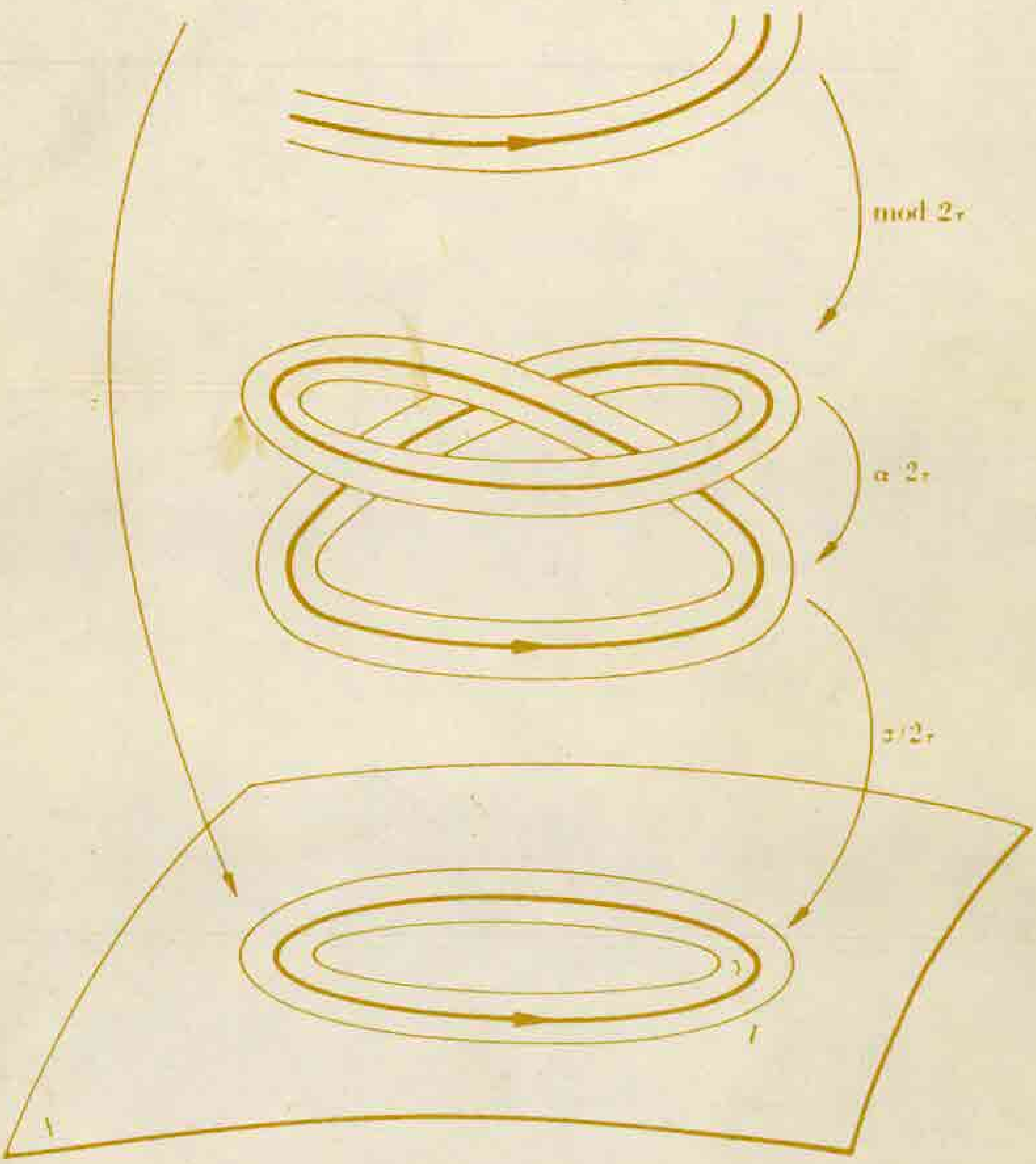
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 4 שבט תש"ל - פברואר 1970 מס 2

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

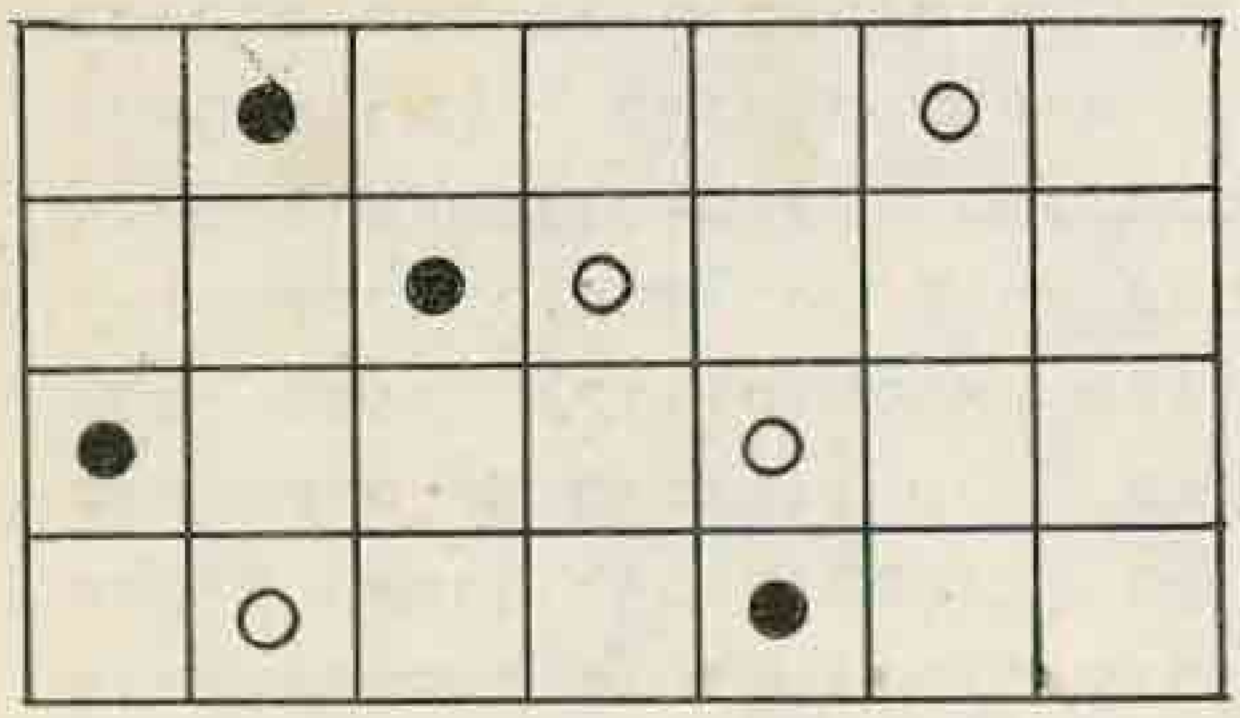
העורך: י. גילים

דבר המערכת

הקוראים ישימו לב כי הצלחנו להוציא את החוברת הזאת לאור תוך זמן קצר יחסית מאז הופעת החוברת הקודמת. דבר זה נתאפשר הודות לארגון מחדש של עבודת המערכת, ואנו מקוים כי נוכל להמשיך לעמד בקצב זה. אנו חוזרים ומזמינים את כל קוראינו שישתפו פעולה אתנו בכמה דרכים; כתיבת מאמרים, הצעת בעיות, וגם ע"י תשלום דמי המנוי בזמן. ולמורים ואחרים העוזרים ע"י הפצת העתון בבתי-ספר אנו פונים בבקשה מהלב כי ישתדלו להחזיר בעוד מועד את החוברות הנשארות בידיהם. כי יש בקוש רב לחוברות קודמות ואנו מנסים להימנע מלהדפיס במספרים גדולים מדי כדי לא לייקר את העתון.
בהזדמנות זו אנו מפנים את תשומת לב הקוראים לאולימפיאדה לנוער במתמטיקה שתתקיים גם בשנת תש"ל. פרטים מלאים על התחרות הזאת יופיעו בקרוב בעתונות הרגילה.

בעיה

יש לנו לוח בעל $n \cdot m$ משבצות (בציור $m=4$, $n=7$). בכל שורה נמצאות שתי דסקיות - אחת שחורה והשניה לבנה. שני אנשים משחקים לפי תור - אחד בדיסקיות הלבנות והשני בשחורות. במהלך אחד מותר למשחק להזיז את אחת הדסקיות השייכות לו, לפי בחירתו, ימינה או שמאלה באותה שורה בתנאי שלא יתנגש בקצה הלוח או בדסקית של היריב. למשל, במקרה שבציור יכול השחקן ה"לבן" להזיז את הדסקית בשורה הראשונה מקום אחד ימינה או עד שלושה מקומות שמאלה, את הדסקית בשורה שניה רק ימינה וכו'. אסור לו, כמובן, להזיז יותר מדסקית אחת והוא חייב להזיז את אחת הדסקיות לפחות במקום אחד. ברגע שאחד השחקנים אינו יכול להזיז אף דיסקית הריהו הפסיד את המשחק. מצא אסטרטגיה של משחק שתבטיח נצחון.



