדיוק אותה עצמה של כאב היא כה נדירה שאפשר להזניח את הסתברותה.

עם ההנחות האלה נוכל לגשת לבעיה. נניח כי עובר הדרך נענה לבקשת הנביא ומתחיל לבדוק כאבי בני-אדם עד אשר הוא מוצא אחד אשר כאבו גדול משלך. נסמן ב- p_r את ההסתברות שהאומלל הזה הוא האיש מספר r בין אלה שנבדקו. עם זה תיגמר הבדיקה, ז.א. שההסתברות היא p_r שיהיה צורך להביט ב- r מקרים. התוחלת של מספר ההבטות ניתנת איפוא, ע"י הנוסחה

$$(1) \qquad T = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \ldots$$

ואת המספר הזה אנו רוצים לחשב.

למטרה זו נסמן ב-P_n את הסתברות העובדה ש- $n < r$. מאחר שאפשר להציג את המקרה $n=r$ ע"י הצרוף $n-1 < r$ אבל $n \not< r$ יוצא מהשקולים בסוף סעיף 2 כי $p_n = P_{n-1} - P_n$ ולכן.

$$(2) \quad T = (P_0-P_1)+2(P_1-P_2)+3(P_2-P_3)+4(P_3-P_4)+\ldots$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

ועלינו להעריך אם כן את הסכום האחרון. נסתכל לרגע ב- P_n. אם נסמן את עצמת כאבן ב-X_0 ואילו זו של n הנבדקים הראשונים ע"י $X_1, X_2, \ldots, X_n$, אנו רואים כי P_n הוא ההסתברות שמתוך $n+1$ המספרים $X_0, X_1, \ldots, X_n$ יהיה X_0 הגדול ביותר. אבל מהנחה ב) בסעיף 4 נובע כי המאורעות "X_r הוא הגדול ביותר מתוך ה-$(n+1)$", $(r = 0,1,\ldots,n)$ הן בעלות הסתברויות שוות. מהנחה ג) נובע שאחד מהם מוכרח להיות הגדול ביותר ולכן $P_n = \frac{1}{n+1}$.
עכשיו קל לראות מ-(2) כי

$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

סכום הידוע במתבדר, ז.א. שהסכום ילך ויגדל מעל לכל גבול אם נקח מספיק איברים. למעשה ידוע כי הסכום $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{N} - \log_e N$ שואף לערך קבוע כש- N הולך וגדל. הקבוע הזה ידוע בשם "הקבוע של אוילר" ונוהגים לסמנו ב- γ. ערכו קרוב ל- 0,5772. מכל זה יוצא שהמספר הצפוי של נסיונות שיהיה על עובר הדרך לבצע עד שימלא את פקודת הנביא הוא אין-סופי!

שקילות משולשים

י. קופיץ (תל-אביב)

א. מבוא

אנו אומרים ששני מצולעים A, B הם שקולים אם אפשר לחלק את A למשולשים $A_1, A_2, \dots, A_n$ ואת B למספר שווה של משולשים $B_1, B_2, \dots, B_n$ כך ש- A_1 חופף ל- B_1, A_2 ל- B_2 וכו'. במקרה המיוחד ש- A ו- B הם בעצמם משולשים נוכל להוכיח כי תנאי מספיק והכרחי לשקילות A ו- B הוא שיהיו בעלי שטחים שווים. מטרתנו כאן היא להוכיח תנאי זה. הכרחיותו מובנת מאליה, ונשאר להוכיח כי הוא גם מספיק.

ב. תכונות יחס השקילות

את העובדה ששני מצולעים A ו- B שקולים נסמן ב- $A \approx B$. ברור כי מ- $A \approx B$ נובע ש- $B \approx A$, ז.א. שהיחס הוא חילופי. נוכיח שהוא גם טרנסיטיבי, ז.א. ש- $A \approx B$ ו- $A \approx C$ גוררים $B \approx C$.

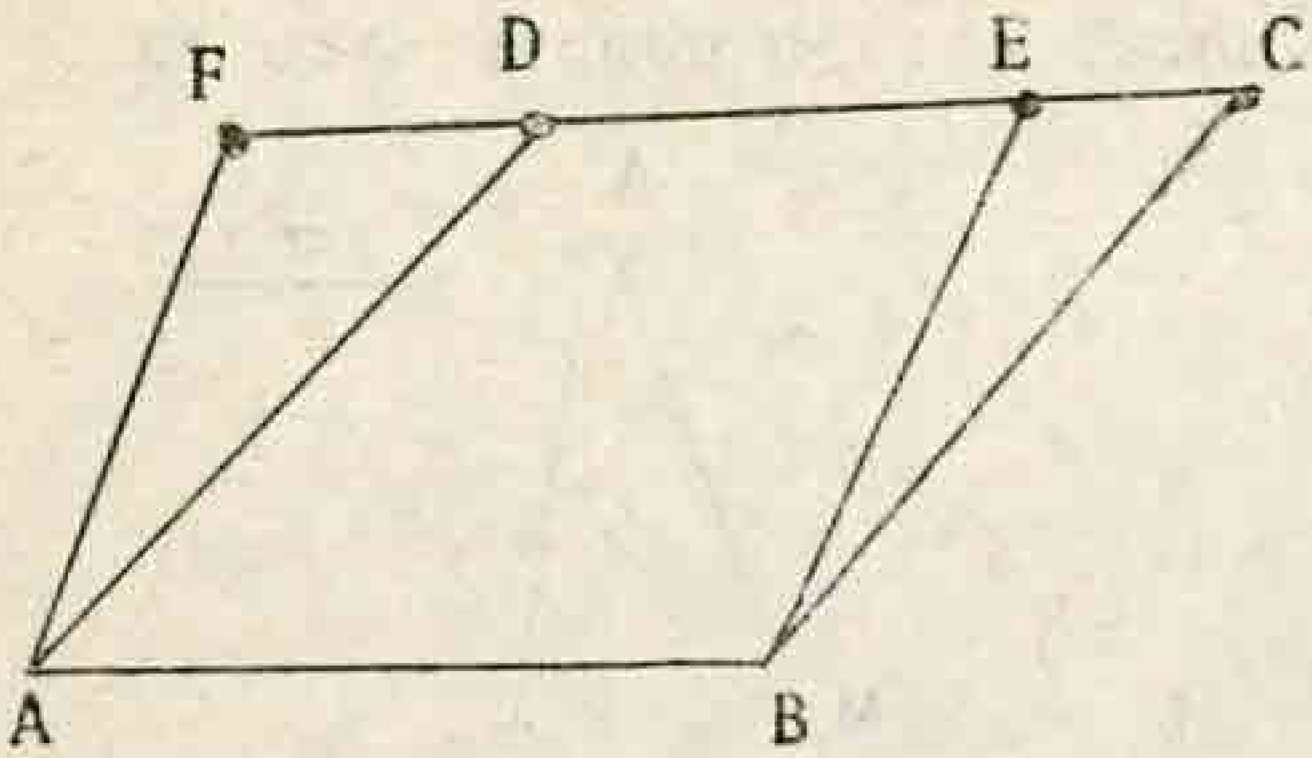
הוכחת הטרנסיטיביות

מ- $A \approx B$ נובע שאפשר לבתר את A ו- B לחלקים חופפים. נניח שעשינו את זה ע"י קוים אדומים. כמו כן קיים $A \approx C$ ולכן אפשר לבתר את A ו- C, נגיד ע"י קוים ירוקים, לחלקים חופפים. נניח שאיזה משולש ירוק C_s ב- C מחולק ע"י קוים אדומים למצולעים, אזי במשולש הירוק A_s ב- A (החופף ל- C_s) נעביר אותם קוים אדומים; וכן נעשה לגבי כל משולש ירוק ב- C. כמו כן נחלק כל משולש אדום ב- B על ידי קוים החופפים את הקוים הירוקים המחלקים את המשולש האדום החופף ב- A. קל להיווכח שעם הוספת כל הקווים האלה יחולקו B ו- C למצולעים חופפים.

ג. שני משפטי עזר

משפט I. שתי מקביליות השוות בבסיס ובגובה - שקולות.

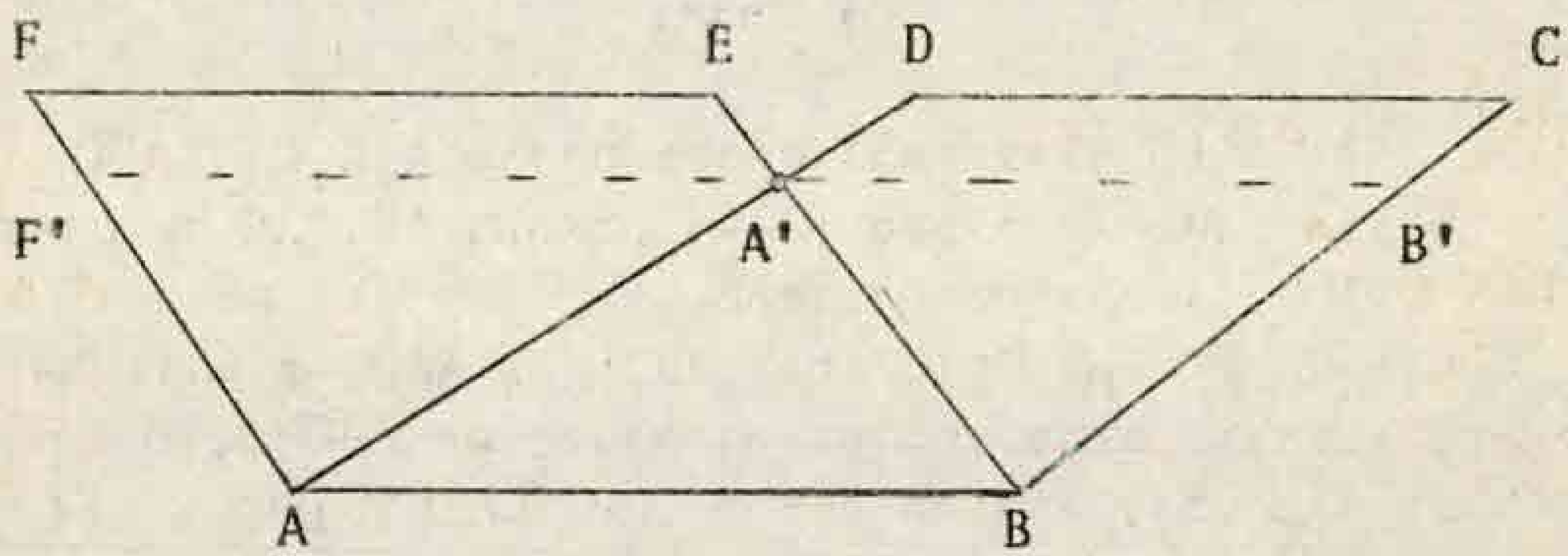
<u>הוכחה</u>: מאחר שבסיסי המקביליות שוות נוכל לצייר את שתיהן על אותו בסיס; יהיו איפוא המקביליות ABCD ,ABEF. לשתי המקביליות אותו גובה ולכן יהיו F,E,D,C בקו אחד מקביל ל- AB.



