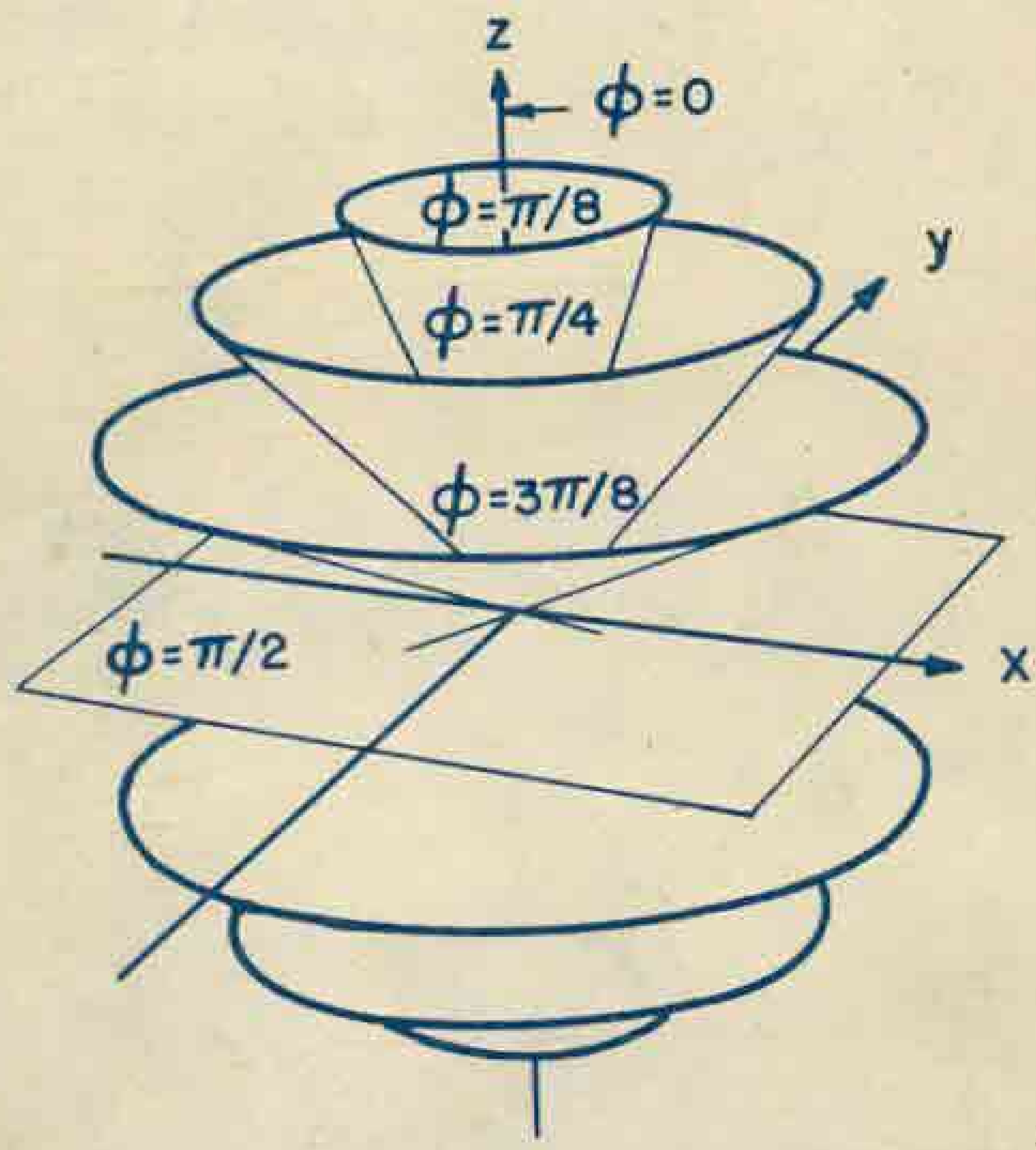
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 4 — כסלו תש"ל - נובמבר 1969 — מס 1

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע, אשר בחסותה יוצא לאור עתוננו זה, סבלה אבידה קשה מאד עם פטירתו בדמי ימיו של פרופ' עמוס דה-שליט ז"ל. הוא היה לא רק פיסיקאי מבריק, אלא גם מנהיג מדעי מחונן, ואזרח מסור שפעל רבות בשטחים משטחים שונים. בזמן האחרון הקדיש את מאמציו העיקריים לקידום הוראת המדעים ולחידוש צורתה. אנו מרגישים כי מוטלת עלינו חובה לעשות את כל האפשר להבטיח את המשך העבודה אשר בה התחיל, וננסה כמיטב יכלתנו לקיים חובה זו.

בעיה

במפעל מסוים יכולים העובדים לפרש לפנסיה החל מגיל 50, אבל מותר להם להמשיך לעבד אפילו עד גיל 80. גובה הפנסיה תלוי בגיל הפרישה לפי הטבלא:

גיל הפרישה	פנסיה (ל"י לחודש)
50	504
60	630
70	840
80	1260

התוכל להציג את הטבלא הזאת ע"י פונקציה פשוטה?
עובד המתכוון לחיות עד גיל 120 רוצה לקבע את זמן פרישתו כך שהכנסתו הכללית מפנסיה תהיה מריבית. באיזה גיל עליו לפרש? ומה יהיה אם אינו מקווה לחיות יותר מ- 90 שנה?

(פתרון בעמוד 11)

צפור בשתי אבנים - בעיה פשוטה

א. הבעיה

הפעם בחרנו עבור המדור הזה בעיה פשוטה מאד. המענין בבעיה הוא כי נוכל להביא שני פתרונות שונים אשר כל אחד מהם ניתן להכללה, אלא שההכללה בכל מקרה נובעת מעצם טיב הפתרון. כתוצאה מכך נקבל שתי הכללות שונות, אשר כל אחת מהווה בעיה חדשה עם פתרונה, וקשה לראות במבט ראשון את הקשר בין השתים.

הבעיה: נתונות ארבע נקודות X,Y,Z,T במישור, לבנות רבוע אשר על כל אחת מצלעותיו יושבת אחת הנקודות הנתונות.

אנו רואים מיד כי לא יוכל להיות פתרון אם שלש מבין הנקודות (או כל הארבע) נמצאות בקו ישר אחד, ולמטה נראה כי יש מספר אינסופי של פתרונות במקרה שהקווים XZ,TY ניצבים זה לזה ושווים בארכם. נניח איפוא בהתחלה כי אף אחד מבין שני התנאים המיוחדים האלה איננו מתקיים.

(המשך בעמוד 3)

דברי מתמטיקאים גדולים

לכל דבר אשר אפשר לדעתו יש מספר, כי אין לשער או לדעת דבר שאין לו מספר. (מאנשי כת פיתגורס).

ישנם דברים אשר רק אלה שלמדו מתמטיקה יוכלו להאמין בהם (ארכימדס, 287-212 לפנה"ס).

אם ניתן להתקרב לאלהות רק דרך סמלים, הרי סמלי המתמטיקה הם המתאימים ביותר מאחר שודאותם עומדת לעד (ניקולס מהעיר קוזה, 1401-1464).

מתמטיקאים שהם רק מתמטיקאים יודעים לטען בצורה מדויקת אבל רק כשהובהר להם הכל לפי הגדרות וכללים. אחרת הם מוגבלים ובלתי נסבלים (פסקל, 1623-1662).

מדור מתקדם - סדרות משלימות

רן דונגי (חולון)

א. נעיין בסדרת הרבועים $1,4,9,\ldots\ldots,k^2$, וניקח סדרה אחרת $b_1,b_2,\ldots\ldots,b_\ell$ שתכיל את המספר 0 ומספרים טבעיים מסוימים כך שאפשר יהיה להציג מספר טבעי מ- 1 עד n^2 בצורת i^2+b_j.
במקרה זה נאמר כי הסדרה $\{b_i\}$ <u>משלימה</u> את סדרת הרבועים.
מטרתנו היא למצא את סדרה משלימה "חסכונית" ככל האפשר, ז.א. שהערך של ℓ יהיה מזער:

נוכיח ראשית כל כי הערך המזערי של ℓ עבור הסדרה המשלימה לקבוצה $\{1^n,2^2,\ldots\ldots,k^2\}$ מקיים.

$$k \leqslant \ell \leqslant 2k-1$$

כי לפי ההנחה קבוצת המספרים (i^2+b_j) כש- $1<i<k,1<j<\ell$ יש לה $k\ell$ איברים, לאו דוקא שונים זה מזה, אבל הכוללים ביניהם לפחות כל המספרים הטבעיים עד k^2, ולכן $k\ell \geqslant k^2$, ומכאן $\ell>k$.

מאידך אם ניקח את הסידרה $(0,1,2,\ldots\ldots,2k-2)$ נראה כי היא אמנם סדרה משלימה מאחר שהרווח המירבי בין שני רבועים עוקבים בקבוצתנו הוא $k^2-(k-1)^2=2k-1$ מאחר ש- $\ell(2k-1)$ הוא איפוא ערך אפשרי אחד עבור אורכה של סדרה משלימה נובע כי הערך האפשרי הקטן ביותר חייב לקיים $\ell<2k-1$.