הפעם לא נתן את הפתרון בגליון זה, אבל נשמח מאד לקבל פתרונות מהקוראים וגם לפרסמם אם יימצאו ראויים. לשם זה צריכים הפתרונות להגיע למערכת עד 15.3.70, והפותרים מתבקשים לציין על המעטפות "משחק מתמטי".

מושגי יסוד בתורת ההסתברות

1. הקדמה

המתימטיקה עוסקת כידוע לרב ביחסים בין גדלים שונים וקובעת חוקים המתקיימים תמיד אם מתמלאים התנאים הנדרשים. למשל המשפט "סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית" נכון בכל מקרה; או הזהות $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$; או משפט הבינום של ניוטון. ברור שאפשר להרבות בדוגמאות בלי סוף. כמו כן ידוע שכאשר מציגים בעיה במתימטיקה ויודעים לפתור אותה הרי ניתן לתת תשובה חד-משמעית מה יקרה. למשל: "נתון שבכד ישנם חמישה כדורים לבנים ושלושה שחורים. אם נוסיף שני כדורים לבנים ו-3 שחורים מה יהיה מספר הכדורים בכד?" ברור ששאלה זו פשוטה מאד ויש לה פתרון יחיד - 13, והתשובה היא פסקנית. נראה עתה מספר דוגמאות מסוג שונה.

דוגמה 1: נתבונן לרגע במשחק הבא: לוח מחולק לעשרים וחמישה רבועים המסומנים במספרים 1 עד 25.

21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

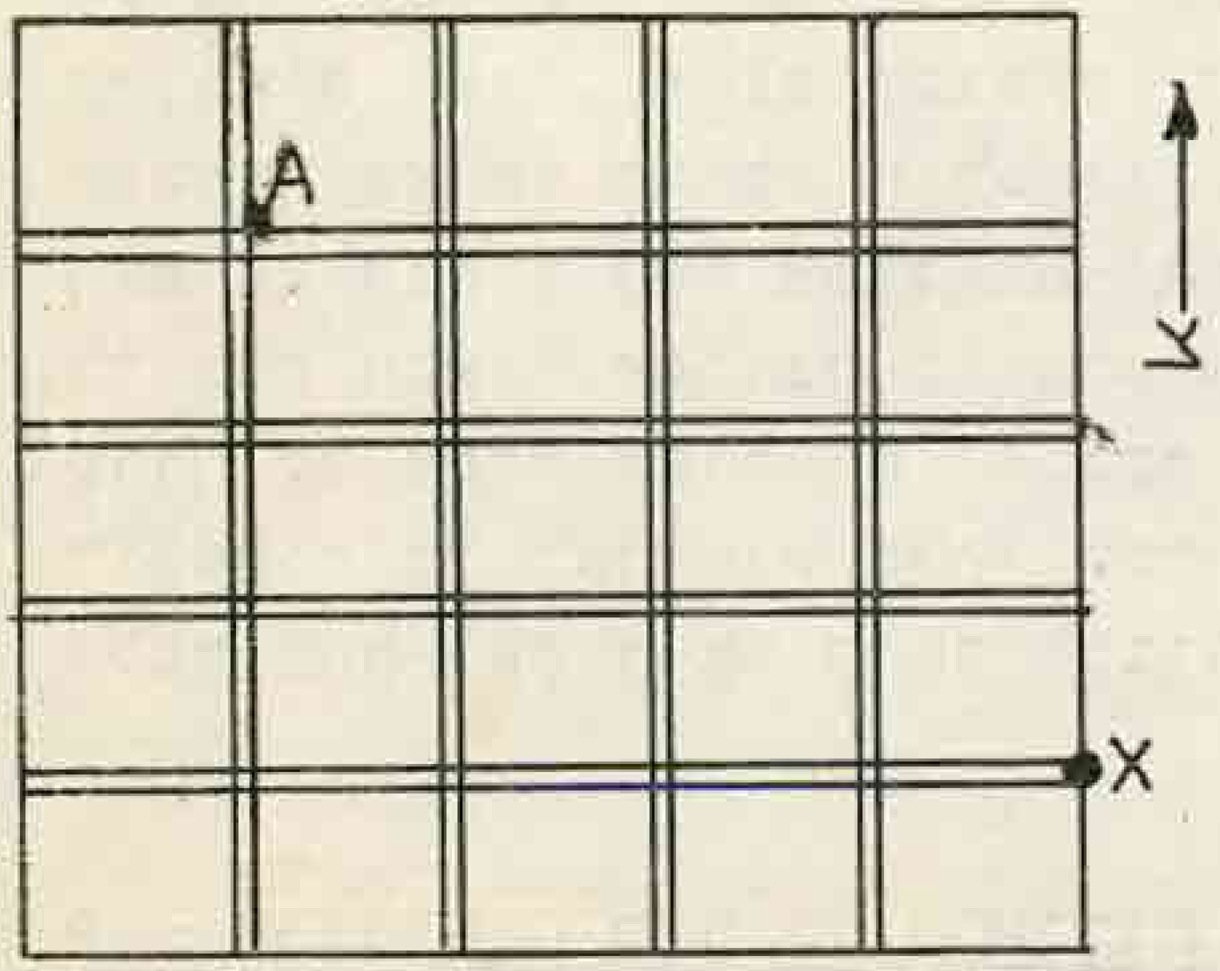
(ראה ציור) לשני המשחקים אסימונים המונחים על רבוע המסומן ב-1. עתה כל אחד מהם זורק קוביה ולפי מספר הנקודות שמראה הקוביה הוא מקדם את האסימון שלו. שחקן שמגיע ראשון לרבוע המסומן ב- 25 מנצח והמשחק נגמר. נוסיף עוד כלל: אסימון שמגיע לרבוע 24 מוחזר אוטומטית להתחלה.

נשאלת השאלה: כמה זמן יארך המשחק? ברור שאין לכך תשובה חד-משמעית, יתכן שהמשחק לא יגמר לעולם וזאת אם שני השחקנים יקבלו בזריקת הקוביה את סדרת התוצאות.

6,6,6,5, 6,6,6,5, 6,6,6,5,.....

במקרה זה לא תהיה שום הגבלה על אורך המשחק. אולם אם תנסו לחזור על משחק זה מספר פעמים (לא יותר מדי כי הוא משעמם) תוכחו לדעת שלמעשה הוא מסתיים די מהר.

דוגמה 2: שני ידידים גרים בעיר שהמפה שלה מתוארת בציור, ומחליטים לערוך טיול. הם עוזבים את ביתם שנמצא בצומת A אך אינם תמימים באיזה מסלול עליהם לבחור. לכך הם מסכימים, שבכל צומת, החל מ- A , הם יפילו 2 מטבעות וימשיכו צפונה, מזרחה, דרומה או מערבה - בהתאם לארבע האפ- שרויות של מצבי המטבעות ("עץ"- "עץ", "עץ" - "פלי", "פלי" - "עץ", "פלי" - "פלי"). הם מפילים את המטבעות ומתחילים את טיולם ב- A. בצומת הבאה הם שוב מפילים 2 מטבעות ולפי התוצאות ממשיכים עד הצומת הבאה. ברגע שהם מגיעים לקצה העיר (הנקודה X למשל) הטיול נפסק והם חוזרים לביתם.



גם כאן התשובה לשאלה כמה זמן יארך הטיול לא תהיה פסקנית.
עתה נראה מספר דוגמאות מסוג שונה להבהרת מושג ההסתברות.

דוגמה 3: נניח שנמצא בידינו כד גדול ובו 1,000 כדורים, מהם אחד שחור והשאר לבנים. אנחנו מוציאים כדור אחד באופן אקראי האם יתכן שכדור שחור הוא שנבחר?

תשובה: ודאי שהדבר יתכן אולם אינו סביר ביותר (זאת אומרת, נראה לנו הרבה יותר שיצא כדור לבן).

דוגמה 4: נניח שאדם שאיננו יודע עברית מתחיל להדפיס במכונת כתיבה עברית. היתכן שבכך הוא מחבר את ספורו של עגנון "גבעת החול".

תשובה: התשובה גם כאן היא כן, כי לא ניתן לומר בודאות מוחלטת שלא יתכן כדבר הזה. יחד עם זאת האפשרות הזאת של חבור "גבעת החול" באורח מקרי כל כך נראית כמובן כבלתי ממשית.

דוגמה 5: לפי התורה הקינטית של הגזים, האויר מורכב ממספר רב של מולקולות שנעות באקראי. כמעט ואין פעולת גומלין בין המול- קולות ולכן מצבה של מולקולה אחת במרחב איננו משפיע על מצבן של המולקולות האחרות. עתה נתאר לעצמנו את החדר שבו אנחנו נמצאים מחולק לשני חלקים - עליון ותחתון. אין הדבר בלתי אפשרי (דבר זה נובע

מהתורה הקינטית של הגזים) שכל מולקולות האויר תעבורנה לחלק העליון של החדר ובכך יחנק כל מי שנמצא בחלקו התחתון. דבר זה נראה לנו כהגזמה רצינית. ובכל זאת האם פרוש הדבר שהתורה הקינטית של הגזים מוטעית?