ציור 1

(1) בציור לקחנו את המקרה ש- E נמצא בין C ל- D ואז הדבר ברור; כי ABED משותף לשתי המקביליות ואילו BCE, ADF חופפים זה לזה.

(2) במקרה ש- E הוא מחוץ ל- CD נסתכל בציור מס. 2.



ציור 2

החלקים ABB'A' ,ABA'F' שקולים לפי המקרה הקודם. כדי לבדוק את החלקים A'B'CD ,F'AEF נזיז את F'A' שיפול על A'B'. קל לראות כי אחרי מספר סופי של חלוקות והזזות כאלה נגיע למקרה (1).

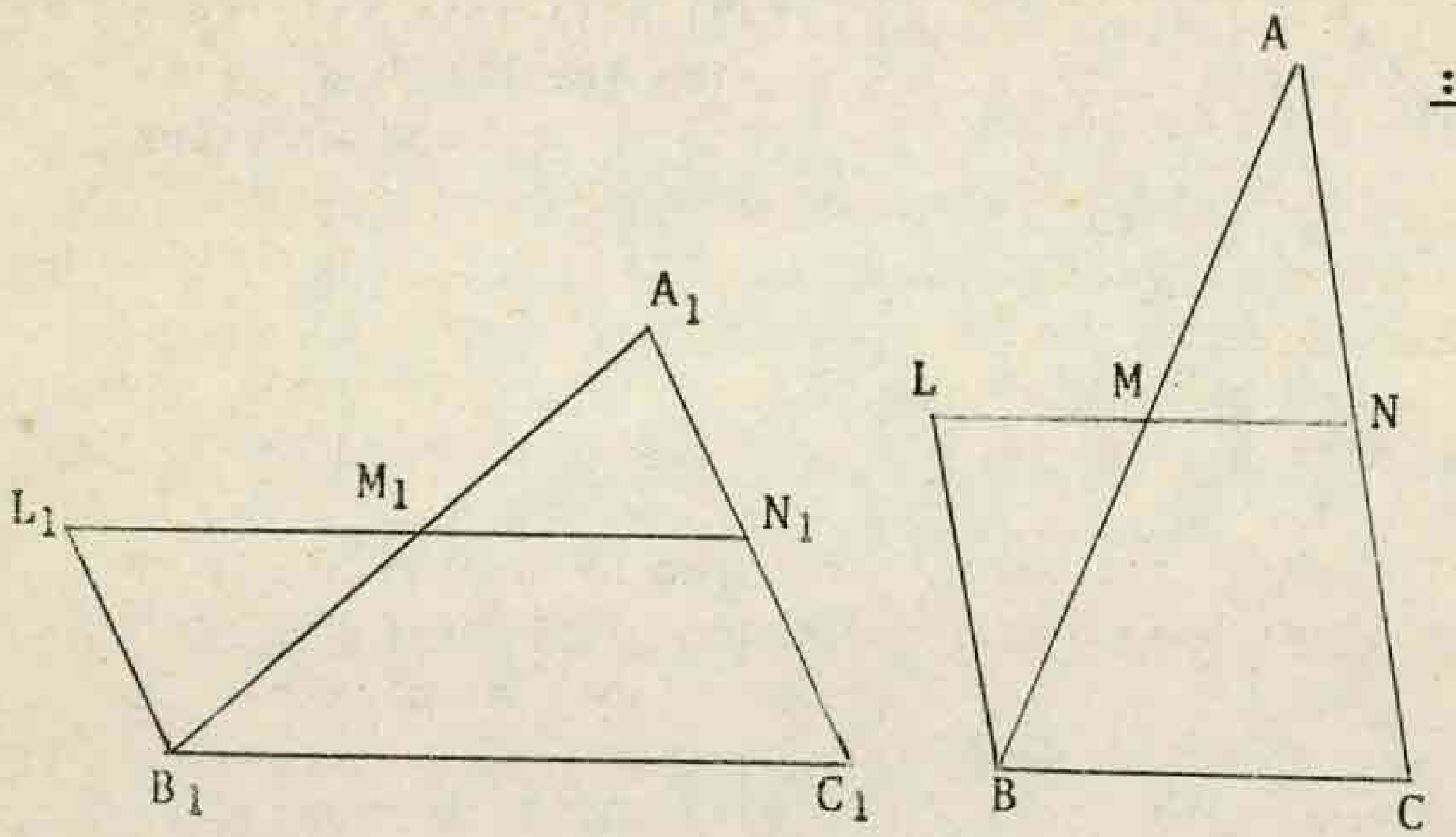
<u>משפט II</u>. שתי מקביליות בעלות שטחים שווים שקולות.

<u>הוכחה</u>: יהי ABCD, EFGH שתי המקביליות. עכשיו נבנה מקבילית PQRS בעל שטח שווה לזה של ABCD ו- EFGH וכך ש- PQ=RS=AB=CD, QR = PS = GF = HE. זאת בעיית בניה פשוטה. מאחר ש- PQ=AB וגם השטח של PQRS שווה לזה של ABCD יוצא שגם הגובה של שתי המקביליות האלה יהיה שווה. לכן, לפי משפט I ABCD \~ PQRS, כמו כן EFGH \~ PQRS והמסקנה מידית.

ד. <u>המשפט העיקרי</u>

כל שני משולשים השווים בשטח – שקולים הם.

<u>הוכחה:</u>



ציור 3

יהיו ABC, $A_1B_1C_1$ שווים בשטח (ראה ציור 3). יהיו N, M האמצעים של AB, AC בהתאמה ו– BL מקביל ל– AC. הבניה על $A_1B_1C_1$ דומה לזו על ABC. מהעובדה שהמשולשים AMN, BLN חופפים נובע ש– $ABC \gamma\gamma BCML$, כמו כן $A_1B_1C_1 \gamma\gamma B_1C_1M_1L_1$. אבל $B_1C_1M_1L_1$, $BCML$ הם מקביליות בעלות שטחים שווים ולכן, לפי משפט II $B_1C_1M_1L_1 \gamma\gamma BCML$. המשפט העיקרי נובע מיד בגלל טרנסיטיביות היחס $\gamma\gamma$.

<u>פתרון הבעיה מעמוד 1</u>

מאחר שיש למכונית ארבעה גלגלים, ברור כי ביחידות של "ק"מ–גלגל" יסע 180,000 ולכן יידרשו לו לפחות 9 צמיגים. כדי שיוכל להסתדר ב–9 צמיגים עליו לתכנן את פעולתו בדרך הבאה:–

20,000 ק"מ:	צמיגים מס'	1, 2, 3, 4
5,000 "	" "	5, 6, 7, 8
5,000 "	" "	6, 7, 8, 9
5,000 "	" "	7, 8, 9, 5
5,000 "	" "	8, 9, 5, 6
5,000 "	" "	9, 5, 6, 7

בדרך זו ינצל כל אחד מתשעת הצמיגים עד לסוף.

סכומי ריבועים (מדור מתקדם)

ב. אמסטר (תל-אביב)

אם נתבונן לרגע במשואות כמו $29=5^2+2^2$, $22=2^2+3^2+2^2$,

$31=5^2+2^2+1^2+1^2$, נראה שקיימים מספרים הניתנים להצגה כסכום של שנים, שלושה, או ארבעה ריבועים. מובן שישנם גם כאלה אשר עבורם מספיק ריבוע אחד, והם הריבועים המשוכללים עצמם. נוכיח כי תמיד אפשר להסתפק בארבעה ריבועים לכל היותר, ז.א. שעבור כל מספר טבעי n נוכל למצוא c,b,a ו- d שלמים כך ש-

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \qquad (1)$$

וראינו כבר כי במקרים מסויימים יוכלו חלק מתוך (a,b,c,d) להתאפס.

את המשפט היסודי הזה נוכיח בשלבים.

משפט 1.

אם m ו-n הם סכומים של ארבעה ריבועים משוכללים, אזי יהיה זה נכון גם בשביל מכפלתם, mn.

הוכחה: לפי ההנחה $m = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, $n = a^2+b^2+c^2+d^2$

כשכל המספרים הם שלמים, אבל קל לאשר כי

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) &= \\ &= (a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2 + (a\beta-b\alpha+c\delta-d\gamma)^2 + \\ &+ (a\gamma-c\alpha+b\delta-d\beta)^2 + (a\delta-d\alpha+b\gamma-c\beta)^2\end{aligned}$$

והמסקנה מידית.

מאחר שכל מספר טבעי ניתן לפירוק לגורמים ראשוניים, יספיק לפי משפט 1 להוכיח את טענתנו עבור מספרים ראשוניים. מאידך $2=1^2+1^2+0^2+0^2$ ולכן נשאר רק להוכיח את הדבר עבור מספרים ראשוניים אי-זוגיים. לשם קיצור נגיד כי למספר P יש התכונה T_m (m טבעי) אם הוא מספר ראשוני אי-זוגי ואם mP שווה לסכום של ארבעה ריבועים אשר לפחות אחד מהם אינו מתחלק ב- P.

משפט 2.

אם P הינו מספר ראשוני אי-זוגי המחלק את הסכום של ארבעה ריבועים, אשר לפחות אחד מהם אינו מתחלק ב- P, אזי P שווה לסכום של ארבעה ריבועים כאלה. [בקיצור $T_m \ (m \geq 1) \Leftarrow T_1$].