עכשיו נכליל את הבעיה בזה שניקח כנקודת מוצא את הסדרה $(1,2^n,3^n,\ldots\ldots,k^n)$ ונחפש את הסדרה החסכונית ביותר $b_1,b_2,$ כך שנוכל להציג כל מספר מ- 1 עד k^n בצורת i^n+b_j.
אם נקרא ל- ℓ המזערי ℓ_n נוכל לראות לפי שיקולים דומים לאלה דלעיל כי

$$k^{n-1} < \ell_n < k^n - (k-1)^n \tag{2}$$

אבל גם קל להוכיח כי $k^n-(k-1)^n<nk$ ולכן, במקום (2), נוכל לכתב.

$$1<\frac{1}{k^{n-1}}\ell_n < n \tag{3}$$

השאלה שהצגנו לעצמנו היתה האם נוכל "לשפר" את (3)? או האם מאידך יכול $\frac{1}{k^{n-1}} \ell_n$ להיות קרוב מאד ל- 1 עבור n גדול? למעשה נוכיח כי, עבור n נתון וכל k מספיק גדול קיים

$$\frac{1}{k^{n-1}} \ell_n > 1 + \frac{n-1}{2n^2} \tag{4}$$

במקרה פרטי נובע כי, עבור k מספיק גדול, $\ell_2 > \frac{9k}{8}$,

אי שויון יותר חזק מהחלק השמאלי של (1)

ב. משפטי עזר

<u>משפט עזר 1</u> עבור כל שתי סדרות a_i, b_j קיים

$$\ell \sum_{i=1}^{k} a_i + k \sum_{j=1}^{\ell} b_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} (a_i + b_j) \tag{5}$$

נסתכל באגף הימין של (5) ונספר כמה פעמים מופיע שם כל איבר a_i. הוא מופיע למעשה עם כל b_j, דהיינו ℓ פעמים, ולכן תרומת האיברים a_i לסכום הכפול היא בדיוק $\ell \sum_{i=1}^{k} a_i$, ושיקול דומה נכון גם לגבי ה- b_j.

<u>משפט עזר 2</u> עבור כל $h>0$, כל n טבעי, וכל x מספיק גדול, קיים

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-h} > \frac{h}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \tag{6}$$

מובן כי פרושו של הבטוי "מספיק גדול" הוא כי (6) נכון עבור כל x גדול מאיזה x_0 מסוים, כש- x_0 יהיה תלוי בדרך כלל ב- h ו- n.

<u>הוכחה</u>

$$\left(x - \frac{h}{n}\right)^n = x^n - n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{h}{n} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot \frac{h^2}{n^2} \cdots\cdots \tag{7}$$

באגף הימני של (7) האיבר השלישי חיובי. ברור גם כי עבור x מספיק גדול, יהיה איבר זה גדול מכל האיברים הבאים אחריו (כי הם בנוים על חזקות נמוכות יותר של x).

מכאן נובע כי $x^n - hx^{n-1} < (x-\frac{h}{n})^n$, ולכן

$$x-\frac{h}{n} > \sqrt[n]{x^n - hx^{n-1}}$$

$$= \sqrt[n]{x^{n-1}} \cdot \sqrt[n]{x-h} \qquad (8)$$

נחלק ב- $x^{\frac{n-1}{n}}$ ונקבל

$$\sqrt[n]{x} - \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} > \sqrt[n]{x-h} \qquad (9)$$

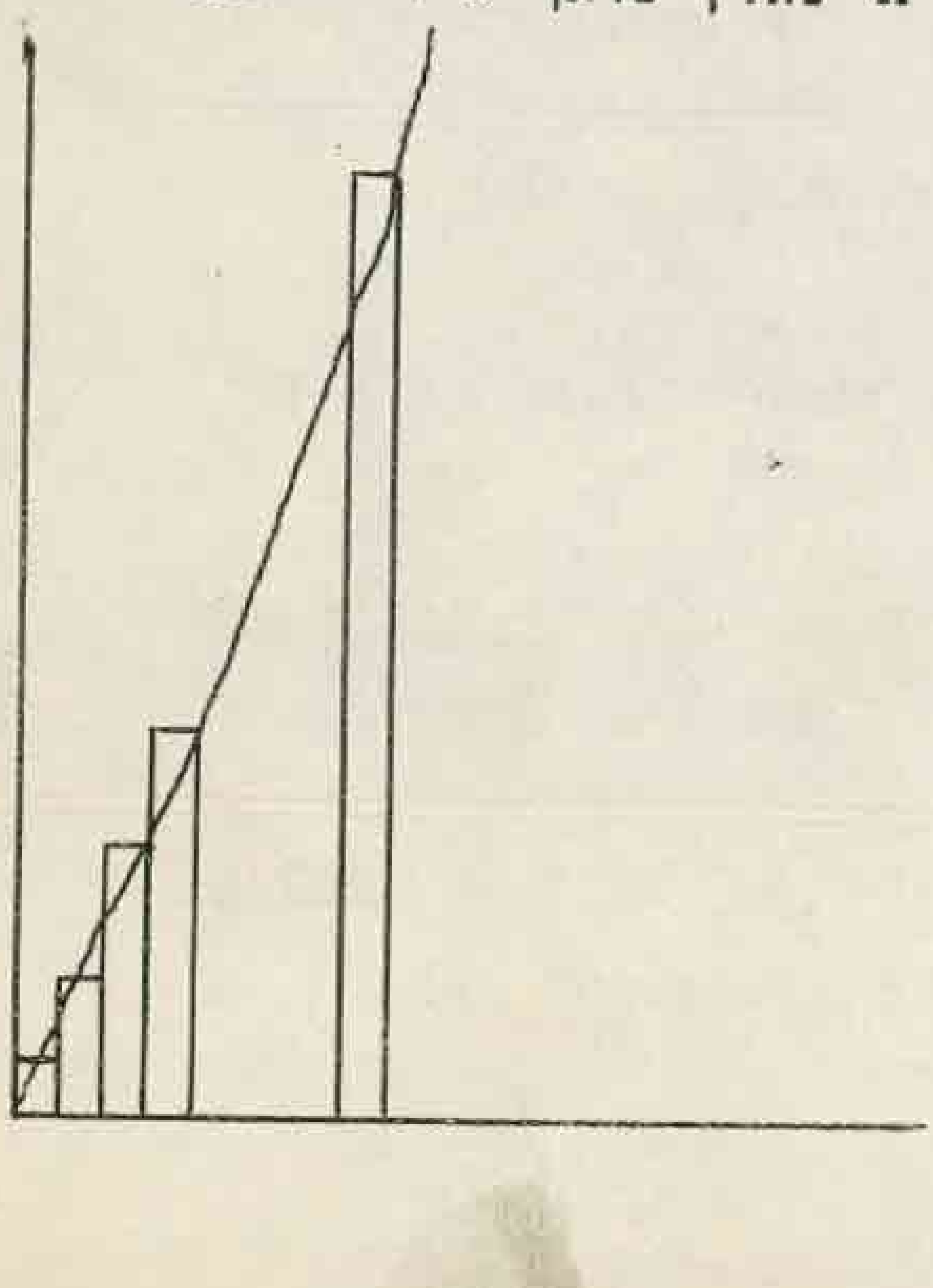
והמסקנה מיידית.

<u>משפט עזר 3</u>

$$\sum_{i=1}^{k} i^n < \frac{1}{n+1} k^{n+1} + \alpha k^{n+1} \qquad (10)$$

כש- α תלוי ב- n ו- k. עבור n נתון שואף α ל- 0 כש- $k \to \infty$.

<u>הוכחה</u>



נשרטט k מלבנים בעלי רוחב יחידה כשהארך של המלבן ה- i הוא i^n (ראה ציור). ככל ש- k גדול תהווה מערכת המלבנים קירוב יותר טוב יחסית לשטח הנמצא מתחת לעקומה $y=x^n$ לעולם לא יהיה קטן ממנו, אך עבור k גדול מאד, יהיה ההפרש בין השטח הכולל $\frac{1}{n+1}k^{n+1}$ (שהוא

השטח שמתחת לעקומה $y=x^n$ כפי שרואים מחשבון אינטגרלי) קטן ביחס ל- $\frac{1}{n+1}k^{n+1}$. זה מוכיח את המשפט.

ג. <u>הוכחת המשפט</u>

נציב במשפט עזר 1, $a_i=i^n$ וניקח סדרה משלימה במקום ה- b_j נכתב

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = A, \quad \sum_{i=1}^{\ell} b_j = B, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{\ell}(a_i+b_j) = C .$$

הסכום המגדיר את C כולל (לפחות) כל המספרים הטבעיים עד k^n ולכן

$$C \geqslant \tfrac{1}{2}k^n\,(k^n+1) \tag{11}$$

מאידך נובע מ- (10) כי

$$A < \left(\frac{1}{n+1}+\alpha\right)k^{n+1} \tag{12}$$

ולכן יוצא ממשפט עזר 1 כי

$$kB > \tfrac{1}{2}k^n\,(k^n+1) - \ell\left(\frac{1}{n+1}+\alpha\right)k^{n+1} \tag{13}$$

וזה מביא אותנו למשפט עזר הבא:

<u>משפט עזר 4</u> עבור כל ערך שנקבל עבור B יהיה $C > \frac{1}{2}k^{2n} + \frac{kB}{n}$.