תשובה: יש לקוות שהקורא אינו מסיק מסקנה זו אחרי הדוגמאות המובאות לעיל. אמנם התופעה שהוצגה בדוגמה האחרונה איננה בלתי אפשרית באופן מוחלט אולם ניתן לראותה כבלתי אפשרית מבחינה מעשית. הבסיס להחלטה כזאת יהיה נכון יותר בדוגמה באחרונה מאשר בדוגמה הלפני אחרונה כי מספר מולקולות האויר בחדר עולה לאין ערוך על מספר האותיות "בגבעת החול". אנחנו רואים שלפנינו שלוש דוגמאות של מאורעות בלתי סבירים עם דרגות שונות של חוסר סבירות. נלמד עתה לאמוד את חוסר הסבירות ע"י מושגים מתימטיים.

2. תכונות היסוד של הסתברות

<u>הגדרה</u>: ההסתברות של מאורע A שוה למספר התוצאות שנותנות את המאורע A מחולק במספר הכולל של תוצאות אפשריות.
נראה מספר דוגמאות להבהרת המושג של הסתברות.

<u>דוגמה 6</u>: נניח שיש לנו שני כדים ובכל אחד מהם 100 כדורים. בכד הראשון כדור לבן אחד ו- 99 הנותרים שחורים ובכד השני 10 כדורים לבנים ו- 90 הנותרים שחורים. נשאל מאיזה כד יש סכוי גדול יותר להוציא כדור לבן (זאת, כמובן, בהנחה שהכדורים אחידים לחלוטין, מעורבבים היטב ושבזמן הוצאת הכדור לא מציצים לתוך הכד!) הקורא יענה ללא הסוס שהסכוי להוציא כדור לבן גדול יותר אם מוציאים מהכד השני. ואם נשאל פי כמה גדול סכוי זה מהסכוי להוציא כדור לבן מהכד הראשון נקבל בודאי תשובה שפי 10. עתה נניח שיש לנו כד נוסף ובו 100 כדורים לבנים. גם כאן, כמו קודם, אנחנו מסיקים שהסכוי להוציא כדור לבן מכד זה גדול מהסכוי להוציא כדור לבן מהכד הראשון פי 100 וגדול מהסכוי להוציא כדור לבן מהכד השני פי 10. אולם הכדור שנוציא מהכד השלישי יהיה בודאי לבן. אם נגדיר את ההסתברות של מאורע זה, שהוא בלתי נמנע (או ודאי) כ- 1, אנו נקבל שההסתברות להוציא כדור לבן מהכד הראשון היא $\frac{1}{100}$ וההסתברות להוציא כדור לבן מהכד השני הוא $\frac{10}{100}$.

נתבונן במקרה הכללי כאשר הכד מכיל n כדורים, m מהם לבנים. ע"י שקולים דומים נוכל להסיק שההסתברות להוציא כדור לבן היא $\frac{m}{n}$.

דוגמה 7: אם נפיל מטבע, מה ההסתברות שנקבל "עץ"? נוכל להשוות מקרה זה עם מקרה של כד ובו שני כדורים - אחד לבן ואחד שחור. נאמר שקבלת "עץ" מתאימה להוצאה של כדור לבן וקבלת "פלי" להוצאה של כדור שחור. לכן הסתברות זו שוה ל- $\frac{1}{2}$.

דוגמה 8: מה ההסתברות לקבל 5 בזריקת קוביה. בעיה זו ניתן להשוות למקרה של כד ובו 6 כדורים, מהם אחד לבן. ההסתברות לקבלת 5 תשוה להסתברות להוציא כדור לבן, כלומר 1/6.

דוגמה 9: מוציאים אבן דומינו מקופסה. מה ההסתברות שקבלנו 6 בקצה אחד של הדומינו. נשוה מקרה זה למקרה של כד עם 28 כדורים ובו 7 (אלה המקבילים ל- 7 האבנים המכילות 6 באחד הקצוות) לבנים. ההסתברות להוצאת 6 תהיה 7/28.

בדוגמאות שהבאנו השתמשנו במקרה הראשון של כד עם כדורים כבעיה משוה. ברור שאין הדבר הכרחי ואף לא בכל המקרים ניתן לערוך השואה כזו. בכל זאת ההשואה לכד עם כדורים עוזרת לפעמים בפתרון בעיות.

נראה עתה את התכונות העיקריות של ההסתב:ות.

תכונה 1: אם מאורע A גורר מאורע B, כלומר מאורע B קורה תמיד כאשר קורה A אזי

$$P(A) \leq P(B)$$

כאשר $P(A)$ מציין את ההסתברות ש- A יקרה ו- $P(B)$ מציין את ההסתברות ש- B יקרה.

לדוגמה יהיה מספר התלמידים בכתה 25 מהן 6 בנות שלשלוש מהן קוראים חוה. נניח שהמורה בכתה זו בוחן עפ"י הגרלה. אזי ברור שההסתברות $P(A)$ שבת בשם חוה תבחן קטנה מההסתברות $P(B)$ שתבחן בת, כי הרי המאורע B כולל בתוכו גם את המאורע A.

תכונה 2: אם המאורעות A ו- B סותרים הדדית (כלומר לא יתכן שגם A וגם B יקרה) אזי

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

כאשר A+B מציין את המאורע ש- A או B קורה. נתבונן שוב בדוגמה הקודמת. יהי A המאורע שבן נבחן ו- B האפשרות שבת בשם חוה נבחנת.

ברור ש- A ו- B סותרים הדדית. לכן ההסתברות שבן או בת בשם חוה יבחנו שוה לסכום שתי ההסתברויות.

<u>תכונה 3</u>: אם המאורעות A ו- B הם הפכים מדויקים אחד של השני כלומר התרחשותו של A היא אי-התרחשותו של B אזי.

$$P(A) + P(B) = 1$$

בדוגמה של הכתה יהיה A המאורע שבן יבחן ו-B המאורע שבן לא יבחן. אזי ברור שאלה הפכים וכיון שאחד מהם חייב לקרות סכום ההסתברויות הוא 1.

<u>תכונה 4</u>: אם המאורע E ודאי, כלומר אם E חייב לקרות, אזי

$$P(E) = 1$$

יהי נתון כד בו חמישה כדורים לבנים. מה ההסתברות שנוציא, ע"י הוצאה אקראית, כדור לבן? ברור שבמקרה זה ודאי הוא שנוציא כדור לבן וההסתברות שוה לאחד.

<u>תכונה 5</u>: אם המאורע O בלתי אפשרי, כלומר אם O איננו יכול לקרות אזי $P(O)=0$ בדוגמה הקודמת ההסתברות להוציא כדור שחור הוא אפס כי המאורע כמובן איננו אפשרי.
נגדיר עתה מושג חדש, זה של הסתברות מותנית.

<u>הגדרה:</u> ההסתברות המותנית שמאורע B יקרה כאשר ידוע ש- A קורה היא ההסתברות שמאורע מסוים B יקרה אם ידוע שמאורע אחר A יקרה בודאות.
מסמנים הסתברות זאת ע"י $P(B|A)$

לדוגמה יהי נתון כד עם 8 כדורים, מהם 3 לבנים. יהי B המאורע שנוציא בזה אחר זה שלושה כדורים לבנים. יהי A המאורע שהכדור הראשון הוא לבן. אזי $P(B|A)$ היא ההסתברות להוציא שלושה כדורים לבנים בזה אחר זה אם ידוע שהראשון שהוצא לבן.

<u>תכונה 6</u>: $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$

AB הוא המאורע שגם A וגם B קורים.
לדוגמה יהי נתון כד עם כדורים כמו בדוגמה הקודמת. יהי B המאורע שמשלושת הכדורים הראשונים לפחות 2 לבנים ויהי A המאורע שהכדור הראשון שחור. AB יהיה אז המאורע שהכדור הראשון שחור ושנים הנותרים לבנים.

נחשב את ההסתברות $P(B)$. האפשרויות ש- B יקרה הם(שחור, לבן, לבן), (לבן, שחור, לבן), (לבן, לבן, שחור) ו- (לבן, לבן, לבן).
לכן

$$P(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{96}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{2}{7}$$

חשוב ההסתברות $P(A)$ יותר פשוט.

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

נחשב עתה בדרך ישירה את $P(A|B)$ כאשר הכדור הראשון שחור שני האחרים חייבים להיות לבנים כדי ש- B יתקיים, לכן

$$P(A|B) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

AB הוא האפשרות שהכדור הראשון שחור ושני האחרים לבנים. לכן

$$P(AB) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{56}$$

וניתן לראות שתכונה 6 מתקיימת.