משפט 3.

כל מספר ראשוני שווה לסכום של ארבעה ריבועים משוכללים.
ראשית כל נוכיח כי משפט 3 נובע ממשפט 2, ואח"כ נוכיח את משפט 2.

הוכחת משפט 3: ראינו כבר שמותר להגביל את הדיון למספרים ראשוניים אי-זוגיים, ונניח כי P הוא מספר כזה. נסתכל בשתי הקבוצות של מספרים שלמים:-

$$\text{(A)} \qquad 0^2+1^2,\ 1^2+1^2,\ 2^2+1^2,\ldots,\left(\frac{P-1}{2}\right)^2+1^2$$

$$\text{(B)} \qquad -0^2,\ -1^2,\ -2^2,\ \ldots,\ -\left(\frac{P-1}{2}\right)^2$$

האיברים השונים ב- (A) משאירים שאריות שונות כשמחלקים אותם ב- P, כי אילו היו קיימים x,y, $0<x<y\leq\frac{P-1}{2}$ ו- x^2+1, y^2+1 משאירים אותה שארית, הרי אז היה $(x^2+1)-(y^2+1)$ מתחלק ב- P, ז.א. $P|\ (y-x)(y+x)$ (נשתמש בסימנים $a|b$, $a\nmid b$ לציין את העובדות ש- a מחלק את b או אינו מחלק אותו, בהתאמה). אבל P ראשוני ולכן לא יוכל לחלק מכפלה אלא אם כן הוא מחלק אחד מגורמיה. עכשיו $P-1 > x+y \geq 1$ ולכן לא יוכל $x+y$ להיות כפולה של P. מכאן ש- $P\ |\ y-x$ וזה ייתכן אך ורק אם $y-x=0$, וזה סותר את ההנחה $y>x$.

בדרך דומה רואים כי כל איברי (B) ישאירו שאריות שונות אחרי חלוקה ב- P.

אבל בכל אחד משתי הקבוצות ישנם $\frac{P-1}{2}+1$ איברים ולכן המספר הכללי של איברים בשתי הקבוצות הוא $2(\frac{P-1}{2}+1) = P+1$. מאידך מספר השאריות השונות האפשריות עם חלוקת מספר כלשהו ב- P הוא P. מכאן נובע שיהיו לפחות איבר אחד ב- (A) ואחד ב- (B) המשאירים אותה שארית, ז.א. שקיימים a,b בין 0 ל- $\frac{P-1}{2}$ כך ש- (a^2+1) ו- $(-b^2)$ משאירים אותה שארית. מזה נובע ש- $(a^2+1)-(-b^2)$ מתחלק ב- P, ז.א. שקיים

m טבעי ו-

$$mP = (a^2+1)-(-b^2) = a^2+b^2+1^2+0^2 \tag{2}$$

מאידך $P \nmid 1$ ולכן יש ל- P התכונה T_m. ממשפט 2 נובע עכשיו כי P הוא גם בעל התכונה T_1, ולכן הוא בעצמו סכום של ארבעה ריבועים. ראינו איפוא כי משפט 3 נובע ממשפט 2 ועכשיו נוכיח את זה האחרון. ההוכחה תתבסס על השלבים הבאים:-

(1) אם ל- P יש התכונה T_n עבור איזה n שהוא, אזי תהיה לו גם התכונה T_m כש- $1 < m < P$.

(2) אם P הוא בעל התכונה T_m $(1<m<P)$ אזי יהיה גם בעל T_ℓ כש- $\ell < m$.

משמוש חוזר בשתי הקביעות האלה רואים מיד כי $T_m \Rightarrow T_1$.

<u>הוכחת (1)</u> : לפי ההנחה קיימים n, x_1, x_2, x_3, x_4 $(n>P)$

$$nP = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \tag{3}$$

ו- $P \nmid x_1$. נוכל תמיד למצוא y_1, y_2, y_3, y_4 שלמים כך שכל המספרים (x_i-y_i) $(i=1,2,3,4)$ מתחלקים ב- P.

ו-

$$|y_i| \leq \frac{1}{2}P \quad (i=1,2,3,4) \tag{4}$$

ומכאן (מאחר ש- P אינו זוגי)

$$|y_i| < \frac{1}{2}P \tag{5}$$

אבל

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} (x_i^2-y_i^2)$$

$$= nP - \sum_{i=1}^{4} (x_i-y_i)(x_i+y_i)$$

וכל איבר בסכום האחרון מתחלק ב- P. קיים איפוא מספר טבעי m כך ש-

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = mP \tag{6}$$

מ- (5) ו-(6) נובע כי

$$mP < 4\left(\frac{P}{2}\right)^2 = P^2$$

ולכן $m < P$

מאידך $P \nmid x_1$ בעוד ש-$(y_1-x_1) \mid P$; ולכן $P \nmid y_1$.

<u>הוכחת (2)</u> :

ההנחה היא עכשיו שקיים $m<P$ ומספרים שלמים y_4, y_3, y_2, y_1 כך ש-

$$mP = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \qquad (7)$$

ו- $$P \nmid y_1$$

נגדיר עכשיו מספרים שלמים z_i $(i=1,2,3,4)$ כך שכל ה- (y_i-z_i) מתחלקים ב- m בעוד שכלם מקיימים $|z_i| \leq \frac{1}{2}m$. נוכל לראות כי לא כל ה- $|z_i|$ יוכלו להיות שווים ל- $\frac{m}{2}$. כי דבר זה לא ייתכן אלא אם כן m זוגי, נגיד $m = 2k$, ואז

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + mt \qquad (\text{שלם } t) \\ &= \pm k + 2kt \\ &= k(2t \pm 1) \\ &= kk_1 \end{aligned}$$

כש- k_1 בלתי זוגי. כמו כן $y_j = kk_j$ $(j=2,3,4)$ כשכל ה-k_j אי זוגיים. אבל עכשיו רואים מ- (7) כי

$$2kP = mP = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 = k^2 \sum_{i=1}^{4} k_i^2$$

ולכן

$$2P = k \sum_{i=1}^{4} k_i^2 \qquad (8)$$

מהעובדה שכל ה- k_i הם אי-זוגיים נובע שהאגף הימני של (8) הוא כפולה של 4 (למה?) וזה סותר את ההנחה ש- P הוא אי-זוגי.

קיים איפוא לפחות z_i אחד, נגיד z_1, המקיים $|z_1| < \frac{1}{2}m$. שוב אנו רואים כי

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 - \sum_{i=1}^{4} (y_i-z_i)(y_i+z_i)$$

$$= mP - \sum_{i=1}^{4} (y_i-z_i)(y_i+z_i) \qquad (9)$$

כל האיברים $y_i - z_i$ מתחלקים ב- m ולכן נוכל לכתוב

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \ell m \quad (\text{שלם } \ell) \tag{10}$$

אבל, לפי האמור לעיל

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 < 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2$$

ולכן

$$\ell < m \tag{11}$$

ראינו איפוא כי קיומם של ה- y_i המקיימים את (7) עם $m < P$
ו- $P \nmid y_1$ גורר גם את קיומם של z_i המקיימים את (10) ו-(11).
כפל פשוט נותן עכשיו

$$\ell m^2 P = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \sum_{j=1}^{4} z_j^2$$

$$= \sum_{r=1}^{4} w_r^2 \tag{12}$$

עם

$$w_1 = \sum_{i=1}^{4} y_i z_i$$

$$w_2 = y_1z_2 - y_2z_1 + y_3z_4 - y_4z_3$$

$$w_3 = y_1z_3 - y_3z_1 + y_2z_4 - y_4z_2$$

$$w_4 = y_1z_4 - y_4z_1 + y_2z_3 - y_3z_2$$

אבל כל המספרים $y_i - z_i$ מתחלקים ב- m ולכן נוכל לכתוב

$$(i=1,2,3,4) \quad y_i - z_i = mt_i \tag{13}$$

מכאן נובע כי

$$w_1 = \sum_{i=1}^{4} y_i (y_i + mt_i) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 + m \sum_{i=1}^{4} y_i t_i$$

$$= m\,[P + \sum_{i=1}^{4} y_i t_i]$$

בגלל (6)

ולכן $m | w_1$. מאידך

$$w_2 = y_1(y_2+mt_2) - y_2(y_1+mt_1) + y_3(y_4+mt_4) - y_4(y_3+mt_3)$$
$$= m\,(y_1t_2 - y_2t_1 + y_3t_4 - y_4t_3)$$

ומכאן ש- $m|w_2$. בדרך דומה רואים כי $m|w_3$, $m|w_4$, נוכל איפוא לכתוב

$$w_i = m\alpha_i \quad (i=1,2,3,4) \tag{14}$$

עם α_i שלמים, ואז, מתוך (12),

$$\ell m^2 P = m^2 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2$$

ולכן

$$\ell P = \Sigma\, \alpha_i^2 \tag{15}$$

מאידך אילו היו כל ה-α_i מתחלקים ב- P הרי אז היה האגף הימני של (15) מתחלק ב- P^2, ז.א. $\ell P = P^2Q$; $\ell = PQ$, מה שלא יתכן מאחר ש- $P > \ell$. לפחות אחד מתוך ה-α_i איננו מתחלק איפוא ב- P וזה, יחד עם (15), גומר את ההוכחה.