<u>הוכחה</u> עבור כל b_j נתון יהיו האיברים i^n הגדולים מ- $k^n - b_j$ "מחוץ לתחום" במובן שהסכום i^n+b_j עבורם יחרוג

מהקבוצה $(1,2,\dots\dots,k^n)$. מספר החזקות האלה הוא
$k-\sqrt[n]{k^n-b_j}$; אם נציב $x=k^n$ ב- (6) ו- $h=b_j$ נראה כי המספר
גדול מ- $\frac{b_j}{nk^{n-1}}$ ולכן המספר הכולל של איברים שהם מחוץ לתחום
הוא לפחות $\sum_{j=1}^{\ell}\frac{b_j}{nk^{n-1}}$, דהיינו $\frac{B}{nk^{n-1}}$, וכל אחד מהם גדול,
לפי ההנחה, מ- k^n. יוצא איפוא כי סכומם גדול מ- $\frac{Bk}{n}$. מאידך
המספרים בסכום C שהם בתוך התחום כוללים את כל המספרים
הטבעיים עד k^n (יתכן שכמה מאלה יופיעו יותר מפעם אחת)
ולכן סכומם הוא לפחות $\frac{1}{2}k^n(k^n+1)$ שהוא גדול מ- $\frac{1}{2}k^{2n}$. מכל
זה נובע כי

$$C > \frac{1}{2}k^{2n} + \frac{kB}{n} \tag{14}$$

ז.א. משפט העזר.

מהאמור לעיל אנו מסיקים כי

$$kB > C - \frac{1}{n+1}k^{n+1}\ell - \alpha k^{n+1}\ell$$

$$> \frac{1}{2}k^{2n} + \frac{kB}{n} - \left(\frac{1}{n+1}+\alpha\right)k^{n+1}\ell \tag{15}$$

ולכן

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)kB > \frac{1}{2}k^{2n} - \left(\frac{1}{n+1}+\alpha\right)k^{n+1}\ell$$

ז.א.

$$kB > \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{2}k^{2n} - \left(\frac{1}{n+1}+\alpha\right)k^{n+1}\ell\right\} \tag{16}$$

עכשיו נגש להערכת $k\ell$. ברור כי מספר האיברים בסכום C הוא $k\ell$ וזה כולל את כל המספרים הטבעיים עד k^n, וגם ראינו בהוכחת משפט עזר 5 כי הוא כולל לפחות $\frac{B}{nk^{n-1}}$ איברים החורגים מהתחום הזה. מכאן יוצא כי

$$k\ell > k^n + \frac{B}{nk^{n-1}}$$

$$> k^n + \frac{1}{(n-1)k^n}\ \{\tfrac{1}{2}k^{2n} - (\tfrac{1}{n+1}+\alpha)k^{n+1}\ell\}$$

בגלל (16),

$$= k^n\ \{1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)}\} - \frac{k\ell}{n-1}\ (\frac{1}{n+1}+\alpha) \tag{17}$$

ומכאן

$$k\ell[1+\frac{1}{n^2-1}+\frac{\alpha}{n-1}] > k^n\ [1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}]$$

ולכן

$$\ell[\frac{n^2+\alpha(n+1)}{n^2-1}] > k^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}$$

ז.א.

$$\frac{\ell}{k^{n-1}} > \frac{(2n-1)(n+1)}{2[n^2+\alpha(n+1)]} \tag{18}$$

באי שויון (18) ניתן ל- k לשאוף ל- ∞ ואז $\alpha\to 0$. מכאן נובע כי הערך הגבולי של $\frac{\ell n}{k^{n-1}}$ עבור k גדול הוא לפחות $\frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2}$ ז.א. $1+\frac{n-1}{2n^2}$.

ד. <u>הערות</u> (1) כש- k מספר טבעי גדול קרוב היחס מאד לערך הגבולי הנ"ל, למשל הערך הגבולי של $k\ell_2$ הוא 9/8. עבור $k=3x10^6$ יהיה $\alpha \approx 5x10^{-7}$ ולכן השפעתו על $\frac{1}{k}\ell_2$ תהיה קטנה מאד. (2) בהערכות שבסעיף II לא נצלנו את העובדה כי בין המספרים a_i+b_j שהם בתוך התחום יהיו כאלה שיופיעו שם כמה פעמים. זה היה מאפשר להשיג אי-שויון חזק יותר מ- (17), אבל ספק אם השפור בהערכה הסופית של $\ln$ היה מספיק כדי להצדיק את החישובים המסובכים ביותר שבהם היה הדבר כרוך.

<u>פתרון הבעיה מעמוד 1</u>

אנו רואים כי הפנסיה לפורש בגיל 80 היא פי שנים מזו המגיעה לפורש בגיל 60. לכן ננסה לבדק את האפשרות כי הפנסיה היא ביחס הפוך ל- $(100-m)$ כש- m הוא גיל הפרישה. ואמנם אנו רואים כי הנוסחה

$$p = \frac{25200}{100-m}$$

מתאימה בדיוק לטבלא.

לפי ההנחה שזה באמת הקשר נבדק את המקרה של זה שיאריך ימים עד 120. אם יפרש בגיל m יקבל ס"ה

$$p = \frac{12\cdot 25200(120-m)}{100-m}$$

כדי שזה יהיה מירבי מספיק לבדק ש-

$$\frac{120-m}{100-m} = 1 + \frac{20}{100-m}$$

ולכן דרוש כי $100-m$ יהיה קטן ככל האפשר, ז.א. שעליו לחכות עד לרגע האחרון ולפרש בגיל 80.

הפסימיסט המצפה רק ל- 90 שנות חיים יצטרך לקבע את m כך ש- $\frac{90-m}{100-m}$ יהיה מירבי, אבל

$$\frac{90-m}{100-m} = 1 - \frac{10}{100-m}$$

ולכן עליו לעשות $100-m$ גדול ככל האפשר, דהיינו להזדרז לפרש כבר בגיל 50.

מכתב למערכת

פרופ. ח. חנני (טכניון)

פרופ' גילים היקר,

בקראי את הרשימה של סרג'יו הרט ב"גליונות למתמטיקה" כרך ג', מס' 8, נזכרתי שראיתי הערכה של π, בפירושו של אבן עזרא והנני מעביר אותה לך כלשונה:

<u>אבן עזרא. מתוך פרוש לספר שמות ג', ט"ו</u>

וכאשר תחבר מרובע האחד אל מרובע ראש הנפרדים יהיה המחובר הוא הדומה. ואם תשים אלכסון עגול במספרו ותוציא יתר בשלישית יהיה המשולש שהוא שוה השוקים כמספר הקו הסובב וכמוהו המרובע הארוך בעגול.

<u>הסבר</u>

ראש הנפרדים הוא 3 ובכן הכוונה למספר 10. יהיה נתון מעגל בעל קוטר 10. בשליש הקוטר נעביר מיתר ניצב עליו ונבנה על המיתר משולש שוה שוקים שגובהו החלק הגדול של הקוטר.
השטח של המשולש (שהוא גם שטחו של המלבן, שגובהו-גובה המשולש ובסיסו חצי המיתר שעליו בנוי המשולש) שוה להיקף המעגל.

לפי זה

$$\frac{20}{3} \cdot \frac{10}{3} \sqrt{2} = 10\pi$$

$$\pi = 3 \cdot 1427$$

בברכה
חיים חנני

הודעה לקוראים

מפנים את תשומת לב הקוראים לשנוי במספר חשבוננו בבנק הדואר. המספר החדש הוא 4-23357-4, והמנויים המשלמים את חשבונותיהם דרך בנק זה יקלו על עצמם ועלינו אם יקפידו להשתמש במספר הנכון. תודה.

משואות פונקציונליות

1. מבוא

במשואה רגילה ניתנת אינפורמציה בנוגע לאיזו פונקציה $f(x)$ ועלינו לקבוע מה הם הערכים של המשתנה x אשר עבורם האינפורמציה נכונה. למשל אם $f(x)$ הוא הפונקציה x^2+4 והאינפורמציה היא ש- $f(x)=13$ נוכל בנקל לקבוע כי האינפורמציה נכונה אך ורק כש- $x=\pm 3$, במלים אחרות אלה הם שרשי המשואה $f(x)=13$. מובן כי לא כל המקרים הם כה פשוטים. אם נתבקש לקבוע את x כך ש- $2^x=0$ נצטרך להודות כי הדבר בלתי אפשרי, כי אין x כזה. מאידך קיימים מקרים שישנם פתרונות אבל לאו דוקא ממשיים, לדוגמא $x^2+2x+10=0$ אשר שרשיו הפורמליים הם $-1 \pm 3\sqrt{-1}$.

אבל במאמר זה נדון בסוג אחר של משואה. כאן נותנים לנו אינפורמציה אודות פונקציה בלתי ידועה, $f(x)$. וקובעים כי האינפורמציה נכונה לגבי <u>כל</u> x, או לפעמים לגבי כל x בתחום מסוים, והבעיה היא לקבוע את עצם צורת הפונקציה $f(x)$. למשל אם ניתן כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת

$$f(s) + f(t) = f(s+t) \tag{1}$$

עבור כל s ו- t. מה נוכל להסיק אודות צורתו של $f(x)$? למעשה אין תיאוריה כללית להתקיף בעיות מסוג זה וכל משואה פונקציונילית כזאת זקוקה לטפול אינדיבידואלי, אבל להלן נדגים כמה משואות ונראה דרכים לפתירתן.