<u>הגדרה:</u> שני מאורעות A ו- B הם בלתי תלוים אם התרחשותו של A אין לה שום השפעה על התרחשותו של B ולהיפך. לכן

$$P(B|A) = P(B)$$

<u>תכונה 6 א'</u>: אם A ו- B מאורעות בלתי תלוים
אזי
$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

לדוגמה יהיו נתונים שני כדים עם כדורים. בראשון 10 כדורים מהם 1 לבן ובשני 10 כדורים מהם 1 לבן. יהי A המאורע של הוצאת כדור לבן מהכד הראשון ו- B המאורע של הוצאת כדור לבן מהכד השני. ברור ש $P(A)=P(B)=\frac{1}{10}$ לכן ההסתברות להוציא כדור לבן מכל אחד מהכדים הוא

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{100}$$

ניתן בקלות להכליל את התוצאות שקיבלנו על יותר משני מאורעות. אם $A_1, A_2 \ldots A_n$ מאורעות שסותרים הדדית בזוגות אזי

$$(1) \quad P(A_1 + A_2 + \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$$

אם $A_1, A_2 \ldots A_n$ מאורעות בלתי תלוים אזי

$$(2) \quad P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$$

עתה נפתור מספר בעיות אופיניות.

<u>בעיה 1</u>: מה ההסתברות שנקבל n פעמים רצופות "עץ" בהפלות מטבע אקראיות?

<u>פתרון</u>: אם הפלת המטבע אקראית ההסתברות לקבל "עץ" שוה להסתברות לקבל "פלי" שוה ל- $\frac{1}{2}$. ברור גם שההפלות השונות בלתי תלויות, כלומר תוצאת הזריקה ה- 10 למשל, אינה תלויה בתוצאת הזריקה ה-2 ואינה משפיעה גם על התוצאה של שום זריקה אחרת. המאורע של קבלת n פעמים רצופות "עץ" הוא המאורע של קבלה "עץ" בזריקה הראשונה, בזריקה השניה ... בזריקה ה- n,

לכן $$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

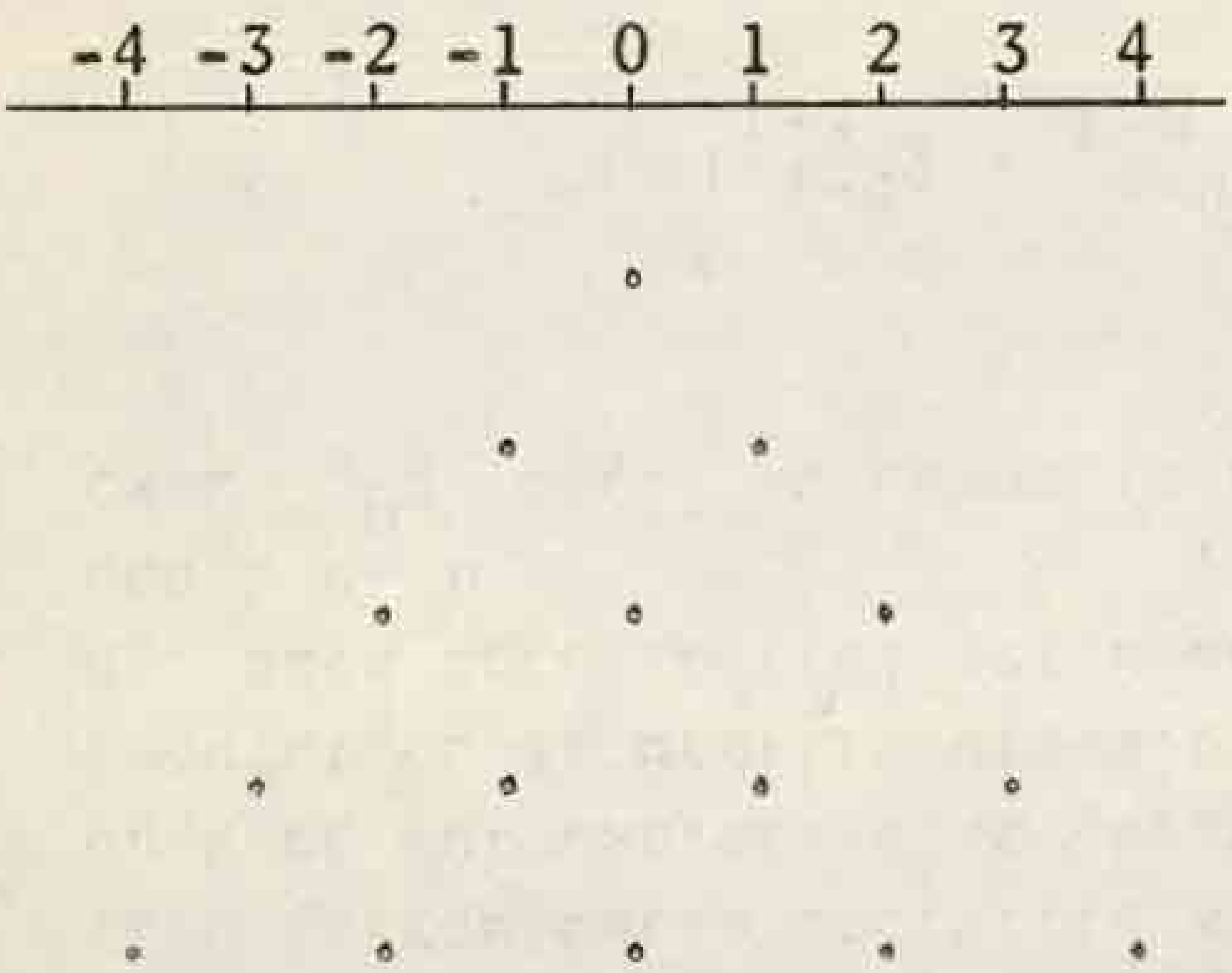
<u>בעיה 2</u>: תהי p ההסתברות לפגוע במטרה ביריה אחת. מה ההסתברות שהמטרה תיפגע אחרי n יריות?

<u>פתרון</u>: ברור שההסתברות שהמטרה לא תיפגע ביריה הראשונה היא $1-p$. זאת גם ההסתברות שהיא לא תיפגע ביריה השניה, השלישית ה- n. לכן, ההסתברות שהמטרה לא תיפגע אחרי n יריות היא $(1-p)^n$. אולם זהו המאורע המשלים למאורע המבוקש, לכן ההסתברות שהמטרה תיפגע אחרי n יריות היא

$$1 - (1-p)^n$$

3. בעיות הקשורות בטיול אקראי על קו אינסופי

הבא נסמן על קו ישר את הנקודות $0,\pm1,\pm2...$ ונבצע את הנסוי הבא: נשים אסימון בנקודה 0 ונפיל מטבע, אם נקבל "עץ" נזיז את האסימון מקום אחד שמאלה ואם נקבל "פלי" נזיז את האסימון מקום אחד ימינה. עתה אנחנו מפילים מטבע פעם שניה, שלישית וכו' ובכל פעם מזיזים את האסימון בהתאם לתוצאה. ניתן להניח שיש הסתברות שוה לשתי התוצאות האפשריות של הפלת מטבע כך שבכל מהלך ההסתברות שהאסימון יוזז ימינה שוה להסתברות שהוא יוזז שמאלה, כלומר $1/2$. ברור שאחרי הפלת מטבע אחד שני המצבים האפשריים הם $+1$, -1 אחרי הפלה שניה $-2,0,2$; אחרי שלישית $3,1,-1,-3$ וכו'.



הציור נותן לנו תמונה למצבים האפשריים אחרי כל מהלך. הנקודות שבציור יוצרות משולש (ברור שניתן להמשיכו כלפי מטה כמה שרוצים). הקדקד של משולש זה נמצא תחת הספרה 0. בכל שורה יש נקודות מתחת לספרות. כל נקודה מציינת מצב אפשרי אחרי המהלך הנתון (מספר המהלך מתאים למספר השורה).

הציור שקבלנו נותן לנו אמנם את המצבים האפשריים אך אינו מראה איזה מהם סביר יותר ואיזה סביר פחות. לשם קבלת ידיעה זו נבנה את משולש ההסתברויות. אחרי הפלת מטבע ראשונה האסימון יכול להמצא בכל אחד מהנקודות $+1$, -1 עם הסתברות $1/2$. אחרי שתי הפלות ניתן לקבל את התוצאות הבאות: 1) "פלי" - "פלי" 2) "עץ" - "פלי" 3) "פלי" - "עץ" 4) "עץ"-"עץ". ארבע האפשרויות הן בעלות הסתברות שוה ולכן $1/4$. אחרי התוצאה הראשונה האסימון יהיה ב-$+2$ אחרי התוצאה הרביעית ב- -2 אחרי השלישית והשניה ב-0, לכן הוא יוכל להמצא בנקודות $+2$ ו- -2 עם הסתברות $1/4$ ובנקודה 0 עם הסתברות $1/2$. נוכל להמשיך בצורה זו לחשב את משולש ההסתברות עד שורה רצויה m. לדוגמה עבור $m=4$ תתקבל.