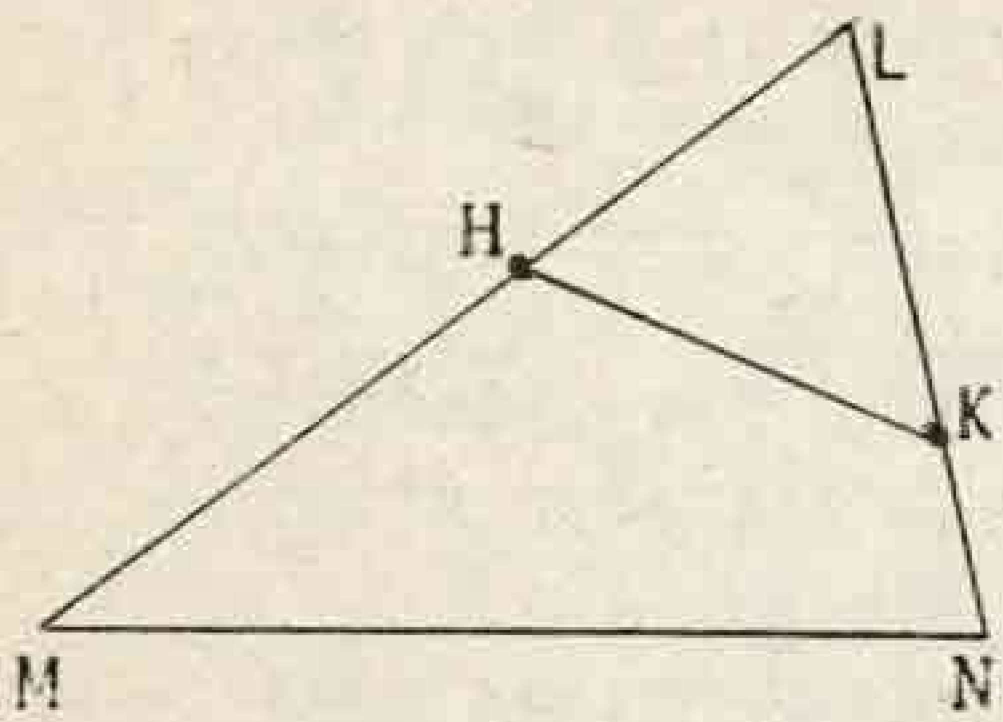
צפור אחת בשתי אבנים

הפעם נשנה ממנהגנו ונציג רק אבן אחת. נעמיד בעיה הנדסית ונפתור אותה בדרך אלגברית. אבל אפשר גם לפתור את הבעיה על טהרת ההנדסה ונשמח לקבל הוכחות מסוג זה מהקוראים, לשם פרסום בחוברת הבאה.

ה ב ע י ה

במשולש ABC כלשהו לוקחים נקודות P, Q, R על הצלעות BC, CA ,AB בהתאמה. יהיו δ_1, δ_2, δ_3 בהתאמה השטחים של המשולשים AQR, BRP, CPQ ויהיה δ שטחו של PQR . להוכיח כי δ איננו אף פעם הקטן ביותר בין δ, δ_1, δ_2, δ_3.

<u>הוכחה אלגברית</u>. הוכחה זו מבוססת על עובדה גיאומטרית פשוטה.



במשולש LMN כלשהו ניקח נקודות H על LM ו- K על LN.

אזי $$\frac{S_{LHK}}{S_{LMN}} = \frac{LH \cdot LK}{LM \cdot LN}$$

(הוכחת הנוסחה הזאת מידית ואנו משאירים אותה לקורא).

עכשיו נבוא לבעיתנו. נגדיר

$$\varepsilon_1 = \frac{BP-PC}{2BC}, \quad \varepsilon_2 = \frac{CQ-QA}{2CA}, \quad \varepsilon_3 = \frac{AR-RB}{2AB}$$

$$\frac{BP}{BC} = \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$$, וכו'

$S_{ABC} = \delta+\delta_1+\delta_2+\delta_3 = \Delta$. לפי האמור לעיל יהיה

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta_1}{\Delta} &= (\tfrac{1}{2}-\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_3)\\ \frac{\delta_2}{\Delta} &= (\tfrac{1}{2}-\varepsilon_3)(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_1)\\ \frac{\delta_3}{\Delta} &= (\tfrac{1}{2}-\varepsilon_1)(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_2)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

אם נפתח את הסוגרים ב- (1) ונחבר את שלש המשוואות נקבל

$$(\delta_1+\delta_2+\delta_3)/\Delta = \frac{3}{4} - (\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

ולכן

$$\delta/\Delta = \frac{1}{4} + (\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \qquad (2)$$

עכשיו נבדוק את האפשרויות השונות:-

(i) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_2=0$. במקרה זה R,Q,P הם אמצעי AB, CA, BC בהתאמה ואנו יודעים כי אז $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta$.

(ii) שנים מתוך $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ מתאפסים. נניח כי $\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$, $\varepsilon_1\neq 0$.
אנו רואים אז כי $\delta_1/\Delta = 1/4$, $\delta_2/\Delta = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon_1$, $\delta_3/\Delta = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\varepsilon_1$
ואחד מתוך δ_2, δ_3 יהיה קטן מ- δ_1 (לפי הסימן של ε_1).

(iii) ε_1, ε_2, ε_3 הם כל בעלי אותו סימן (פרט אולי לאחד מהם שיוכל להתאפס). במקרה זה רואים מ- (2) כי $\delta > \frac{1}{4}\Delta$ ולכן לא יוכל להיות הקטן בין הארבעה.

(iv) שנים מבין ה- ε הם בעלי סימנים מנוגדים. נניח כי $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$. נכתב את (2) בצורת:-

$$\delta/\Delta = (\tfrac{1}{2}-\varepsilon_1)(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_3) + (\tfrac{1}{2}+\varepsilon_1)(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_2)(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_3) \quad (3)$$

מ- (3) ו-(1) רואים כי

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)(\frac{1}{2}-\varepsilon_3)}{\frac{1}{2}+\varepsilon_3} + \frac{(\frac{1}{2}+\varepsilon_1)(\frac{1}{2}+\varepsilon_2)}{\frac{1}{2}-\varepsilon_2}$$

$$> (\tfrac{1}{2}-\varepsilon_1)+(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_1) \quad (\text{כי } \varepsilon_2>0 \text{ , } \varepsilon_3<0)$$

$$= 1$$

ולכן, $\delta > \delta_1$

מבוא לאלגברה בוליאנית

בועז פרויד

בחוברות 1 ו-2, כרך א' של "הגליונות למתימטיקה" פורסם מאמר שהציג את יסודות האלגברה הבוליאנית בצורה בה מוצגת בדרך-כלל אלגברת הקבוצות. מטרתו של מאמר זה להראות את ההצגה הכללית ביותר של אלגברה בוליאנית כלשהי, ויחד עם זאת להדגים את השיטה המקובלת של פתוח תיאוריות מתימטיות.

הפעולה הבינארית

הגדרה : בשם פעולה בינארית בקבוצת אלמנטים M נקרא לכלל המתאים לכל זוג מסודר של אלמנטים (a,b) השייכים ל-M אלמנט יחיד c השייך אף הוא ל-M, ונסמן: $aob = c$ (o הוא סימן הפעולה).

לדוגמא: חבור וכפל במספרים השלמים הן בבירור פעולות בינאריות. לעומת זאת פעולת החלוק אינה פעולה בינארית בקבוצת המספרים השלמים, אך היא פעולה בינארית בקבוצת המספרים הרציונליים, בהסתייגות שהמכנה שונה מאפס.

תכונות אפשריות של פעולה בינארית:

1. נאמר שהפעולה הבינארית (o) היא אסוציאטיבית אם ורק אם קיים: $(aob)oc = ao(boc)$, ונרשם זאת במקרה זה פשוט $aoboc$.

2. נאמר שהפעולה הבינארית (o) היא קומוטטיבית אם ורק אם קיים: $aob = boa$.

3. נאמר שהפעולה הבינארית (o) היא דיסטריבוטיבית לגבי פעולה בינארית שניה, (*), אם ורק אם קיים:
$$ao(b*c) = (aob)*(aoc)$$

מובן מאליו שלא כל פעולה בינארית חייבת לקיים את התנאים הנ"ל. חבור וכפל במספרים ממשיים הם קומוטטיביים. חלוק במספרים ראציונליים שונים מאפס הוא פעולה בינארית אבל אינו קומוטטיבי. כמו כן כפל מספרים דיסטריבוטיבי לגבי חבור, אך לא להיפך.

הגדרת האלגברה הבוליאנית

ההגדרה האקסיומטית של אלגברה בוליאנית אשר תנתן כאן, הוצעה ע"י Huntington ב- 1904. אין זו ההגדרה היחידה האפשרית, אך היא נחשבת לנוחה ביותר.

ה ה ג ד ר ה: מערכת של אלמנטים B, יחד עם שתי פעולות בינאריות שיסומנו (+) ו-(·) תיקרא אלגברה בוליאנית אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפעולות (+) ו-(·) הן שתיהן קומוטטיביות.

2. קיימים ב-B אברים אדישים (אברי יחידה) 0 ו-1 ביחס לפעולות (+) ו-(·) בהתאמה. (ז.א. ש- $a\cdot 1=a$,$a+0=a$ עבור כל a).

3. כל פעולה דיסטריבוטיבית לגבי השניה.

4. לגבי כל a ב-B קיים אלמנט 'a המקיים:
$a\cdot a'=0$;$a+a'=1$

הערות להגדרה:

א. $a\cdot b$ יסומן כרגיל ab.

ב. הפעולות (+) ו-(·) נקראות כרגיל חבור וכפל, אך יש להדגיש את השוני הברור בינן לבין חבור וכפל במספרים ממשיים. כדי למנוע בלבול נוהגים לפעמים (ביחוד באלגברת-הקבוצות) לכנות את הפעולות בשם "אחוד" ו-"חתוך" ולסמנן $\cup$ ו- $\cap$ בהתאמה.

ג. יש להדגיש שבסמונים 0 ו-1 אין הכוונה למספרים הממשיים 0 ו-1, שכן אלגברות בוליאניות אינן עוסקות בדרך כלל במספרים ממשיים או אפילו במספרים בכלל.

ד. חוקי הדיסטריבוטיביות בסימנים יכתבו:

$$a\,(b+c) = ab + ac \quad ; \quad a + bc = (a+b)(a+c)$$

ה. הקורא ישים לב לכך שבתנאי (4) לא נקבעה כאקסיומה היותו של האלמנט היחיד המקיים את התנאים הדרושים. עובדה זו היא משפט, שאפשר להוכיחו על סמך האקסיומות.