2. המשואה $f(s)+f(t)=f(s+t)$

אם ניקח את המשואה ונציב $t=0$ נראה כי, עבור כל s,

$$f(s) + f(0) = f(s) \tag{2}$$

ולכן $f(0)=0$. מאידך אנו רואים כי

$$\begin{aligned} f(r) + f(s) + f(t) &= f(r) + f(s+t) \\ &= f(r+s+t), \end{aligned}$$

וכו', ז.א. כי, עבור כל $t_n, \ldots\ldots, t_1,t_2$ קיים

$$f(t_1)+f(t_2)\ldots+f(t_n)=f(t_1+t_2\ldots+t_n) \tag{3}$$

נגדיר $f(1)=a$, אזי אם נציב ב- (3) ו $t_1=t_2\ldots\ldots=t_n=$ ......

נראה כי

$$f(n) = n\,(1) = na \tag{4}$$

עבור כל n טבעי.

אם m הוא מספר שלם שלילי, נגיד $m=-n$, אזי

$$f(m) + f(n) = f(m+n) = f(0) = 0$$

ולכן

$$f(m) = -f(n)$$

$$= -na$$

$$= ma \tag{5}$$

הוכחנו אפוא כי עבור כל x שלם, קיים $f(x)=ax$. עכשיו יהיה x מספר רציונלי (לאו דוקא חיובי), נגיד $x=\frac{p}{q}$, כש- q הוא מספר שלם חיובי ו- p הוא מספר שלם כלשהי. ניקח ב- (3) $n = q$; $t_1=t_2\ldots\ldots = t_q = \frac{p}{q}$ ואז יוצא כי

$$qf(\tfrac{p}{q}) = f(q\cdot\tfrac{p}{q})$$

$$= f(p)$$

$$= ap$$

ולכן

$$f(\tfrac{p}{q}) = a\,\frac{p}{q}$$

מכאן אנו רואים כי $f(x)=ax$ עבור כל x רציונלי. אם גם נדרוש כי הפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה יוצא כי הדבר נכון לגבי כל x. מכאן כי הפונקציה הרציפה היחידה המקיימת (1) היא $f(x)=ax$ כש- a הוא קבוע. מאידך אנו רואים כי, עבור כל a , מקיימת אמנם הפונקציה הזאת את המשואה הפונקציונלית.

אם נעמד בפני המשואה

$$f(s+t) = f(s)f(t) \tag{6}$$

עם התנאים הנוספים ש- f הוא רצוף וגם חיובי, נוכל להעבירה לבעיה הקודמת על ידי הצבת $\phi(x)=\log[f(x)]$ ואז ברור כי ϕ מקיים משואה מהצורה (1) מכאן נסיק כי $\log[f(x)]$ פרופורציונלי ל- x ולכן יש ל-f(x) הצורה b^x, כש- b הוא קבוע. נשאיר לקורא לנסות להוכיח את הדבר הזה במישריך בלי לחזור ל- (1).

3. משואות שונות

א. $f(xy)=f(x)f(y)$, עבור $x > 0$, $y > 0$ (7)

המשואה הזאת שונה מ- (6) אבל אם נכתב $\xi=\log_e x$, ונגדיר $\phi(\xi)=f(x)=f(e^{\xi})$; וכמו כן נגדיר $\eta=\log_e y$ נעביר (7) לצורה

$$\phi(\xi+\eta) = \phi(\xi)\phi(\eta)$$

ולכן, לפי האמור לעיל, יהיה.

$$\phi(\xi) = b^3 \tag{8}$$

עבור איזה קבוע b. אבל מכאן נובע כי

$$f(x) = \phi(\xi) = b^{\log_e x} = x^{\log_e b}$$

$$= x^c$$

כש- c הוא קבוע אחר. הפתרון הכללי ביותר של (7) הוא איפוא $f(x)=x^c$ עבור c קבוע.

ב. $$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} \tag{8}$$

משואה זו הופיעה בזמן האחרון וראוי לתת עליה את הדעת. אם נכתב $x=ay$ נקבל

$$\frac{f(ay)+f(y)}{f(ay)-f(y)} = f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$$

ולכן

$$\frac{f(ay)}{f(y)} = \frac{f(\frac{a+1}{a-1})+1}{f(\frac{a+1}{a-1})-1} \qquad (9)$$

מ-(9) נובע כי $\frac{f(ay)}{f(y)}$ תלוי רק ב- a ולא ב- y ולכן נוכל לכתב

$$\frac{f(ay)}{f(y)} = g(a) \qquad (10)$$

כשהפונקציה $g(a)$ עוד טעונה הגדרה. אבל a ו- y סימטריים ולכן גם

$$\frac{f(ya)}{f(a)} = g(y) \qquad (11)$$

ומ- (10) ו-(11) אפשר להסיק כי $\frac{g(a)}{f(a)} = \frac{g(y)}{f(y)}$. מאחר שזה נכון עבור כל זוג a, y יוצא כי $\frac{g(y)}{f(y)}$ קבוע, נגיד k. מכל זה אנו מסיקים כי הפונקציה $f(x)$ המבוקשת מקיימת

$$f(xy) = kf(x)f(y) \qquad (12)$$

אם נציב $y=0$ נקבל

$$f(0) = kf(x)f(0) \qquad (13)$$

עבור כל x. אם נניח כי $f(x)$ איננו קבוע יוצא כי $f(0)=0$.
עכשיו אם נציב $y=0$ במשואה המקורית (8) נקבל

$$f(1) = \frac{f(x)+0}{f(x)-0} = 1 \qquad (14)$$

והצבת $x=y=1$ ב- (12) תביא $1 = k\cdot 1\cdot 1$, ז.א. $k=1$.
מכאן כי $f(x)$ מקיים בעצם את (7) ולכן, לפי האמור, יהיה $f(x)=x^c$ עבור איזה c קבוע. נשאר לראות איזו ערכים של c יאפשרו קיומה של (8). לצורך זה נציב שם $y=1$, $x=2$.
ונקבל

$$3^c = \frac{2^c+1}{2^c-1} \qquad (15)$$

וקל לראות (למשל באופן גרפי) כי האפשרות היחידה היא $c=1$.
מכאן כי הפתרון היחידי הוא $f(x)\equiv x$ וקל לאשר כי זה אמנם
ממלא את הדרישות.

ג.
$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(\tfrac{\pi}{2}-x)f(\tfrac{\pi}{2}-y) \qquad (16)$$

אנו יודעים כי הפונקציה $f(x)\equiv \cos x$ מקיימת את היחס (16).
השאלה היא האם היחידה כזאת, ומה ניתן ללמד על $f(x)$ רק
מהעובדה כי היא מקיימת (16).

אם נציב $x=\frac{\pi}{2}-\xi$, $y=\frac{\pi}{2}-\eta$ נקבל

$$f[\pi-(\xi+\eta)] = f(\tfrac{\pi}{2}-\xi)f(\tfrac{\pi}{2}-\eta)-f(\xi)f(\eta)$$
$$= - f(\xi+\eta)$$

בגלל (16). אבל $\xi+\eta$ יכול להיות כל מספר שהוא, ולכן

$$f(\pi-x) = -f(x) \qquad (17)$$

אם ב-(17) נציב $x=\frac{\pi}{2}$ נקבל

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = -f(\tfrac{\pi}{2})$$

ולכן

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad (18)$$

עכשיו אם ניקח $y=0$ ב-(16) נקבל

$$f(x) = f(x)\, f(0)$$

ולכן אם קיים אפילו x אחד ש- $f(x)\neq 0$ נוכל לראות כי
$f(0)=1$. נוציא מהדיון $f(x)\equiv 0$ המקיים את (16).

יש לנו איפוא

$$f(0) = 1 \qquad (19)$$

ומ- (17) ו-(19) נובע כי

$$f(\pi) = -1 \qquad (20)$$

הסקנו איפוא כמה תכונות של $f(x)$ מהמשואה (16). כדי להמשיך
נדרוש מ- $f(x)$ גם קיומן של הנגזרות $f'(x), f''(x)$, עבור כל
x. עכשיו נובע מ-(16) כי

$$f(x+y)-f(x) = f(x)[f(y)-1] - f(\tfrac{\pi}{2}-x)f(\tfrac{\pi}{2}-y)$$

ולכן

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f(x)\cdot\frac{f(y)-f(0)}{y}-f(\tfrac{\pi}{2}-x)\frac{f(\frac{\pi}{2}-y)}{y}$$

אם ניתן עכשיו ל-y לשאף ל- 0 ישאף אגף השמאל ל- $f'(x)$

בעוד שהאיבר הראשון מצד ימין ישאף ל- $f(x)\cdot f'(0)$. מכאן כי גם האיבר האחרון שואף לגבול ולכן

$$f'(x) = Af(x) - Bf(\tfrac{\pi}{2}-x) \tag{21}$$

כש- $A=f'(0)$, $B=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(\frac{\pi}{2}-y)}{y}$; ומכל מקום A,B אינם תלויים ב-x.