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

$$1$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{16} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{6}{16} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{1}{16}$$

ניתן להבחין שכל אחד מהמספרים הוא חצי הסכום של שני המספרים שמעליו. בצורה אלגברית

$$Z_n^k = \frac{1}{2}\left(Z_{n-1}^{k-1} + Z_{n-1}^{k+1}\right)$$

כאשר Z_n^k מציין את ההסתברות שהאסימון נמצא בנקודה k אחרי המהלך ה- n.
ע"י שמוש בכלל זה ניתן לבנות משולש באורך רצוי. ברור שסכום ההסתברויות של הנקודות הנמצאות בשורה אחת חייב להיות 1 (כי אחרי מהלך כל שהו האסימון חייב להמצא באיזה מקום).
נראה לדוגמה משולש הסתברויות עבור $n=9$.

$$1$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{16} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{6}{16} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{32}$$
$$\frac{1}{64} \quad \frac{6}{64} \quad \frac{15}{64} \quad \frac{20}{64} \quad \frac{15}{64} \quad \frac{6}{64} \quad \frac{1}{64}$$
$$\frac{1}{128} \quad \frac{7}{128} \quad \frac{21}{128} \quad \frac{35}{128} \quad \frac{35}{128} \quad \frac{21}{128} \quad \frac{7}{128} \quad \frac{1}{128}$$
$$\frac{1}{256} \quad \frac{8}{256} \quad \frac{28}{256} \quad \frac{56}{256} \quad \frac{70}{256} \quad \frac{56}{256} \quad \frac{28}{256} \quad \frac{8}{256} \quad \frac{1}{256}$$
$$\frac{1}{512} \quad \frac{9}{512} \quad \frac{36}{512} \quad \frac{84}{512} \quad \frac{126}{512} \quad \frac{126}{512} \quad \frac{84}{512} \quad \frac{36}{512} \quad \frac{9}{512} \quad \frac{1}{512}$$

אם מכפילים את השורה הראשונה ב-2 את השורה השניה ב- 2^2 , את השלישית ב-2^3 את ה- n ב- 2^n נקבל משולש המורכב ממספרים שלמים בלבד ובו כל מספר שוה לסכום שני המספרים שמעליו. משולש זה נקרא משולש פסקל.

עתה נרצה למצוא שיטה כללית לחשוב או הערכה של ההסתברויות של הנקודות השונות. נחלק כל איבר במשולש ההסתברויות בזה שעומד משמאלו. את האיברים בקצה השמאלי, שאין להם שכנים משמאל, לא נרשום. מתקבל משולש המנות הבא:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{1} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{6}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{1} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{7}$$

$$\frac{8}{1} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{9}{1} \quad \frac{8}{2} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{6}{4} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{1}{9}$$

במשולש המנות ניתן להבחין במספר תכונות מעניינות. למשל, בשורה ה- n המכנים של האיברים הולכים מ- 1 עד n והמונים מ- n עד 1 (משמאל לימין). ניתן לקבל, בקלות יחסית, את משולש ההסתברויות ממשולש המנות. האיבר השמאלי ביותר בשורה ה- n יהיה 2^{-n}. כל איבר בשורה יתקבל ע"י הכפלת המספר משמאל באיבר המתאים של משולש המנות. עבור $n=4$ יתקבל המשולש בצורה הבאה:

$$1$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} \qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1} \qquad \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2} \qquad \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{16} \qquad \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1} \qquad \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} \qquad \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

ובצורה הכללית, האיבר ה $n+1$ בשורה ה- n יתקבל ע"י

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{k}$$

אנחנו מעונינים לעתים קרובות רק באיברים המרכזיים של המשולש – אלה העומדים מתחת לספרה 0 , למשל בשאלה החשובה מה הסתברות לחזור אחרי n צעדים לנקודת המוצא. אנחנו רואים שקיימת אפשרות כזאת רק אחרי מספר זוגי של מהלכים. אם נסמן את ההסתברות לחזור ל- 0 אחרי $2k$ צעדים ב- ω_{2k}, נראה ש-

$$\omega_0 = 1\ ,\quad \omega_2 = \frac{2}{4}\ ,\quad \omega_4 = \frac{6}{16}\ ,\quad \omega_6 = \frac{20}{64}$$

ובשיטה משולש המנות

$$\omega_0 = \frac{1}{1}\ ,\quad \omega_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}\ ,\quad \omega_4 = \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}$$

אם נשתמש בבטוי הכללי ובעובדה שהשורה ה-$2k$ היא בעלת $2k+1$ אברים נקבל את הנוסחה

$$\omega_{2k} = \frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{2k}{1}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{k+1}{k}$$

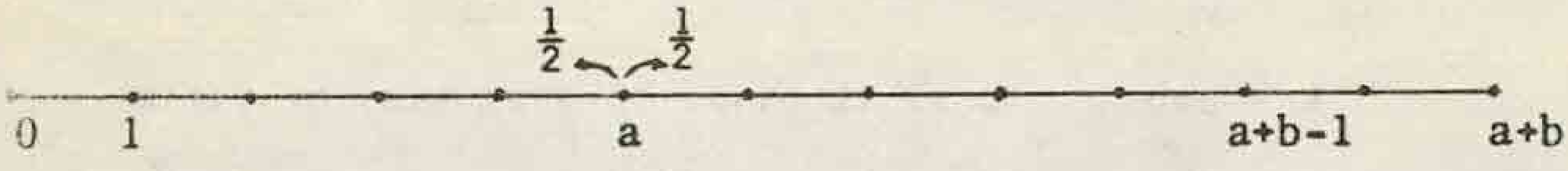
נוסחה זו נוחה למדי עבור k קטנים אולם היא מסתרבלת עבור k גדולים. נוכל להעריך את ω_{2k} ע"י $(k=1,2\ldots)$ $\frac{1}{\sqrt{4k}} < \omega_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$

ניתן לקבל גם נוסחאות קרוב טובות יותר עבור k גדולים יותר ועבור k גדול מאד ניתן להשתמש בנוסחת הקרוב $\omega_{2k}\approx\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$

נפתור עתה מספר בעיות נוספות:

בעיה 3: שני כדים זהים נמצאים בחדר. נניח שיש a כדורים בכד השמאלי ו-b כדורים בכד הימיני. מספר אנשים נכנסים לחדר, בזה אחר זה ומעבירים כדור אחד מכד אחד למשנהו. מניחים שההסתברות שכדור יועבר מהכד השמאלי לכד הימיני שוה להסתברות שכדור יועבר מהכד הימיני לכד השמאלי, כלומר $1/2$. הנסוי נמשך עד שאחד הכדים מתרוקן. מה ההסתברות שהכד השמאלי מתרוקן? מה ההסתברות שהכד הימיני מתרוקן? מה ההסתברות שהנסוי אינו מסתיים?

פתרון: ניצג את מספר הכדורים בכד השמאלי באמצעות אסימון הנע על ציר המספרים. בתחילת הנסוי האסימון נמצא בנקודה a. בכל יחידת זמן (כלומר בכל מהלך) הוא נע בהסתברות $1/2$ ימינה (אם כדור מועבר מהכד הימיני לשמאלי, כך שמספר הכדורים בכד השמאלי גדל



ב- 1) ועם אותה הסתברות שמאלה (וזאת אם כדור מועבר מהכד השמאלי לימיני, כך שמספר הכדורים בכד השמאלי קטן ב- 1). דבר זה נמשך עד שהאסימון מגיע לנקודה 0 או לנקודה a+b לראשונה. אם האסימון מגיע לנקודה 0 סימן שהכד השמאלי התרוקן ואם הוא מגיע לנקודה a+b הכד הימני התרוקן. נסמן את ההסתברות שהאסימון יגיע לנקודה 0, בתנאי שהוא יצא מנקודה k ע"י p_k (p_a הוא הגודל המבוקש). עפ"י הגדרת הנסוי ברור ש- $p_0=1$, $p_{a+b}=0$ נתבונן בשני מאורעות:

A - האסימון מוזז ל- k+1 אחרי המהלך אחד, B - האסימון מוזז ל- k-1 אחרי המהלך אחד. לפי ההנחה $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. אם A קורה ההסתברות שהאסימון יגיע לנקודה 0 היא p_{k+1} ואם B קורה הסתברות זאת שוה ל- p_{k-1} מכאן

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$$

ממשואה זו נקבל

$$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1}$$

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

נסמן את ההפרש הקבוע $p_{k+1}-p_k$ ע"י d ונרשום את המשוואות הבאות.

$$p_k - p_{k-1} = d$$
$$p_{k-1} - p_{k-2} = d$$
$$\vdots$$
$$p_2 - p_1 = d$$
$$p_1 - p_o = d$$

חבור כל המשואות האלה יתן $p_k - p_o = kd$

כאן ש $p_o=1$ הרי $p_k - 1 = kd$

$$p_k = 1 + kd$$

שויון זה נכון עבור כל נקודה k. נציב $k = a+b$

$$0 = p_{a+b} - 1 + (a+b)\,d$$

לכן $d = -\frac{1}{a+b}$

מכאן $p_k = 1 - \frac{k}{a+b} = \frac{a+b-k}{a+b}$

מכאן שההסתברות שבה אנו מעונינים היא

$$p_a = \frac{a+b-a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

וההסתברות שהכד הימיני יתרוקן היא

$$p_b = \frac{a+b-b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

וזאת כמובן בגלל זה ששני הכדים זהים ואין שום תכונה המבדילה ביניהם מלבד מספר הכדורים בהם התחילת הנסוי.