לאחר שבררנו לעצמנו את הגדרת האלגברה הבוליאנית ומשמעות התנאים שבה, נראה מספר דוגמאות של אלגברה בוליאנית. ברור למשל שהאלגברה הרגילה במספרים ממשיים, אפילו עם פעולות החבור והכפל בלבד, אינה אלגברה בוליאנית. שכן תנאי (4) איננו קיים בה, וכן לא קיים: $a + bc = (a+b)(a+c)$. לעומת זאת אלגברת-הקבוצות היא בבירור אלגברה בוליאנית.

תהיה K קבוצה כלשהי של אלמנטים (לאו דוקא במספר סופי) ונסמן ב-x כל קבוצה חלקית של איברי K . עבור שתי קבוצות חלקיות כאלה, x ו-y , נסמן ב- xy את קבוצת האלמנטים המשותפים ל- x ו- y, ואילו x+y הוא קבוצת אותם האלמנטים השייכים ל- x או ל- y או לשניהם. עבור כל x נסמן ב-'x את קבוצת כל אותם האלמנטים של K שאינם שייכים ל- x . את הקבוצה הכוללת K נסמן ב- 1 ואת "הקבוצה הריקה", דהיינו הקבוצה שאין לה אלמנטים בכלל, נסמן ב- 0. עכשיו נשאיר לקורא לאשר כי כל האקסיומות הבוליאניות מתקיימות.

דוגמאות נוספות של אלגברות בוליאניות:

1. אלגברת מעגלי-המתוג, בה מייצג אלמנט 'x מפסק הפוך למצב x , 1 מסמל קצר בין שתי נקודות, 0 מסמל נתק בין שתי נקודות, החבור מסמל שני מפסקים במקביל וכפל מסמל שני מפסקים בטור.

2. אלגברת המחשבים האלקטרוניים, בה מייצג אלמנט x מעגל היוצר מתח (אשר יכול להופיע או לא להופיע). 'x מסמל מעגל הנותן מתח ביציאתו כאשר לא מופיע מתח בכניסתו ולהיפך. 1 מסמל הופעת-מתח, 0 מסמל אי-הופעת מתח, החבור מסמל מעגל הנקרא מעגל "Or" והנותן ביציאתו כאשר מופיע מתח באחת משתי כניסותיו או בשתיהן, והכפל מסמל מעגל הנקרא מעגל "And" והנותן מתח ביציאתו אך ורק כאשר מופיע מתח בשתי כניסותיו.

3. לוגיקה סימבולית. זוהי תורה לוגית-מתימטית העוסקת במשפטים (Propositions), בה מסמל אלמנט x משפט כלשהו הקובע עובדה (למשל "הירח עשוי זהב" הקובע עובדה, לאו-דוקא נכונה, אך לא "האם שברת את החלון?" או "סע מחר לחיפה" אשר אינם קובעים עובדות). 'x מסמל משפט הפוך למשפט x (למשל "אין זה נכון שהירח עשוי זהב"), 1 מסמל משפט אשר מטבעו נכון תמיד, 0 מסמל משפט אשר לעולם איננו נכון, החבור מסמל צרוף של שני משפטים ע"י המלה "או", והכפל מסמל צרוף של שני משפטים ע"י אות-היחס "ו".

במאמר זה לא נעסוק יותר בארבע האלגברות הבוליאניות שתוארו כאן, אלא נמשיך בפתוח היסודות המתימטיים המשותפים לכל האלגברות הבוליאניות. המשפט הבא הוא אחד מהמשפטים היסודיים של האלגברה הבוליאנית, המקצר בהרבה את מספר ההוכחות שתדרשנה לנו בהמשך, ועם זאת מהווה תכונה מיוחדת של אלגברה זו, אשר אינה קיימת למשל באלגברה הרגילה. משפט זה ידוע בשם חוק הדואליות.

משפט 1:

אם משפט בוליאני (או זהות בוליאנית) הוא אמיתי, אז אמיתי גם המשפט המתקבל ע"י הפעולות הבאות:

(א) החלפת כל סימן (+) בסימן (·) ולהיפך.

(ב) החלפת כל 1 ב-0 ולהיפך.

הוכחה: למעשה נובע המשפט ישירות מהגדרת האלגברה הבוליאנית. שכן כל ארבעת התנאים סימטריים עבור החבור עם אבר היחידה שלו (0) והכפל עם אבר היחידה שלו (1).

ממשפט זה נובע שאם נוכיח למשל את אסוציאטיביות החבור, הרי נובע מכך ישירות אסוציאטיביות הכפל, וכן עבור כל משפט בוליאני. מכאן נובעת חשיבותו הרבה של חוק הדואליות. להבא נרשום כל פעם שני משפטים דואליים יחד, אך נוכיח רק אחד מהם. הקורא יוכל להוכיח את השני בדרך אנלוגית.

משפטי היסוד של אלגברה בוליאנית

המשפטים שיובאו להלן משמשים, יחד עם האקסיומות שנתנו קודם, כיסוד לאלגברה הבוליאנית.

משפט 2: $a + a = a \; ; \; a \cdot a = a$

הוכחה: $a=a+0=a+a\cdot a'=(a+a)(a+a') = (a+a)\cdot 1=a+a$

משפט 3: $a + 1 = 1 \; ; \; a \cdot 0 = 0$

הוכחה: $1 = a+a' = a+a'\cdot 1 = (a+a')(a+1) = 1(a+1)= a+1$

<u>משפט 4</u>: $a(a+b) = a \; ; \; a + ab = a$

<u>הוכחה</u>: $a = 1\cdot a = (1+b)a = 1\cdot a+b\cdot a = a+ba = a+ab$

<u>משפט 5</u>: $a+(b+c)=(a+b)+c \; ; \; a(bc)=(ab)c$

<u>הוכחה</u>: (א) נראה ש- $a+a(bc) = a+(ab)c$ כי

$$a+a(bc) = a = a(a+c) = (a+ab)(a+c) = a+(ab)c$$

(ב) נראה ש- $a'+a(bc) = a'+(ab)c$ כי

$$a'+a(bc) = (a'+a)(a'+bc) = 1(a'+bc) = a'+bc$$

$$= (a'+b)(a'+c) = [1(a'+b)][a'+c]=[(a'+a)(a'+b)](a'+c)=$$

$$= (a'+ab)(a'+c) = a' + (ab)c$$

(ג) נכפיל את תוצאות א ו-ב

$$[a+a(bc)][a'+a(bc)] = [a+(ab)c][a'+(ab)c]$$

$$[a+(ab)c][a'+(ab)c]=aa'+(ab)c=0+(ab)c=(ab)c$$

$$[a+a(bc)][a'+a(bc)]=aa'+a(bc)=0+a(bc)+a(bc)$$

$$\therefore \quad a(bc) = (ab)c$$

מ.ש.ל.

<u>משפט 6</u>:

a' הוא האלמנט היחיד המקיים $aa' = 0; \; a+a' = 1$.

<u>הוכחה</u>: נניח: $ay = 0; \; a+y = 1; \; ax = 0; \; a+x = 1$, ונראה ש- $x = y$.

$$x = 1x = (a+y)x = ax+yx = 0+yx = yx = xy = xy+0 =$$

$$= xy+ay = (x+a)y = 1\cdot y = y$$

מ.ש.ל.

המשפטים הבאים, הוכחותיהם קלות מאד, ונשאירן לקורא.

<u>משפט 7</u> : $(a')' = a$

<u>משפט 8</u> : $0' = 1$; $1' = 0$

<u>משפט 9</u> : $(ab)' = a' + b'$; $(a+b)' = a'b'$ (חוקי דה-מורגן)

רמז: הראה שקיים:

$$(ab)(a'+b') = 0 \quad ; \quad ab + (a'+b') = 1$$

<u>בעירת חדשרת</u>

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1. לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס).
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ- 15.3.1969.
4. לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגריים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לאותה בעיה.

השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' לבד (אין פירוש הדבר שהן קלות).

*346 (2) נתונים שלושה קווים ישרים מקבילים במישור. לבנות משולש שווה צלעות עם קדקד אחד על כל אחד מהקווים הנתונים.

(הוצע ע"י ב. אמסטר)

*347 (4) AB, CD הם מיתרים מקבילים של מעגל והם נמצאים במרחקים שווים מהמרכז O. P הוא נקודה כלשהי בקשת AB ו-Q בקשת CD. הישרים QA, PC נפגשים ב-X ואילו QB, PD ב-Y. הוכח כי XY עבור דרך O.

(הוצע ע"י ב. אמסטר)

*348 (3) לבנות מרובע כשנתונים ארבע הצלעות ואורך הקו המחבר את אמצעי שתי צלעות מנוגדות.

(הוצע ע"י א. גולדפרב)

*349 (2) מספר מסויים הוא כזה שאם מעבירים את הספרה הראשונה שלו למקום האחרון מקבלים מספר שהוא פי שנים המספר הנתון. להוכיח כי מספר הספרות הוא כפולה של 18.

350 (3) לחשב

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \cdots + \frac{1}{\cos(n-1)x \cos nx}$$

*351 (3) אברהם, ברוך, גיל ודוד גרים במושב ולכל אחד יש חתול וכלב. כל אחד קרא לחתולו על שם אחד משלושת חבריו ולכלב על שם אחד משני חבריו האחרים. אין שני חתולים בעלי אותו שם, וכמו כן אין שני כלבים בעלי אותו שם. כלבו של דוד וגם חתולו של גיל נקראים בשמו של בעל החתול גיל. שמו של חתולו של ברוך זהה עם שמו של החבר אשר חתולו נקרא על שם בעל הכלב אברהם. למי שייך הכלב דוד?

352 (4) לחשב

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{13}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{13}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{13}+\operatorname{ctg}^2\frac{4\pi}{13}+\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{13}+\operatorname{ctg}^2\frac{6\pi}{13}$$

353 (3) לחשב

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$$

354 (4) הוכח כי, עבור c,b,a חיוביים,

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq abc\ (a^2+b^2+c^2)$$

עם שויון אך ורק כש- $a=b=c$.

355 (4) נתונים מספרים חיוביים $a_n,\ldots,a_2,a_1$ ו-
$;S = a_1 + a_2 \ldots + a_n$

הוכח כי $\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \cdots + \frac{S}{S-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$

אם שויון אך ורק כשכל ה- a_i שווים.