נגזר שוב את (21) ונקבל

$$f''(x) = Af'(x) + Bf'(\tfrac{\pi}{2}-x)$$

$$=[Af(x)-Bf(\tfrac{\pi}{2}-x)] + B[Af(\tfrac{\pi}{2}-x)-Bf(x)]$$

$$= (A^2-B^2)\, f(x) \tag{22}$$

נכתב $A^2-B^2=k^2$, תוך הבנה כי k יכול להיות מדומה ויש לנו

$$f''(x) = k^2 f(x) \tag{23}$$

אנו יודעים מחשבון דיפרנציאלי כי הפונקציה $f(x)=Pe^{kx}+Qe^{-kx}$ תקיים את (23) עבור כל בחירה של הקבועים P,Q. אפשר גם להוכיח, אם כי לא נביא כאן את ההוכחה, שזו הצורה היחידה האפשרית של פונקציה המקיימת את (23), נקבל אותה איפוא ונציב אותה ב-(17), (18), (19), (20). נקבל

עבור כל x:

$$Pe^{kx}+Qe^{-kx} \equiv -[Pe^{k(\pi-x)}+ e^{-k(\pi-x)}] \tag{24}$$

$$Pe^{\frac{1}{2}k\pi} + Qe^{-\frac{1}{2}k\pi} = 0 \tag{25}$$

$$(26) \qquad P + Q = 1$$

$$(27) \qquad Pe^{k\pi} + Qe^{-k\pi} = -1$$

אפשר היה לחשב כי יש לנו כאן ארבע משואות ושלשה נעלמים (P,Q,k) ולכן אין פתרון. למעשה ההיפך הוא נכון וישנם אינסוף פתרונות, כי אפשר לאשר ע"י הצבה ישירה שכל ארבע המשואות מתקיימות, עבור כל k , אם ניקח

$$(28) \qquad P=\frac{1}{1-e^{k\pi}} \quad Q=\frac{-e^{k\pi}}{1-e^{k\pi}}=\frac{1}{1-e^{-k\pi}}$$

זה ועוד. אם נציב $f(x)$, עם k כלשהו ו- P,Q מוגדרים ע"י (28) במשואה (16) נראה שהיא מתקיימת ולכן יש לנו כאן אוסף אינסופי של פתרונות. אם אנו רוצים לייחד את הפתרון עלינו להטיל איזה תנאי נוסף. אם נדרש למשל ש-$f^1(0)=1$, נקבל $k(P-Q)=0$, וזה, יחד עם (26), גורר $P=Q=\frac{1}{2}$. הצבת הערכים האלה ב-(25) גוררת ו- $e^{k\pi}=-1$, ולכן $k=i$. הגענו איפוא ל- $f(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\cos x$. נשאיר לקורא לעיין במשואה הפונקציונלית

$$g(x+y) = g(x)g(\tfrac{\pi}{2}-y) + g(\tfrac{\pi}{2}-x)g(y)$$

בעיה בתורת המספרים

באוליפאדת נוער במתמטיקה תשכ"ט הופיעה השאלה הזאת: הוכח כי בכל קבוצה של שבעה מספרים טבעיים עוקבים ישנו לפחות אחד אשר אין לו גורם משותף עם אף אחד משחת האחרים. (גליונות מתמטיקה, כרך 3, מס' 8. באותה חוברת, ע' 14, מופיעה גם הוכחה) מתעוררת השאלה האם המספר __שבע__ המופיע בשאלה מיוחד או שמא יהיה הדבר נכון גם בשביל גושי מספרים בעלי ארכים אחרים.

לדוגמא נוכיח את הדבר עבור כל קבוצה של עשרה מספרים טבעיים עוקבים.

<u>הוכחה</u> אם לשני מספרים בקבוצה כזאת יש גורם משותף הרי יצטרך גורם משותף זה לחלק גם את ההפרש בין שני המספרים. אבל ההפרש הזה איננו עולה על 9, ולכן הגורמים המשותפים הראשוניים היחידים שיש להתחשב בהם לא יוכלו להיות אלא 2,3,5, או 7. יספיק איפוא אם נוכיח כי בכל קבוצה של עשרה משפרים טבעיים עוקבים יימצא תמיד אחד שאיננו מתחלק באף אחד מבין 2,3,5,7. נשאיר לקורא לגמר את ההוכחה (ראה עמוד 32).

המשפט נכון איפוא גם עבור קבוצות של 10 מספרים. בדרך דומה אפשר להוכיח אותו עבור קבוצות בכל אורך עד 16. את העובדה הזאת הוכיח המתמטיקאי ההודי פילי (S.S.Pillai) כבר לפני שלשים שנה. עבור קבוצות של 17 מספרים גילה פילי כי המשפט איננו נכון והעיר כי לשתי הקבוצות (2184 עד 2210) וגם (27830 עד 27846) יש התכונה שלכל מספר בהן אפשר לזווג מספר אחר באותה קבוצה כך שלשניהם גורם משותף. הוא אף ניחש כי הדבר נכון עבור כל אורך מ- 17 ומעלה אבל לא הצליח להוכיח את הדבר.

בשנת 1941 הוכיח בראור (A.BRAUER) כי הדבר נכון עבור כל אורך מעל ל- 300, אבל הניחוש המקורי של פילי זכה לגאולה רק בהחחלת שנה זו. בעתון American Mathematical Monthly מתאריך ינואר 1969 הוכיח אבנס (R.J.Evans) בדיוק מה שניחש פילי.

<u>ההוכחה</u> עבור 17 ו- 18 פשוטה. ניקח $x = 87890$. משמעותו של הערך הזה הוא ש- $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2.5.11.17)$ וגם $x \equiv -16 (\mathrm{mod}\ 3.7.13)$, אבל כל x המקיים את שני התנאים האלה היה יכול לשמש במקומו (וישנם למעשה אינסוף ערכים של x המקיימים את שני הקונגרואנצים). עכשיו יסמן N אחד המספרים 17, 18 (לא חשוב איזה). קל לאשר כי לקבוצה $\{x, x+1, x+2, \ldots\ldots, x+N-1\}$ יש התכונה כי לכל מספר בה אפשר לזווג מספר שני בקבוצה כך שלשניהם יהיה גורם משותף.

נעבור עכשיו למקרה $N \geqslant 19$ ונתחיל במשפט עזר.

<u>משפט עזר</u> אם k הוא מספר טבעי גדול מ- 24 אזי נמצא תמיד לפחות מספר ראשוני אחד בין k ל- $6k/5$.

לא נוכיח כאן את המשפט הזה וגם הוכחתו איננה פשוטה. את המשפט הוכיח לראשונה המתמטיקאי היפאני נגורה (J.NAGURA) בשנת 1952. אנחנו נסתפק בזה שנשתמש במשפט בלי הוכחה עבור. כל N טבעי יהיה P_1 המספר הראשוני הקטן ביותר שאיננו קטן מ- $\frac{1}{2}N$, P_2 המספר הראשוני הבא אחרי P_1, ו- P_3 זה שאחרי P_2. ממשפט נגורה נובע כי, אם $N > 50$,

אזי
$$P_3<\frac{6P_2}{5}<\frac{216}{125}\cdot\frac{N}{2}\ ,\ P_2<\frac{6P_1}{5}<\frac{36}{25}\cdot\frac{N}{2}\ ,\ P_1<\frac{6}{5}\cdot\frac{N}{2}$$

ולכן
$$P_2+P_3-P_1<P_1\left[\frac{6}{5}+\frac{36}{25}-1\right]$$

$$<\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}+\frac{36}{25}-1\right)\cdot\frac{N}{2}$$

$$=\frac{123}{125}N<N \qquad (1)$$

אי-שויון (1) נובע איפוא ממשפט נגורה עבור $N\geq 50$, ואפשר לאשר על ידי בדיקה ישירה כי הוא נכון כבר עבור $N\geq 19$. עכשיו יהיו $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_R$ סדרת כל המספרים הראשוניים הקטנים מ- P_1 ויהיה $R=q_1q_2\ldots\ldots q_R$. ניקח מספר טבעי x המקיים:

$$\left.\begin{array}{ll} x\equiv 0 \pmod{R} & (2)\\ x\equiv -1 \pmod{P_1} & (3)\\ x\equiv 1 \pmod{P_2} & (4)\\ x\equiv -P_1 \pmod{P_3} & (5)\end{array}\right\}$$

על קיומו של x כזה ודרך למצא אותו נדון למטה, בינתיים נסתכל בקבוצה B_N של המספרים

$$\{x-(N-P_2),\ x-(N-P_2)+1,\ x-(N-P_2)+2,\ldots,x+(P_2-1)\}$$

הטענה היא כי לכל מספר r בקבוצה הזאת אפשר לייחס מספר שני s, כך ש- $(r,s)>1$.

מ- (1) נובע כי
$$2<P_1<P_2<P_3<N$$

ולכן יש ל- B_N הצורה

$$\{x-(N-P_2),\ x-(N-P_2)+1,\ldots,x-1,x+1,\ldots,x+P_1,\ldots,x+P_2-1\}$$

מ- (2) נובע כי x זוגי, ולכן עבור $r=x$ נוכל לקחת $s=x+2$. אם $r=x+1$ נוכל לקחת $s=x+P_1+1$ ואז, לפי (3), יחלק P_1 גם את r וגם את s. כמו כן עבר $r=x-1$ יקיים $s=x+P_2+1$ את התנאים, בגלל (4); ומ-(5) נובע כי אפשר לזווג ל-$r=x+P_1-1$ את $s=x-(P_3-P_1)$.

בקשר לזיווג האחרון אנו מסתמכים על (1) המבטיח כי $x-P_2+N \geqslant x-(P_3-P_1)$, ולכן s זה שייך אמנם ל- B_N. אם r הוא איזה מספר ב- B_N פרט לערכים המיוחדים האלה הרי יש לו הצורה $x\pm i$ כש- i מתחלק ע"י איזה מספר ראשוני קטן מ- P_1 ולכן, בגלל (2), נוכל לקחת $s=x$.