ההסתברות שהנסוי יסתיים היא

$$p_a + p_b = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1$$

ולכן ההסתברות שהנסוי לא יגמר היא $1 - 1 = 0$

<u>הערה:</u> הבעיה הזו ידועה בתולדות המתימטיקה כבעית סופו של מהמר. הנסוי המקורי הוא זה: שני אנשים מהמרים. הסתברות הזכיה של כל אחד מהם בכל משחק שוה ל- $1/2$. למהמר הראשון a לירות ולשני b לירות. המשחק נמשך עד שאחד המהמרים מפסיד את כספו. מה ההסתברות של כל אחד מהמרים להיות מופסד?
אפשר לשים לב שכאשר $a \gg b$ הרי ההסתברות של זה שיש לו פחות כסף לצאת מופסד שואפת ל- 1. מכאן המסקנה ומוסר ההשכל שאדם שמהמר נגד כל מי שמזדמן (ולכן נגד הצבור) סופו להפסיד את כל כספו.

<u>בעיה מס' 4</u>: כאשר מפילים 100 מטבעות, מה ההסתברות שנקבל בדיוק 50 פעמים "עץ".

<u>פתרון</u>: נניח ש- 100 המטבעות מסודרות משמאל לימין (אנחנו מפילים אותן אחת אחרי השניה. ההסתברות שנקבל סדרה מסוימת כלשהי של "עץ" ו"פלי" היא $(\frac{1}{2})^{100}$ מפני שההפלות בלתי תלויות. זוהי גם ההסתברות שנקבל סדור מסוים של 50 פעמים "עץ" ו- 50 פעמים "פלי" נאמר 50 הראשונים "עץ" ו- 50 אחרונים "פלי". נחשב עתה מהו מספר הסדורים האפשריים שיתנו תוצאה זו. מספר זה שוה למספר הסדורים של מאה כדורים, מהם 50 לבנים ומהם 50 שחורים.
ניקח את הכדור הלבן הראשון. ברור שנוכל לסדרו בכל מקום לכן מספר האפשרויות הוא 100. מספר האפשרויות לסדר את הכדור הלבן השני יהיה 99. אם נמשיך נקבל שנוכל לסדר את 50 כדורים הלבנים ב 100.99.98...51 אפשרויות. ברור שיתר המקומות יתפסו ע"י הכדורים השחורים. מהסדורים שקבלנו !50 סדורים זהים, (החלופים של הכדורים הלבנים בינם לבין עצמם) לכן סה"כ הסדורים השונים של חמישים כדורים לבנים וחמישים כדורים שחורים הוא

$$\frac{100\cdot 99 \ldots 51}{50!} = \frac{100}{(50!)(50!)} = \binom{100}{50}$$

וזהו המקדם הבינומיאלי.

מכאן שההסתברות לקבלת 50 פעמים "עץ"

$$\frac{100!}{50!\ 50!}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$ היא

חשוב ערך זה בעזרת לוגריתמים נותן 0.07959. כאשר עובדים עם עצרת של מספר גדול נוח להשתמש בקרוב של סטירלינג.

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

נשתמש בקרוב זה, מבלי להוכיחו, לחשוב ההסתברות ש- 50 מהזריקות תתנה עץ

$$p \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\cdot 100^{100+\frac{1}{2}}\,e^{-100}}{(\sqrt{2\pi}\cdot 50^{50+\frac{1}{2}}\,e^{-50})^2\cdot 2^{100}} = \frac{100^{100+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,50^{100}\cdot 50(2^{100})}$$

$$= \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{2\pi}\cdot 50} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} = 0.0798$$

<u>בעיה מס' 5</u>: הבעיה שנציג עכשיו היא אחת הראשונות בתורת ההסתברות וקשורה בשמו של אחד ממיסדי תורה זו, המתימטיקה והפיסיקאי הצרפתי פסקל. אחד מאבירי צרפת מהמאה ה- 17, דה מארה, פנה לפסקל בשאלה הבאה: באיזה משני המשחקים יש סכוי רב יותר לזכות - במשחק שבו זורקים 4 פעמים קוביה וזוכים אם מתקבל לפחות פעם אחת 6 או במשחק שבו זורקים 24 פעמים שתי קוביות וזוכים אם מתקבל לפחות פעם אחת 6,6 (כלומר 6 על שתי הקוביות)

פתרון: ההסתברות לקבל 6 ב- 4 זריקות היא

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1-\frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.51802$$

ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת 6,6 ב- 24 זריקות של שתי קוביות היא

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} =$$

$$\log 35 = 1.5441$$

$$\log 36 = 1.5563$$

$$\log\left[\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\right] = -24\cdot 0.0122 = -0.2928 = \overline{1},7072$$

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.5095$$

$$1-0.5095 = 0.4905$$

כלומר ההסתברות במשחק הראשון גדולה יותר אף כי במבט ראשון יכול להראות כאילו שתי ההסתברויות שוות.

סכום

הוצגו כאן מספר בעיות מעניינות בשטח ההסתברות. כדאי אולי להדגיש כי שטח זה אינו עוסק רק במשחקי מזל ובטיולי הנאה וכי יש לו שמוש נרחב בסטטיסטיקה ובפיסיקה המודרנית.

בעיה לקורא

למהמר M, m לירות ולמהמר N, n לירות. בכל משחק הזוכה מקבל לירה אחת מהמפסיד. השחקן M טוב יותר מ- N והוא זוכה בממוצע ב- $\frac{2}{3}$ מהמשחקים (כלומר יש לו הסתברות $\frac{2}{3}$ לזכות בכל משחק). הם משחקים עד שאחד מהם נותר ללא כסף. מה ההסתברות ש- M יהיה הזוכה. חשב עבור $n =$ 8 ל"י $m =$ 4 ל"י.

קבוצות משלימות (המשך)
רן דונגי (חולון)

בחוברת הקודמת בדקנו קבוצות מספרים שלמים ואי-שליליים $(b_1,b_2,\dots,b_\ell)$ המקיימים $b_1=0$; $b_2=1$; עבור $n = 1,2,3,\dots,k^2$ אפשר למצא i,j כך ש- $n=i^2+b_j$. נסינו לקבע את ה- ℓ הקטן ביותר אשר עבורו אפשרי הדבר והוכחנו כי $2k-1 > \ell > 9k/8$. עכשיו חקרנו את השאלה האם ייתכן כי $2k-1 > \ell$ או שמא קיים תמיד $\ell=2k-1$. אין לנו תשובה כללית אבל בדקנו מקרים מיוחדים בעזרת המחשב "גולם" במכון ויצמן ואמנם מצאנו חמש קבוצות משלימות עבור $k=7$ כש- $\ell=12$.