356 (4) לחשב $\sum_{r=1}^{N} \frac{r}{r^4+r^2+1}$

*357 (3) סדרה מסויימת מתחילה עם האיברים 1, 2, 29, 130, 377;
866,... להציע ערך מתאים עבור האיבר השביעי.

358 (3) להוכיח כי

$$(1^7+2^7+\ldots N^7) + (1^5+2^5+\ldots+N^5) = 2(1^3+2^3+\ldots+N^3)^2$$

*359 (4) בעיר מסויימת קיימים מספר קווי אוטובוסים כך ש-
(i) כל קו מכיל לפחות שלש תחנות.
(ii) לכל זוג של תחנות בעיר קיים לפחות קו אחד המכיל את שתיהן.
(iii) לכל שני קווים יש בדיוק תחנה אחת משותפת.

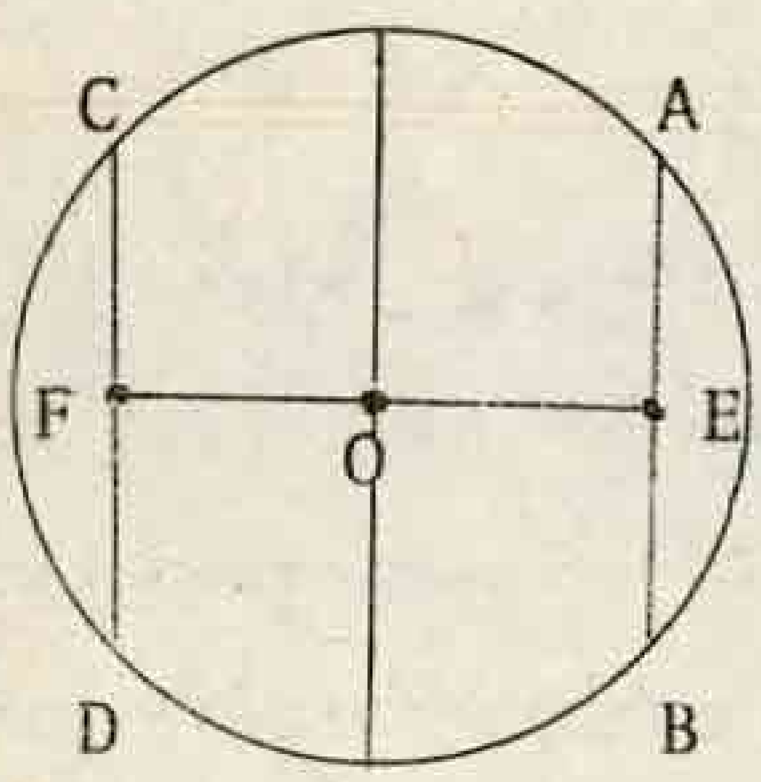
להוכיח כי בכל קו יש אותו מספר של תחנות.

*360 (3) למספרים החיוביים a, b, c יש התכונה שהסכום של כל זוג מביניהם גדול מהשלישי. להוכיח כי דבר זה יהיה נכון גם לגבי המספרים

$$\sqrt{c(a+b-c)}\ ,\ \sqrt{b(c+a-b)}\ ,\ \sqrt{a(b+c-a)}$$

פתרון הבעירות 316 - 330

316 יהיו E, F האמצעים של AB, CD בהתאמה. אזי מרכז הכובד של ארבע המסות נמצא על הקו EF ומכאן שקו זה עובר דרך מרכז המעגל, O. אבל OE ניצב ל- AB ו- OF ל-CD ולכן AB ו- CD מקבילים זה לזה. כמו כן מקבילים AC ו-BD זה לזה, ולכן ABCD הוא מקבילית.



317 $$(x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1):(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$= \frac{x^{55}-1}{x^{11}-1}\cdot\frac{x-1}{x^5-1}$$

אבל x^5-1, $x^{11}-1$ מחלקים שניהם את $x^{55}-1$ ואילו הגורם היחידי המשותף לשניהם הוא $x-1$.

$$0 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 30(\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$$ 318

$$= 3(\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+\gamma\alpha^2+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta\gamma) - 30(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$= 3\{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha\beta\gamma-10(\alpha+\beta+\gamma)\} = 3(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)$$

ולכן
$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma \qquad (1)$$

מאידך נניח ש- $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. אזי

$$11 = \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \geqslant 3\alpha^2 \qquad (2)$$

ולכן $\alpha = 0,1$, אבל $\alpha = 0$ לא ייתכן כי אז היה נובע מ- (1) ש- $\beta+\gamma=0$ ולכן $\beta=\gamma=0$.

ניקח איפוא $\alpha=1$. מ- (2) נובע ש- $\beta+\gamma+\beta\gamma=11$

ומ- (1) $\beta+\gamma = \beta\gamma-1$

מכאן רואים ש- $\beta+\gamma = 5$, $\beta\gamma = 6$ ולכן $\beta=2$, $\gamma=3$

מובן כי נוכל לקבל 6 פתרונות לפי קביעת הסדר של γ,β,α.

319 יהיו השרשים $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. אזי

$$\frac{p_1 p_{n-1}}{p_n} = (\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$\geqslant \{n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{\frac{1}{n}}\}\{n\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^{\frac{1}{n}}\}$$

(לפי משפט הממוצעים)

$$= n^2$$

$$\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{OK}{AK}\ ;\ \frac{V_{OACD}}{V_{ABCD}} = \frac{OL}{BL}\ ;\ \frac{V_{OABD}}{V_{ABCD}} = \frac{OM}{CM}\ ;\ \frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{ON}{DN}$$ 320

ולכן
$$\frac{OK}{AK} + \frac{OL}{BL} + \frac{OM}{CM} + \frac{ON}{DN} = 1$$

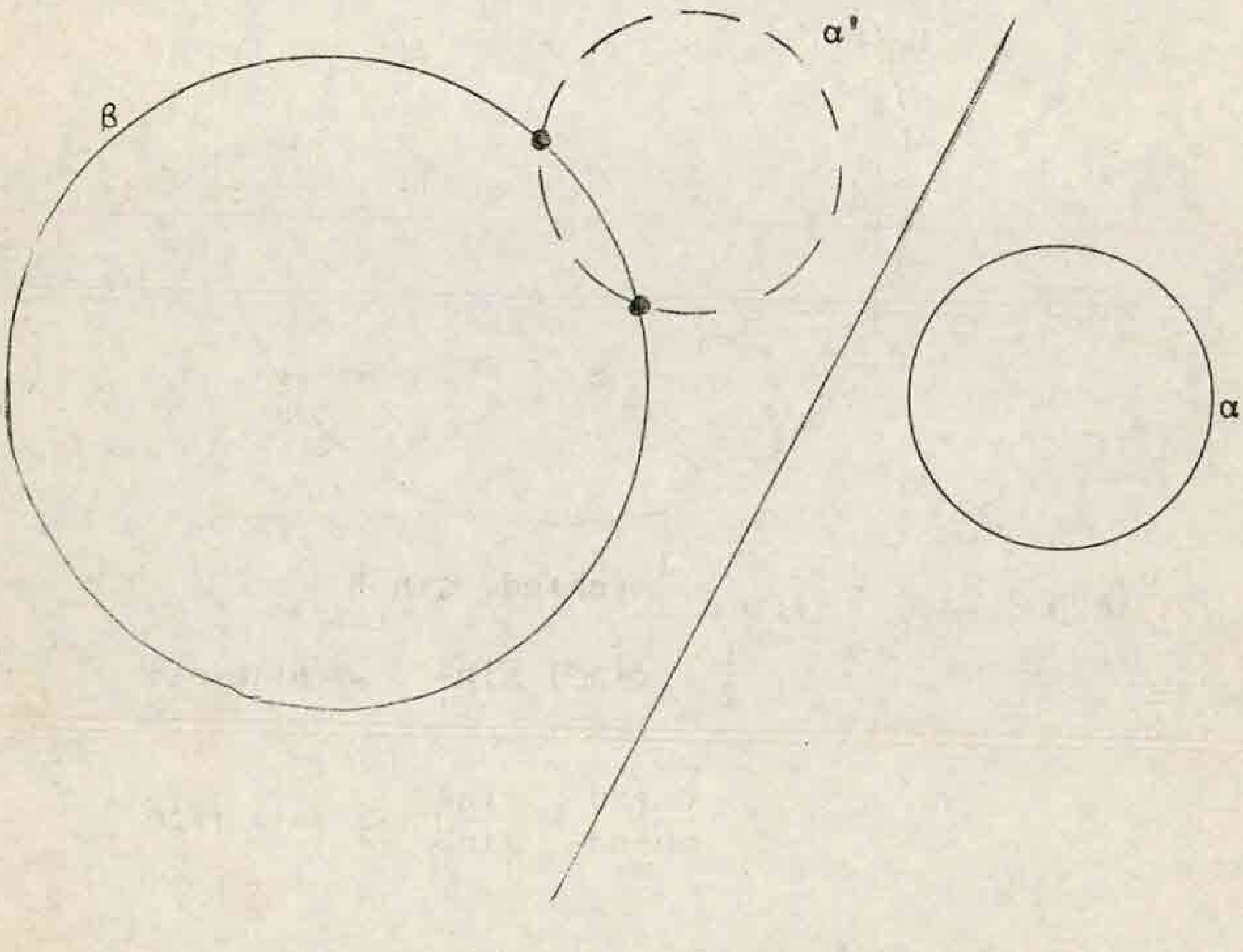
ומכאן, לפי משפט הממוצעים
$$\left(\frac{OK}{AK}\cdot\frac{OL}{BL}\cdot\frac{DM}{CM}\cdot\frac{ON}{DN}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{4}.$$

321 ולכן $\sin \frac{\alpha}{2^{r-1}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2^r} \cos \frac{\alpha}{2^r}$

$$\prod_{r=1}^{n} \cos \frac{\alpha}{2^r} = \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{r-1}}}{\sin \frac{\alpha}{2^r}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

322 יהיו המספרים x ו- y , ז.א. $3,000,003+10000x+100y$
מתחלק ל- 13, ז.א. $(13\times230769+6) + (769\times13+3)x + (7\times13+9)y$
מתחלק ל-13, ולכן גם $3x+9y+6$ ומכאן ש- $x+3y+2=13m$.
אבל $38 > x+3y+2 > 2$ ולכן $m=1$ או $m=2$. מכאן אפשר
לקבל מיד את כל הפתרונות.