זה בעצם מוכיח את הטענה פרט לשאלת פתרון המערכת (2).. (5). בעיה זו היא מקרה פרטי של בעיה הידועה בשם <u>הבעיה הסינית</u>. בלי להיכנס לבעיה הכללית נדון במקרה המיוחד שלנו. ראשית כל נגדיר שלשה מספרים שלמים t_1, t_2, t_3 שיקיימו

$$P_2P_3t_1 \equiv -1 \pmod{P}$$

$$P_3P_1t_2 \equiv 1 \pmod{P_2}$$

$$P_1P_2t_3 \equiv -P_1 \pmod{P_3} \qquad \text{-ו}$$

מאחר ש- P_1, P_2, P_3 הם מספרים ראשוניים שונים, אין קושי למצא את t_1, t_2, t_3. אז ברור כי המספר

$$T = P_2P_3t_1 + P_3P_1t_2 + P_1P_2t_3$$

מקיים את (3), (4), ו-(5). כי אם לדוגמה נחלק את T ב- P_3 תהיה השארית שווה לזו שתתקבל מחלוקת $P_1P_2t_3$ ב- P_3 מאחר ששני האיברים האחרים ב- T מתחלקים ב- P_3 ללא שארית.

אם נגדיר עכשיו

$$S_u = T + P_1P_2P_3u$$

עבור כל u שלם, אזי ברור כי גם S_u יקיים את (3), (4), ו-(5)

אם נוכל לקבע את u כך ש- Su יקיים גם את (2) הרי
$x=Su$ יפתר את הבעיה אבל זה דורש רק ש-

$$P_1P_2P_3u \equiv -T \pmod{R} \qquad (6)$$

ואת (6) תמיד אפשר לפתר מאחר של- R ו- $P_1P_2P_3$ אין גורם משותף.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1. לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס).
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ- 31.1.1970.
4. לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

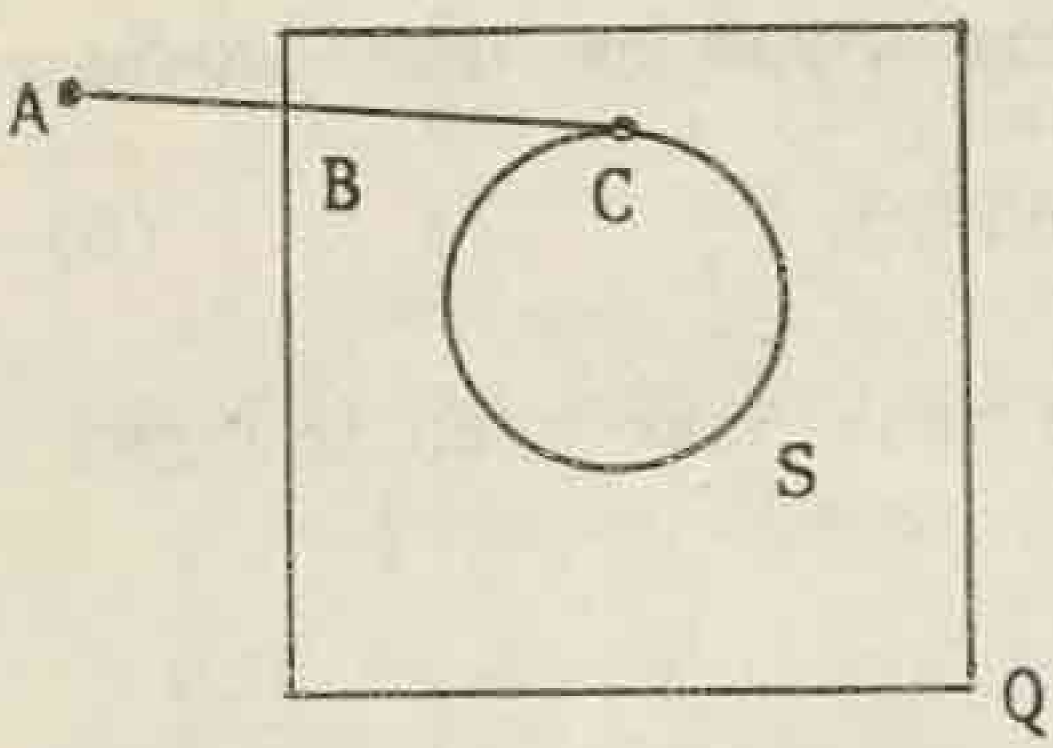
המספר בסוגריים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לאותה בעיה.

השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' לבד (אין פירוש הדבר שהן קלות).

(2)*376 המעגל החסום במשולש ABC נוגע בצלעות AB, CA, BC ב- Z,Y,X בהתאמה. הוכח כי הישרים CZ,BY,AX נפגשים בנקודה אחת.

(2)*377 הקווים הישרים m,ℓ נפגשים ב-O ושתי הנקודות Q,P נמצאות בפנים הזוית שנוצרה. למצא A ו- B על m,ℓ בהתאמה כך ש- PA+AB+BQ יהיה קטן ככל האפשר.

(3) 378 המעגל S נמצא בתוך רבוע Q אבל לאו דוקא במצב סימטרי. הנקודה A נמצאת מחוץ ל- Q. לקבע קו ישר העובר דרך A ופוגש את Q ב- B ואת S ב- C כך ש- AB=BC (ראה ציור) האם תהיה בניה זו תמיד אפשרית?



(3)*379 הסדרה $(1,1,2,3,5,\ldots\ldots)$ מוגדרת ע"י $F_0=F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geq 2)$; ואילו הסדרה $(2,1,3,4,7,11,\ldots)$ מוגדרת ע"י $L_0=2$, $L_1=1$, $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ $(n\geq 2)$. הוכח כי פרט למספרים 1,2,3 אין מספר אחר השייך לשתי הסדרות.

(3) 380 הוכח כי עבור כל מספר n טבעי וכל x ממשי

$$\frac{1}{x}-\binom{n}{1}\frac{1}{x+1}+\binom{n}{2}\frac{1}{x+2}-\binom{n}{3}\frac{1}{x+3}+\ldots\ldots=\frac{n!}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}$$

(2) 381 נתון כי שנים מבין שרשי המשואה

$$ax^3+3bx^2+3cx+dco$$

הם שוים, כוכח כי ערכם המשותף הוא

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{bc-ad}{ac-b^2}$$

(3) 382 לפתר את המשואה

$$\cos\{\text{arc}\tan[\sin(\text{arc}\cot x)]\}=x$$

(3) 383 לחשב את הסכום

$$\cos\theta+\frac{\operatorname{cosec}\theta}{1!}\cos 2\theta+\frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{2!}\cos 3\theta+\frac{\operatorname{cosec}^3\theta}{3!}\cos 4\theta+\ldots$$

(3)*384 המספרים $a_1,a_2,\ldots\ldots$ מהווים טור חשבוני וכלם שונים מאפס. לחשב את הסכום

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\,a_{k+1}\,a_{k+2}}$$

(הוצע ע"י אורי עמיקם)

(2)*385 נותנים לפועל שני כלים שאחד מהחם מחזיק 3 ליטר והשני 5 ליטר ואומרים לו להביא בדיוק 4 ליטר מים מהברז בחצר. איך עליו לבצע את ההוראה תוך בזבוז קטן ככל האפשר של מים? (נראה כבזבוז גם מים שנשפכו וגם מים שנשארו בכדים מעל ל-4 הליטר שנדרשו).

(4)386 נתון כי $a\geq b\geq c\geq d>0$ ו- $s=a+b+c+d$. הוכח כי

$$a^d\, b^c\, c^b\, d^a \leq \left(\frac{s}{4}\right)^s$$

(הוצע ע"י אורי עמיקם)

(3)*387 כפר הודי, בעל 118 תושבים, נפגע ע"י רעידת אדמה, ונאסף סכום של $1,000$ כדי לעזר לניצולים, אשר ביניהם היו 20 ילדים. הוחלט לתת מספר שלם של דולרים לכל ילד, פי 6 מהסכום הזה לכל אשה, ולתת לכל גבר $5 יותר ממה שניתן לכל אשה. מספר הגברים שניצלו היה כפליים ממספר הנשים. בסוף התברר כי הקרן של $1,000 הוצאה בדיוק בלי להשאיר עודף. מה היה מספר הניצולים?