$\{0,1,2,6,7,10,11,12,15,25,29,35\}$,

$\{0,1,2,6,7,8,10,11,12,14,25,36\}$,

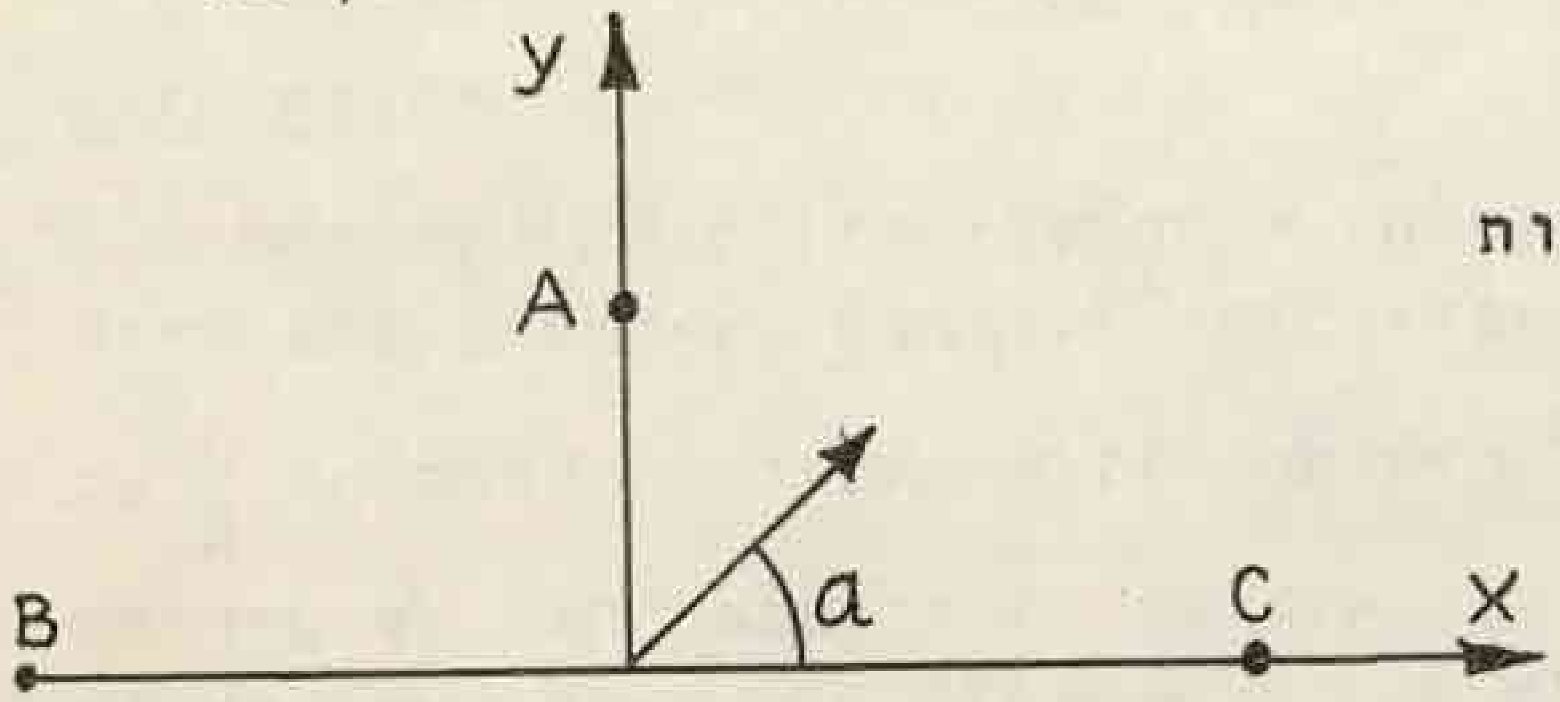
$\{0,1,2,5,6,7,9,10,11,23,24,28\}$,

$\{0,1,2,4,6,7,8,10,12,25,29,38\}$,

$\{0,1,2,4,5,6,7,8,9,10,12,38\}$,

בפרבולת הבטיחות

נניח שנמצא בידינו רובה עם מהירות לוע V_o (כלומר שכדור הנורה ממנו הוא בעל מהירות התחלתית V_o). ננסה לענות על השאלה מהו התחום אליו לא יוכלו הכדורים להגיע. לשם כך נניח שניתן להזניח את התנגדות האויר ושהכח היחידי שפועל על הכדור בזמן מעופו הוא $F=mg$. נוסף לכך נראה את הכדור כמסה נקודתית. את ראשית הצירים נמקם בנקודה בו עומד היורה. α יהיה הכוון בו נורה הכדור.



אם הכדור נורה במהירות V_o בזוית α אזי

$$V_{ox} = V_o \cos\alpha$$

$$V_{oy} = V_o \sin\alpha$$

$$y(t) = V_{oy}t - \frac{gt^2}{2} \qquad x(t) = V_{ox}\cdot t$$

$$V_y(t) = V_{oy} - gt \qquad V_x(t) = V_{ox}$$

הזמן של העליה, עד ש $V_y(t)=0$ יהיה

$$t_\gamma = \frac{V_{oy}}{g} = \frac{V_o \sin\alpha}{g}$$

זמן זה שווה לזמן הנפילה ולכן סה"כ זמן מעוף הכדור יהיה

$$T = 2t_\gamma = \frac{2V_o \sin\alpha}{g}$$

המרחק אליו יגיע הכדור יהיה

$$S = V_{ox}\cdot T = \frac{2V_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{V_o^2}{g}\sin 2\alpha$$

מכאן ש- S יהיה מקסימלי כאשר $\sin 2\alpha = 1$

כלומר $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

השעורים של הנקודה C (שהיא הנקודה הרחוקה ביותר על הקרקע אליה יוכל הכדור להגיע) הם $(\frac{V_o^2}{g}, 0)$ ושל הנקודה B (הסימטרית ל- C מצד שמאל), $(-\frac{V_o^2}{g}, 0)$.

נראה עתה מהו הגובה המקסימלי אליו ניתן להגיע. גובה זה יתקבל כאשר נירה אנכית כלפי מעלה.

במקרה זה

$$V_{oy} = V_o$$

$$t_Y = \frac{V_o}{g}$$

$$H = V_o t - \frac{gt^2}{2} = \frac{V_o^2}{2g}$$

והשעורים של הנקודה A (שהיא הנקודה הגבוהה ביותר אליה יוכל הכדור להגיע) הם $(0, \frac{V_o^2}{2g})$. נעביר עתה פרבולה דרך שלוש הנקודות האלה. פרבולה זו צריכה להיות סימטרית לכן היא תהיה

מהצורה $y = ax^2 + b$

נציב עבור הנקודה A $y = \frac{V_o^2}{2g} = b$

נציב עבור הנקודה C $0 = a\left(\frac{V_o^2}{g}\right)^2 + \frac{V_o^2}{2g}$

$$a = -\frac{g}{2V_o^2}$$

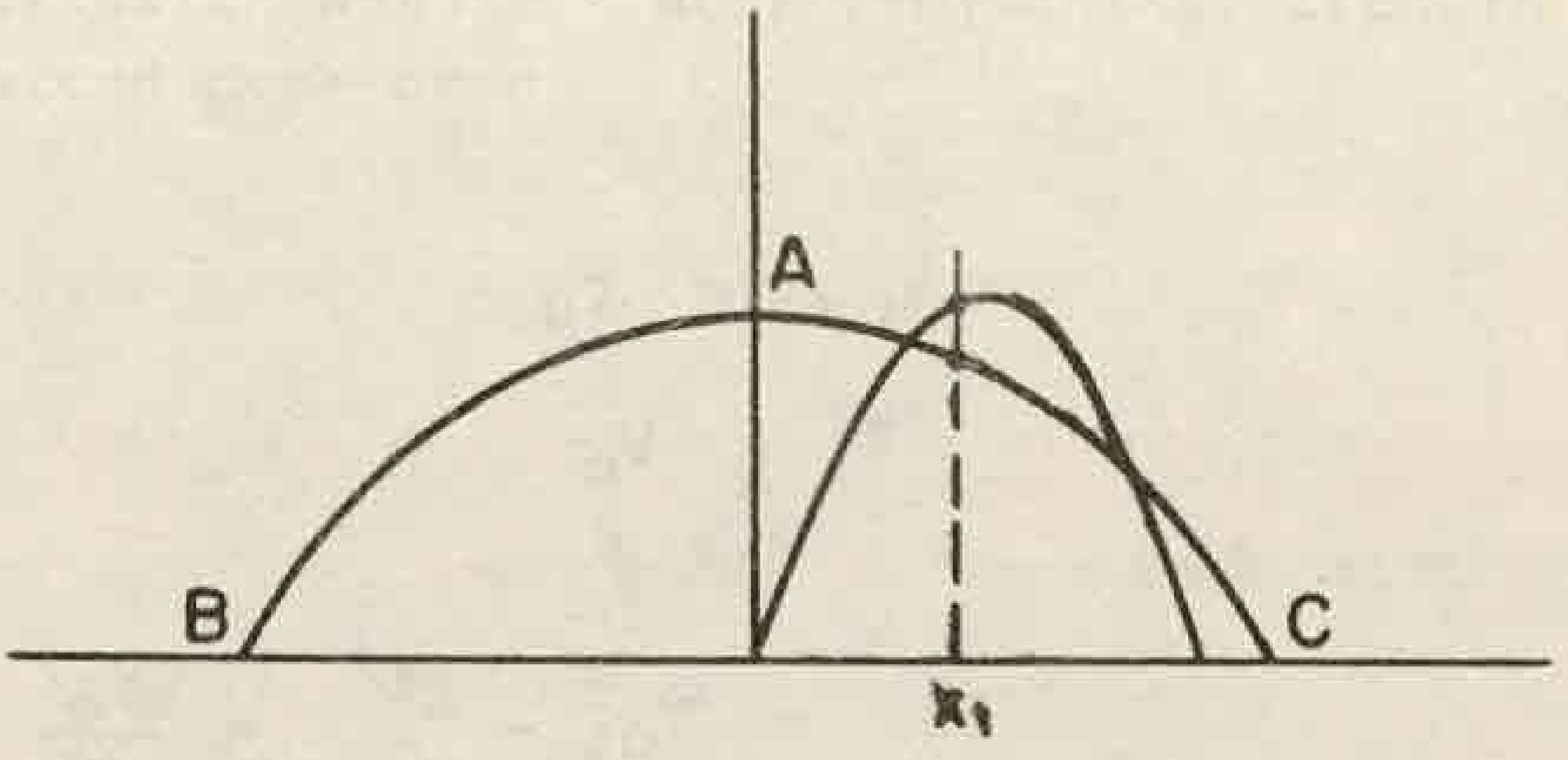
ומשואת הפרבולה המבוקשת היא

$$y = -\frac{g}{2V_o^2}x^2 + \frac{V_o^2}{2g}$$

טענה: פרבולה זו מהוה את קצה התחום אליו יוכלו הכדורים להגיע.