323



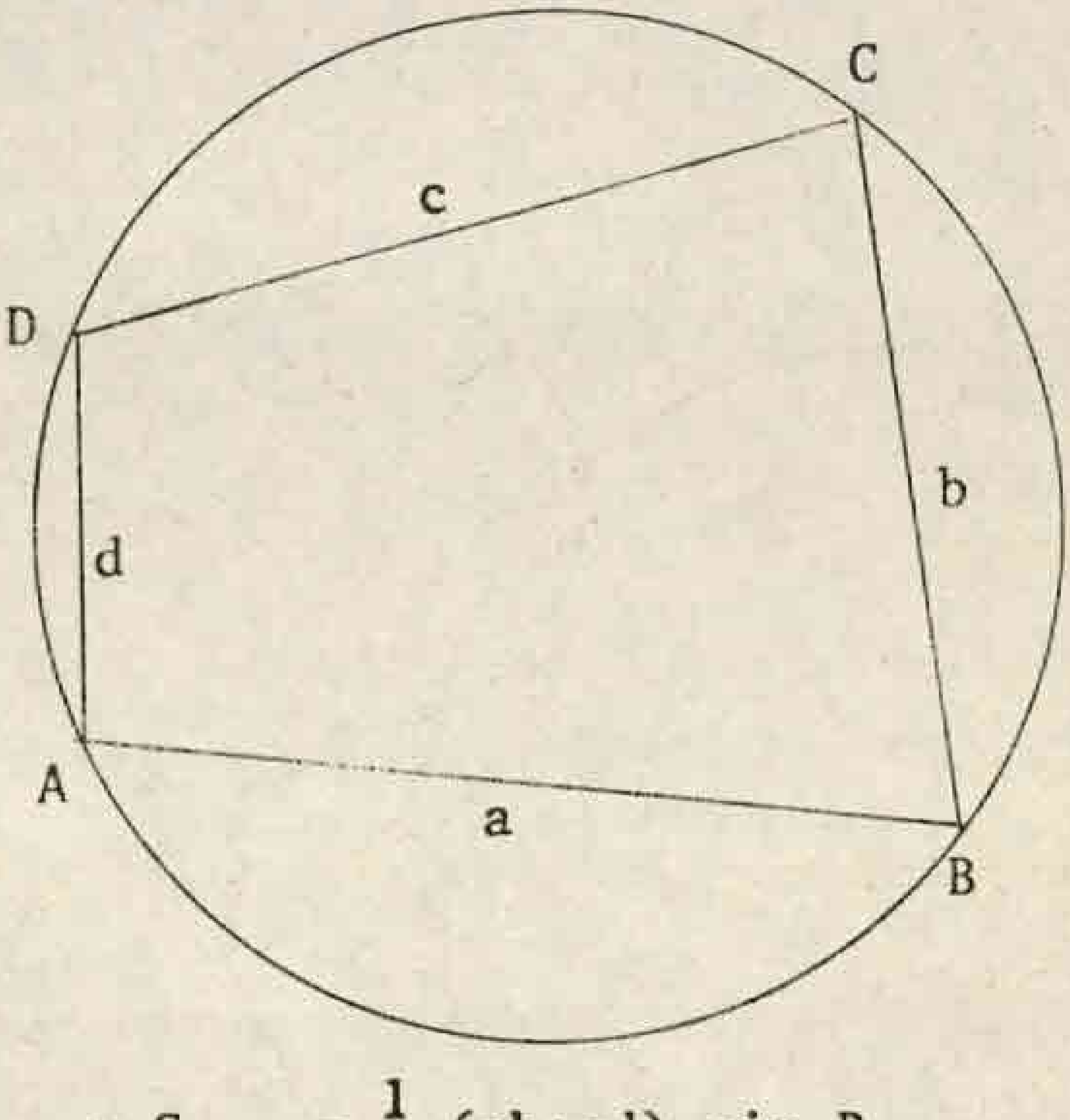
ברור כי שני הקדקודים שאינם על s יימצאו במצבים סימטריים משני עברי הקו הזה. לכן יספיק אם נצייר מעגל α' שווה ל- α ובמקום הסימטרי לזה של α בצד השני של s (ראה ציור). נקודות המפגש של β, α' יהיו מקומות אפשריים עבור קדקוד. מכאן אפשר גם לראות מיד מתי יתקיימו שני פתרונות, פתרון אחד, או אף לא פתרון אחד.

$$AC^2 = a^2+b^2-2ab\ \cos B = c^2+d^2+2cd\ \cos B$$ 324

ולכן $b^2-c^2-d^2+a^2 = 2(ab+cd)\cos B$

כמו כן $a^2-b^2-c^2+d^2 = 2(bc+ad)\cos A$

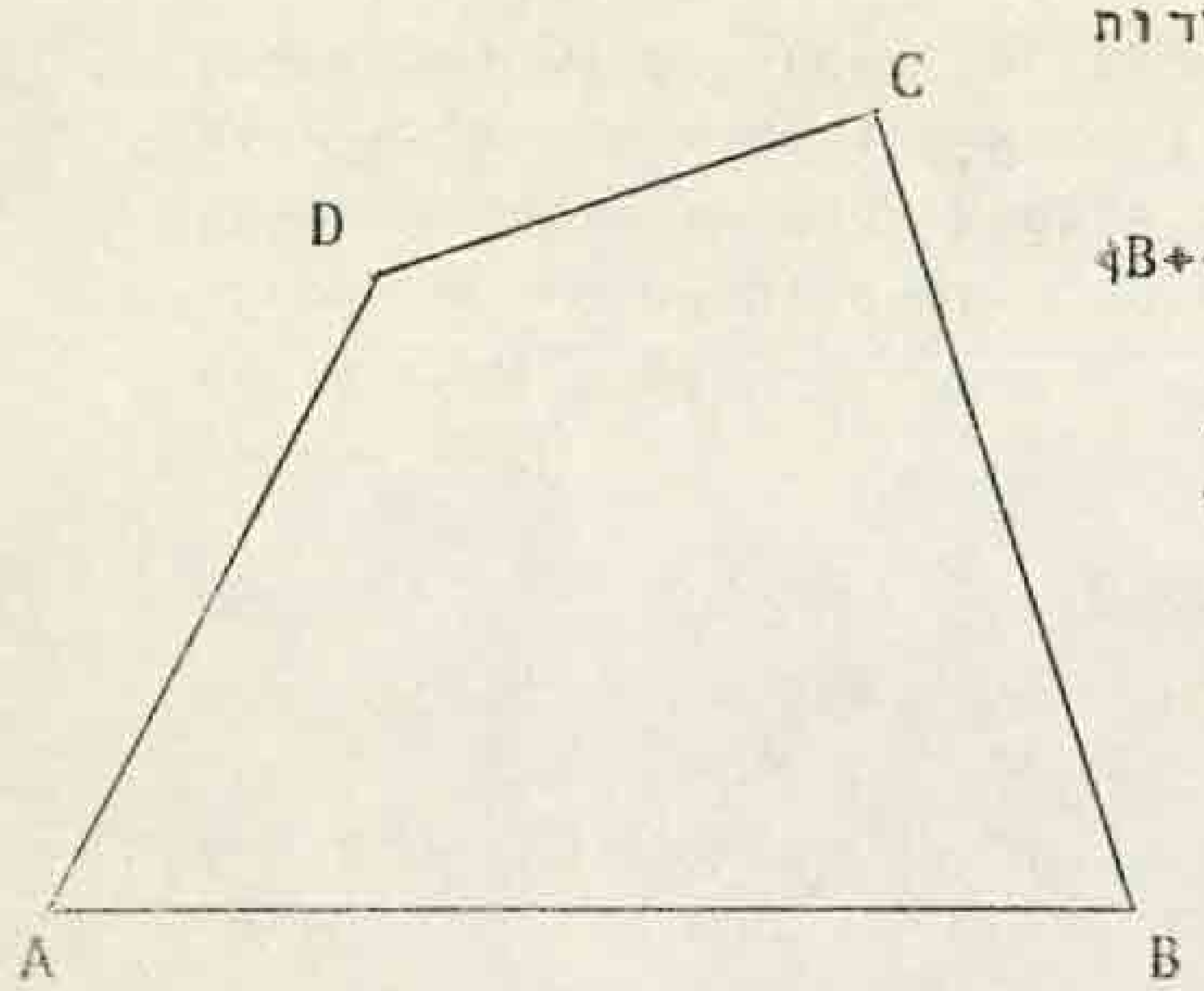
ומכאן $\dfrac{a^2-b^2-c^2+d^2}{b^2-c^2-d^2+a^2} = \dfrac{bc+ad}{ab+cd} \cdot \dfrac{\cos A}{\cos B}$



אבל $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$

וגם שווה ל- $\frac{1}{2}(bc+ad)\sin A$

מכאן נובע ש- $\dfrac{bc+ad}{ab+cd} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$



325 מאחר שאין ארבע הנקודות נמצאות על מעגל אחד אנו מסיקים שמשני הסכומים $\sphericalangle A+\sphericalangle C$, $\sphericalangle B+\sphericalangle D$ אחד יהיה גדול מ- 180° ואחד קטן ממנו. נניח ש- $\sphericalangle B+\sphericalangle D>180^\circ$ ואז רואים מיד ש- D נמצא בפנים המעגל ABC.

326 אם n מתחלק ב- 5 אזי n^{100} מתחלק ב- 5^{100} ועל אחת כמה וכמה ב - 5^3.

אם אין n מתחלק ב- 5 נוכל לכתוב $n = 5a\pm b$ כש- b הוא 1 או 2.