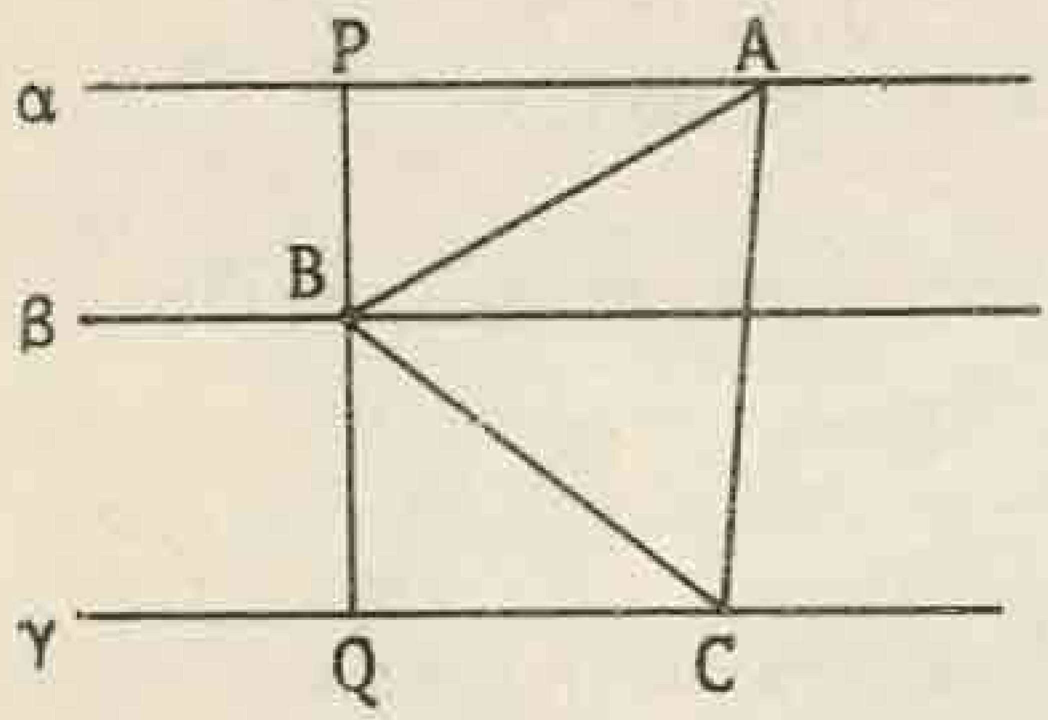
(3)*388 צלעות משולם מסוים מהוות טור חשבוני, וההפרש בין הזוית הגדולה ביותר לקטנה ביותר הוא90°. הוכח כי הצלעות הן ביחס $\sqrt{7}-1$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{7}+1$.

(3) 389 המספר x מוגדר ע"י 666.....66, כשהספרה 6 מופיעה 1001 פעמים. מה תהיה השארית אם נחלק את x ב-91?

(4) 390 המעגל החסום במשולש $A_oB_oC_o$ נוגע ב- A_oB_o, C_oA_o, B_oC_o ב- C_1, B_1, A_1 בהתאמה. כמו כן המעגל החסום ב- $A_1B_1C_1$ נוגע בצלעות משולש זה ב- A_2, B_2, C_2; זה החסום ב- $A_2B_2C_2$ נוגע בצלעות ב- A_3, B_3, C_3; וכו', הוכח כי אי אפשר ששנים מתוך הסדרה הזאת של משלשים יהיו דומים, אלא אם כן $A_oB_oC_o$ הוא שווה צלעות.

(הוצע ע"י אבי סיגלר)

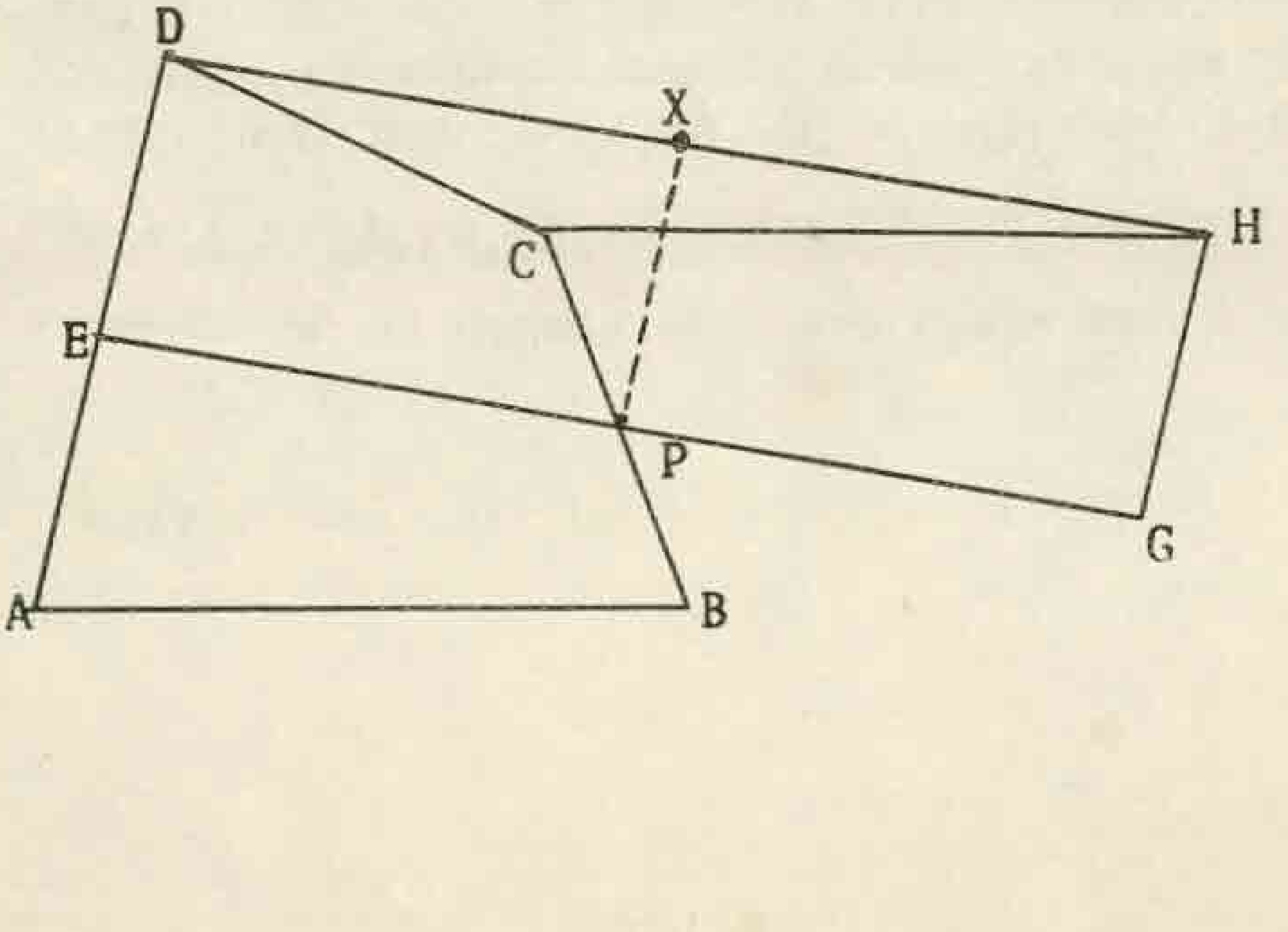
פתרון הבעיות 346 - 360



346. יהיו α,β,γ הקווים הישרים (ראה ציור). נקח נקודה B כל שהיא על β ונוריד PBQ מאונך ל- α,β ו- γ. יהיו $PB=p$, $BQ=q$. נקח A על ו- C על γ כך ש- $PA = (p+2q)/\sqrt{3}$, $PB = (2p+q)/\sqrt{3}$.

347. ממשפט פסקל נובע כי הישר XY יעבר דרך נקודת המפגש של AD,BC דהיינו המרכז.
אפשר גם להוכיח את הדבר בשיטת הנדסה אנליטית. כי ABCD הוא מלבן אשר מרכזו במרכז המעגל. אם ניקח צירים מקבילים לצלעות המלבן אין קושי להגיע לפתרון.

348. <u>ניתוח</u> נניח כי בנינו את המרובע ABCD ובי E,F הם אמצעי AD,BC בהתאמה, (ראה ציור). נחבר EF ונמשיך אותו עד G כך ש- $EF=FG$. יהיה GH מקביל ושוה ל-ED ולכן גם ל- AE. אזי ברור ש- EGHD הוא מקבילית ולכן $2EF=EG=DH$, וברור גם כי $AB=CH$. צלעות המשולש DCH ידועות איפוא ולכן נוכל לבנות אותו. יהיה X האמצע של DH. אזי EDXF הוא מקבילית ולכן $XF=DE$ ומכאן ש- XF וגם CF ידועים, נוכל אם כן למצא את F ומכאן להשלים את הבניה.



349. נניח כי המספר הוא $10b+a$ ולו n ספרות. מתנאי הבעיה
נובע כי $10^{n-1}a+b=2(10b+a)$, ז.א. $19b=a(10^{n-1}-2)$. מאחר
ש- a הוא מספר טבעי קטן מ-10 לא יוכל להתחלק ב-19 ולכן
19 הוא גורם של $10^{n-1}-2$. קל לאשר כי זה ייתכן אך ורק אם
n הוא כפולה של 18.

350. $$C_r=\frac{1}{\cos r\cdot\cos(r+1)x}=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin[(r+1)x-rx]}{\cos r\ \cos(r+1)x}$$

$$=\frac{1}{\sin x}\{\tan(r+1)x-\tan rx\}$$

ולכן
$$\sum_{r=1}^{n-1} C_r=\frac{1}{\sin x}\{\tan nx-\tan x\}$$

351. על ידי בדיקת האפשרויות השונות קל לאשר כי הכלב דוד
שייך לגיל.