עכשיו

$$n^{100} = (5a\pm b)^{100} = (b\pm 5a)^{100}$$

$$= b^{100}\pm 500\, b^{99} a + \dots$$

וקל לראות כי כל האיברים בפתוח הבינום פרט לאיבר הראשון מתחלקים ב- 125. נשאר איפוא לבדוק את b^{100} ולמעשה נוכיח כי $b^{100}-1$ מתחלק ב- 125. הדבר מידי כש-$b=1$ ועלינו לבדוק אם כן ל- $2^{100}-1$.

$$2^2=4;\ 2^4=16;\ 2^8=256\equiv 6 \pmod{125};\ 2^{16}\equiv 36 \pmod{125};$$

$$2^{32}\equiv 1296\equiv 46 \pmod{125};\ 2^{64}\equiv 2116\equiv 116 \pmod{125}.$$

$$2^{100}=2^{64+32+4}\equiv 116\cdot 46\cdot 16 \pmod{125}$$

$$\equiv 116\cdot 736$$

$$\equiv (-9)\cdot(-14) \pmod{125}$$

$$=126$$

$$\equiv 1 \pmod{125}$$

327 נכתוב $n=10a+b$ ואז $n^2=20(5a+b)+b^2$, אבל ברור כי ספרת העשר ב-n^2 היא בלתי זוגית ולכן יהיה זה נכון לגבי b^2. בדיקת המספרים מ- 0 עד 9 מעלה כי $b=4$ או $b=6$ ובשני המקרים יהיה 6 הספרה האחרונה של n^2. יתרונו של ראובן על שמעון הוא איפוא $10-6 = 4$.

328 נכתוב

$$f(x) = (1+cx)(1+c^2x)\dots(1+c^Nx)$$
$$= 1 + A_1x + A_2x^2\dots+ A_Nx^N$$

ואז

$$1 + cA_1x + c^2A_2x^2 \dots + c^NA_Nx^N$$
$$= f(cx) = (1+c^2x)(1+c^3x) \dots(1+c^{N+1}x)$$

ולכן

$$(1+cx)\ f(cx) = (1+c^{N+1})\ f(x)$$

דהיינו

$$(1+cx)(1+cA_1x+c^2A_2x^2\dots+c^NA_Nx^N)$$
$$\equiv (1+C^{N+1}x)(1+A_1x+A_2x^2\dots+A_Nx^N)$$

אם נשווה את מקדמי x^m בשני האגפים נקבל

$$c^mA_m + c\cdot c^{m-1}A_{m-1} = A_m + c^{N+1}A_{m-1}$$

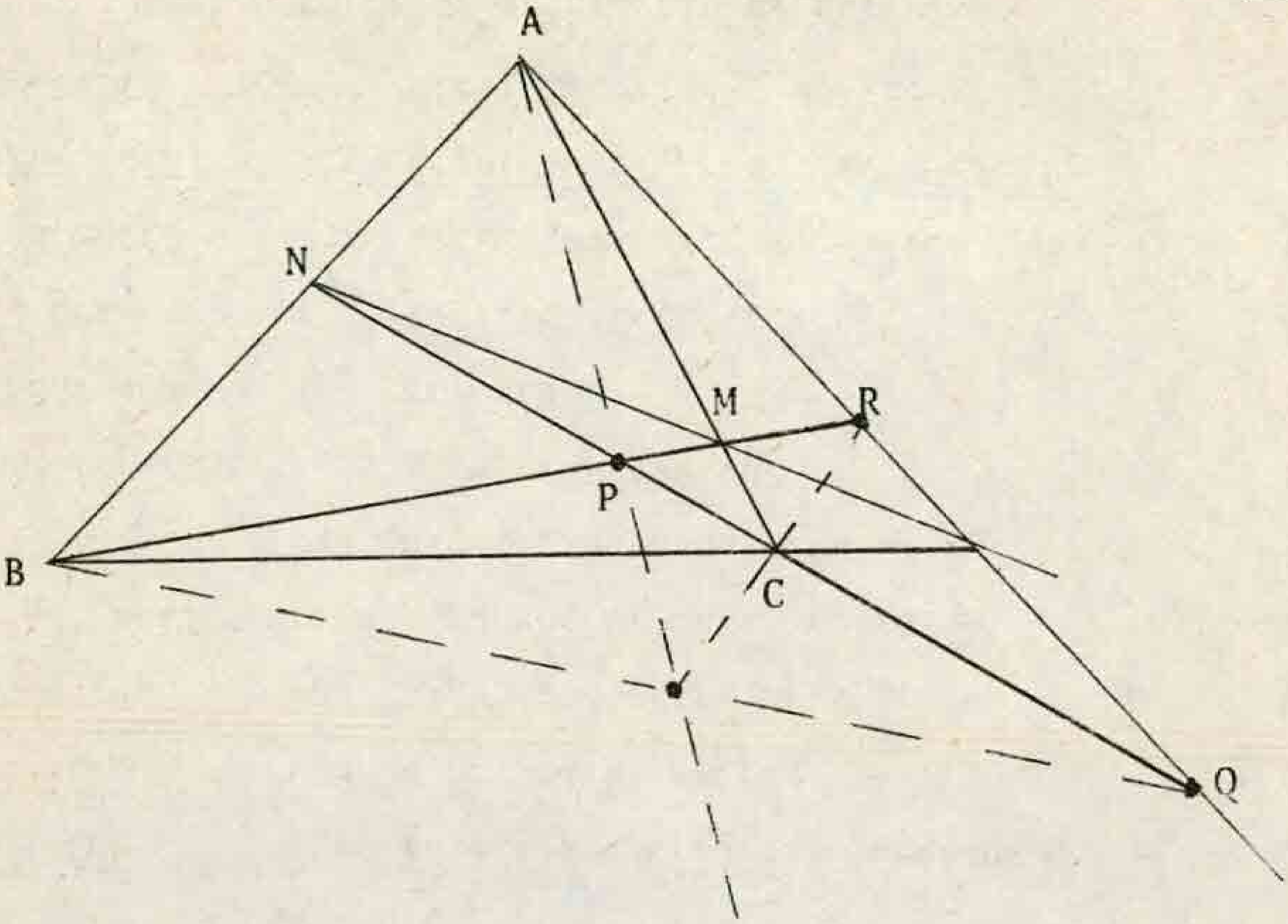
ז.א.

$$A_m/A_{m-1} = (c^m-c^{N+1})/(1-c^m)$$

אם $|c|<1$ וניתן ל- N לשאוף לאינסוף, ישאף c^{N+1} ל- 0

ונקבל $\dfrac{A_m}{A_{m-1}} = \dfrac{c^m}{1-c^m}$ עם זה קל לגמור את הפתרון.

.329



נסתכל בשני המשולשים ABC ו-PQR. BC,QR נפגשים ב- L ;
CA, RP ב-M ; ו- AB, PQ ב- N , אבל N,M,L הם בקו ישר
אחד ולכן שני המשולשים הם חד-ציריים. ממשפט דזרג נובע
כי AP,BQ,CR ייפגשו בנקודה אחת.

.330 (i) נניח ש- x, y, z הם מספרים טבעיים, נפעיל את משפט
הממוצעים על x+y+z מספרים אשר x מהם שווים ל- x, y
מהם ל- y ; ו- z מהם ל- z.

מקבלים מיד כי $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z$.

(ii) כש- x,y,z הם ראציונליים אבל לאו דווקא שלמים, יהיה
P מכנה משותף עבורם, ז.א. $xP=\alpha$, $yP=\beta$, $zP=\gamma$
כש- α,β,γ,P שלמים. אזי

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} = \left[\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{P(\alpha+\beta+\gamma)}\right]^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{P}}$$

בגלל (1)
$$\geq \left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{P}} \{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma\}^{\frac{1}{P}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{P}\right)^{\frac{\alpha}{P}} \left(\frac{\beta}{P}\right)^{\frac{\beta}{P}} \left(\frac{\gamma}{P}\right)^{\frac{\gamma}{P}}$$

$$= x^x y^y z^z$$

רשימת פותרי השאלות 330-316
(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

אברבוך דוד	י"ב	תיכון עירוני ט׳, תל-אביב	(18)
אחיטוב יונתן	י"ב	הגימנסיה הריאלית, ראשון-לציון	(15)
אטיאס מריו	י"א	תיכון "אחד-העם",פתח-תקוה	(6)
ארזי דוד	י"ב	גימנסיה עברית, ירושלים	(19)
איזנברג שלמה		בני-ברק	(15)
בולקה זאב	י׳	בי"ס ריאלי, חיפה	(5)
ביסטרי מרדכי	י"א	תיכון "אחד-העם", פתח-תקוה	(6)
בן-יעקב אורי	י"א	בי"ס התיכון החדש, תל-אביב	(15)
גורביץ זאב	י"ב	בי"ס ע"ש טשרניחובסרי, נתניה	(7)
הופר חיים	י"א	תיכון מקיף, אשדוד	(3)
זנגר שרה	י"ב	בי"ס ע"ש טשרניחובסקי, נתניה	(9)
חביב חיים	צ ה " ל		(22)
יהודה בן-ציון	י"ב	ישיבת הישוב החדש	(31)
לבדינסקי איל	י"ב	בי"ס דנציגר, קרית-שמונה	(12)
לובט אנדרו	י"ב	גימנסיה עברית, ירושלים	(22)
לין אבי	י"א	ישיבת ב"ע קרית שמואל, חיפה	(10)
ליניאל נתן	י׳	בי"ס הריאלי, חיפה	(16)
מנבר עודי	ט׳	בי"ס תיכון, קרית חיים	(11)
סגל מרדכי		תיכון עירוני ה׳, תל-אביב	(33)
סופרמן זיו	י"א	גימנסיה עברית, ירושלים	(43)
פיטובסקי איתמר	י"ב	גימנסיה רחביה, ירושלים	(15)
פרידמן יעקב	י"א	ישיבה תיכונית נחל-יצחק, נחלים	(21)
פתאל משה	י"א	בי"ס "אהל שם", רמת-גן	(5)
צור עמיקם	י׳	מוסד חינוכי "מבואות הנגב", קבוץ שובל	(16)
קרוא אהרון	י"ב	בי"ס הריאלי, חיפה	(30)
שייניגר אורי	י"ב	בי"ס הריאלי, חיפה	(33)
שפיר עמוס	י"א	תיכון "השרון", רמת-השרון	(25)

התכן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.

בע"מ רח' ליליינבלום 11 תל־אביב 58600