352. נסמן ב- θ כל אחת מהזויות $\frac{k\pi}{13}$, $(k=1,2,\dots\dots,12)$, אזי,
$\sin 13\theta=0$ ז.א. לפי משפט דה-מואיבר,

$$\binom{13}{1}\cos^{12}\theta\sin\theta-\binom{13}{3}\cos^{10}\theta\sin^{3}\theta+\dots\dots=0$$

נחלק ב- $\sin^{13}\theta$ ונכתב $x=\mathrm{ctg}\,\theta$, אנו מקבלים

$$\binom{13}{1}x^{12}-\binom{13}{3}x^{10}+\dots\dots=0$$

את שרשי המשואה זאת אפשר לסדר בזוגות המתאימים ל- k,
$13-k$. נכתב $y=x^2$ ונקבל

$$\binom{13}{1}y^{6}-\binom{13}{3}y^{5}+\dots\dots=0$$

אשר שרשיה הם $ctg^2\frac{k\pi}{13}$ $(k=1,2,\ldots,6)$. מכאן נובע כי

$$\sum_{k=1}^{6} ctg^2\frac{k\pi}{13} = \binom{13}{3}/\binom{13}{1} = 22$$

.353

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{2^{r-1}} = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\ldots=\sum_{r=1}^{n} S_r$$

כש-

$$S_r = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}(1+2+2^2\ldots+2^{n-r-1})$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\;(2^{n-r}-1)$$

מכאן נובע כי

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=\rho}^{n-1} (2^{n-r}-1)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\;[1+2+2^2\ldots+2^{n-1}-n]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}[2(2^{n-1})-n]$$

$$= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

$$3(a^5+b^5+c^5) - (a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$$ .354

$$= 2(a^5+b^5+c^5)-(b^2c^3+b^3c^2)-(c^2a^3+c^3a^2)-(a^2b^3+a^3b^2)$$

$$= (b^5+c^5-b^3c^2-b^2c^3) + (c^5+a^5-c^2a^3-c^3a^2) +$$
$$+ (a^5+b^5-a^2b^3-a^3b^2)$$

$$= (b^2-c^2)(b^3-c^3)+(c^2-a^2)(c^3-a^3)+(a^2-b^2)(a^3-b^3)$$

$$= (b-c)^2(b+c)(b^2+bc+c^2)+\ldots+\ldots \geqslant 0$$

ולכן $3(a^5+b^5+c^5) \geqslant (a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$

$$\geqslant 3abc(a^2+b^2+c^2)$$

לפי משפט הממוצעים

.355 שוב לפי משפט הממוצעים קיים

$$(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n) \leqslant \left[\frac{(s-a_1)+(s-a_2)\ldots+(s-a_n)}{n}\right]^n$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}s\right)^n$$

וגם $\frac{1}{s-a_1}\cdot\frac{1}{s-a_2}\cdots\cdots\frac{1}{s-a_n} \leqslant \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}\cdots+\frac{1}{s-a_n}\right)\right]^n$

מגיעים מיד למסקנה ע"י הכפלות שני אי-שוויונות, והתנאים לשוויון הם מידיים.

.356

$$\frac{r}{r^4+r^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2-r+1} - \frac{1}{r^2+r+1}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2-r+1} - \frac{1}{(r+1)^2-(r+1)+1}\right]$$

ולכן הסכום שלנו שווה ל-

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(N+1)^2-(N+1)+1}\right] = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{N^2+N+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{N(N+1)}{N^2+N+1}$$

.357 הטבלא הבאה של הפרשים מסבירה את עצמה ולכן התשובה היא .1717

1			
	1		
2		26	
	27		48
29		74	
	101		72
130		146	
	247		96
377		242	
	489		120
866		362	
	851		
1717			

.358 קל להוכיח ע"י אינדוקציה כי

$$1^3+2^3+...+N^3 = \frac{1}{4} N^3(N+1)^2$$

ונשאר איפוא להוכיח כי

$$(1^2+2^2...+N^2) + (1^5 2^5+...+N^5) = \frac{1}{8} N^4(N+1)^4$$

גם את הנוסחה האחרונה נוכיח ע"י אינדוקציה, כי

$$(N+1)^2 + (N+1)^5 = \frac{1}{8}[(N+1)^4(N+2)^4-N^4(N+1)^4]$$

דבר שקל מאד לאשר.

.359 אם יש רק קו אחד אין מה להוכיח. נניח איפוא כי קיים לפחות קו אחד, ℓ, ולפחות תחנה אחת, P, שאינה שייכת ל-ℓ. כל קו העובר דרך P פוגש את ℓ בדיוק בתחנה אחת (לפי הנחה (iii)), ולכן מספר הקווים העוברים דרך P שווה למספר התחנות ב- ℓ .

עכשיו יהיו ℓ,m שני קווים כלשהם. אם נוכל למצא תחנה P שאינה שייכת לאף אחד מהשנים הרי נסיק מהאמור לעיל כי מספר התחנות ב-ℓ, כמספר התחנות ב-m, יהיו שניהם שווים למספר הקווים העוברים דרך P, ולכן גם שווים ביניהם.

אבל ℓ ו- m נפגשים, נגיד ב- A. ישנן תחנות נוספות בשניהם (הנחה (i)) וניקח X של ℓ ו- Y על m. יש קו המחבר X ו- Y (הנחה (ii)) ועל קו זה יש לפחות תחנה אחת נוספת (הנחה (iii)). נקרא לתחנה הזאת P .

<u>הוכחה</u> (ראה ע' 20)

ניקח קבוצה כזאת ונסנן מתוכה את הכפולות של 2. אלה יהיו חמישה במספר. בין חמשת המספרים האי-זוגיים הנותרים לא יוכל להיות יותר מכפולה אחת של 5, כי הרי המרחק המזערי בין שתי כפולות אי-זוגיות של 5 הוא 10. כמו כן לא יוכלו להיות יותר משתי כפולות אי-זוגיות של 3 ואחת של 7. מכאן כי כל פעולת הסנון לא תוציא מהקבוצה יותר מ-9 מספרים, ולכן יישאר תמיד לפחות אחד שאינו מתחלק האף אחד מבין 2,3,5,7.

רשימת פותרי השאלות 346-360

(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

אברבוך חיים	י'	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(6)
אהרנשטיין חנה	י"א	תיכון חרדי לבנות, רמת-גן	(7)
אחיטוב יונתן		צה"ל	(21)
אטיאס מריו	י"ב	תיכון "אחד-העם", פתח-תקוה	(15)
אכטנטוך עזי	י"ב	תיכון ע"ש לוינהרץ, קרית-מוצקין	(10)
ביסטרי מרדכי	י"ב	תיכון "אחד העם", פתח-תקוה	(20)
גולדהירש יצחק		צה"ל	(47)
גולדיס חיים	י"ב	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(13)
גלבנדורף משה	י"א	תיכון מקיף ע"ש שרת, נצרת עילית	(5)
גרוסמן אהוד	י"ב	תיכון עירוני דתי, רמת-גן	(17)
גרש אגון		צה"ל	(32)
דונגי רן	ח'	בית ספר ממלכתי "הערבה", חולון	(26)
דן יעקב	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(4)
הראל עמירם	י"א	תיכון ע"ש לוינהירץ, קרית-מוצקין	(6)
וינברגר יעקב		ישיבת "כנסת חזקיהו", כפר-חסידים	(7)
ויניצקי אברהם	י"א	תיכון "אהל שם", רמת-גן	(11)
חביב חיים		צה"ל	(22)
חזן דוד	י'	תיכון עירוני א', בת-ים	(3)
טאוגר גרשון	י"א	תיכון עירוני ב', בת-ים	(6)
טכר עוזי	י"ב	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(30)
טרייבטש מרדכי	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(6)
כהן יעל	י'	תיכון מאוחד, רחובות	(6)
ליבוביץ אריה	י"א	מוסד חינוכי ע"ש צבי נרד, קיבוץ מרחביה	(32)
ליבנה חנן		תיכון "אחד העם", פתח תקוה	(13)
לין אבי	י"ב	ישיבת בני עקיבא, חיפה	(19)
לינדה אבי		צה"ל	(8)
ליניאל נתן	י"א	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(37)
לרר דב	י'	" " " " "	(3)
לרר מנחם	י'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(1)
מוסל דוד	י"א	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(4)
מלאכי יונתן	י"א	תיכון מקיף, אשדוד	(9)
מנבר עודי	י'	תיכון קרית חיים, קרית חיים	(6)
מרקוביץ צבי	י"א	תיכון ע"ש קוגל, חולון	(12)
מרקל שלמה	י"א	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(20)
משיח נצה	י'	" " " " "	(3)
סומך אלי	י"ב	בית ספר "דביר", רמת-גן	(30)
סלמה עובדיה	ט'	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(3)
עמיקם ארי	י"ב	תיכון "השרון", רמת השרון	(41)
עמרני ציון	י"א	ישיבת "מרום ציון", ירושלים	(3)
פנט אריק		גבעתיים	(14)
פריסג חנוך	י"ב	תיכון עירוני א', בת-ים	(7)
צור עמיקם	י"א	מוסד חינוכי "מבואות הנגב", קבוץ שובל	(20)
צקוני יוסף	י"ב	תיכון עירוני ד', רמת-גן	(24)
קויאט דורון	י"ב	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(28)
רוזנפלד משה	י"א	תיכון מקיף ע"ש שרת, נצרת-עילית	(18)
רוכמן אהרון	י"א	בית הספר הריאלי העברי, חיפה	(26)
שדה אילן	י'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(9)
שייניגר אורי		צה"ל	(25)
שניצר שרגא		בית-ספר אורט, נתניה	(6)
שפיר עמוס	י"ב	תיכון "השרון", רמת-השרון	(39)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ׳ י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס׳ 4-23357-4

מחיר חוברת בודדת -.1 ל"י

מחיר חתימה ל-4 חוברות 3.50 ל"י