הוכחה: בדרך השלילה. אם אין הדבר נכון אזי קיימת זוית שעבורה מסלול הכדורים יחתוך את הפרבולה הזאת. כלומר תהיה נקודה x_1 על המסלול כך ש-

$$y_{\text{מסלול}}(x=x_1) > y_{\text{פרבולה}}(x=x_1)$$



גם מסלול הכדור מהוה פרבולה הנתונה ע"י

$$x = V_{ox} \cdot t = V_o \cos\alpha \cdot t$$

$$y = V_{oy} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = V_o \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

מהשויון הראשון $$t = \frac{x}{V_o \cos\alpha}$$

$$y = V_o \sin\alpha \cdot \frac{x}{V_o \cos\alpha} - \frac{g\left(\frac{x}{V_o \cos\alpha}\right)^2}{2}$$

(המסלול) $$y_m = x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2V_o^2\cos^2\alpha}$$

(הפרבולה) $$y_p = -\frac{g}{2V_o^2}x^2 + \frac{V_o^2}{2g}$$

לפי ההנחה בנקודה $x = x_1$ $\quad y_m > y_p$

כלומר $$x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2V_o^2\cos^2\alpha} > -\frac{g}{2V_o^2}x^2 + \frac{V_o^2}{2g}$$

$$\frac{gx^2}{2V_o^2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right) - x\,tg\,\alpha + \frac{V_o^2}{2g} < 0$$ או

$$\frac{gx^2}{2V_o^2}\,tg^2\alpha - x\,tg\,\alpha + \frac{V_o^2}{2g} < 0$$

נכפול את כל המשואה ב $2V_o^2 g$

$$g^2x^2\,tg^2\alpha - 2V_o^2 g\,tg\,\alpha + V_o^4 < 0$$

$$(gx\,tg\,\alpha - V_o^2)^2 < 0$$ או

אולם רבוע של מספר ממשי אינו יכול להיות שלילי. לכן מסלול הכדור אינו יכול לחתוך את הפרבולה. בזאת הוכחה טענתנו.

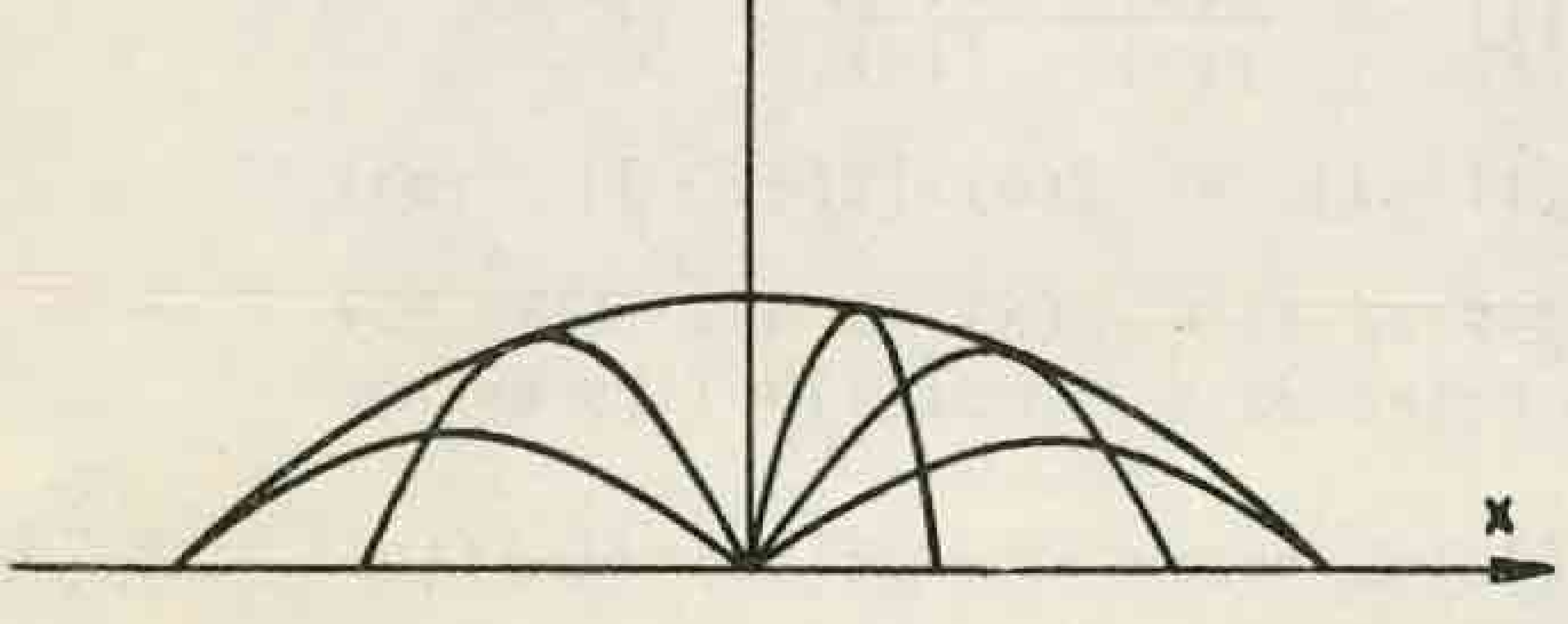
עתה נראה שעבור $\alpha \geqslant \frac{\pi}{4}$ מסלול הכדור משיק לפרבולה. לשם כך נחפש פתרונות למשואה $y_m = y_p$. יתקבלו בטוים דומים לאלה שבהוכחה הקודמת אלא שבמקום סימן האי שויון יהיה לנו שויון.

$$(gx\,tg\,\alpha - V_o^2)^2 = 0$$

הפתרונות של משואה רבועית זאת הם

$$x_1 = x_2 = \frac{V_o^2}{g\,tg\,\alpha}$$

כפי שראינו $\frac{V_o^2}{g}$ הוא המרחק המקסימלי אליו יכול הכדור להגיע לכן אין פתרון עבור $tg\,\alpha < 1$ או $\alpha < \frac{\pi}{4}$. עבור $\alpha > \frac{\pi}{4}$ מתקבלים 2 פתרונות זהים, כלומר המסלול משיק לפרבולה. נוכל לסכם שהפרבולה $y = -\frac{g}{2V_o^2}x^2 + \frac{g}{2V_o^2}$ מהוה עטיפה לכל המסלולים $\alpha > \frac{\pi}{4}$.



מעניין לראות מהו המקום הגיאומטרי של פסגות כל המסלולים. לכאורה נראה כאילו זאת פרבולה ואין הדבר כך כי

$$x = V_o \cos\alpha \cdot t$$

$$y = V_o \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

בנקודת פסגה $V_{oy}=0$ כלומר $t_1=\frac{V_o}{g}$. תהי נקודת הפסגה (x_1, y_1).

אזי
$$x_1 = V_o^2/g \cos\alpha$$
$$y_1 = V_o^2/g \sin\alpha - \frac{V_o^2}{2g}$$

ולכן
$$x_1^2 + \left(y_1 + \frac{V_o^2}{2g}\right)^2 = \left(\frac{V_o^2}{g}\right)^2$$

זוהי משואה של מעגל שמרכזו בנקודה $\left(0, -\frac{V_o^2}{2g}\right)$ ורדיוס V_o^2/g.

על משואה פונקציונלית

שמעון רייך, חיפה

בחוברת הקודמת (כרך 4, מס' 1) במאמר על משואות פונקציונליות נדונה המשואה

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} \qquad (1)$$

ושם הוכח כי אם נדרש גם ש- $f(x)$ תהיה רציפה אזי הפתרון היחיד הוא $f(x) \equiv x$. כאן נביא הוכחה חדשה לפתרון זה שאינה דורשת כל הנחה של רציפות, וכו'. נציג את ההוכחה בשלבים.

1. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. כי אחרת יהיה זוג x, y כך ש- $f(x)=f(y)$, $x \neq y$, ואז יהיה האגף השמאלי של (1) מוגדר בעוד שאגף הימני אינו מוגדר.

2. $f(o)=0$, $f(1)=1$. כי אם נציב $y=0$ ב- (1) נקבל

$$f(1) = \frac{f(x)+f(o)}{f(x)-f(o)}$$

ולכן
$$f(x)\cdot[f(1)-1] = f(o)\cdot[f(1)+1] \qquad (2)$$

אבל ראינו כבר כי $f(x)$ אינו קבוע ולכן לא יוכל (2) להתקיים אלא אם כן $f(1)=1$, ואז נובע מאותה משואה כי $f(o)=0$.

3. $f(ab)=f(a)f(b)$. האגף השמאלי של (1) תלוי אך ורק ב- $\frac{x}{y}$ בעוד שהאגף הימני תלוי אך ורק ב- $\frac{f(x)}{f(y)}$. מכאן נובע כי $\frac{f(x)}{f(y)}$

תלוי אך ורק ב- $\frac{x}{y}$, ואנו יכולים לכתב איפוא,

$$f(x) = f(y)\, g(\tfrac{x}{y}) \qquad (3)$$

כשהפונקציה g עוד טרם הוגדרה. אם נציב ב-(3) $x = ab$, $y=a$ נקבל

$$f(ab) = f(a)\cdot g(b)$$

וכמו כן

$$= f(b)\cdot g(a)$$

מכאן נובע כי

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

אבל a,b היו שרירותיים ולכן $\frac{f(x)}{g(x)}$ קבוע. נכתב $f(x)=\lambda g(x)$ כש- λ קבוע. עכשיו מקבלים

$$f(ab) = \frac{1}{\lambda} f(a)\, f(b) \qquad (4)$$

אם נציב ב-(4) $a=b=1$, נקבל מיד כי $\lambda=1$, ולכן $f(ab) = f(a)\, f(b)$.

.4 $x>0 \Rightarrow f(x)>0$, זה נובע מהסעיף הקודם אם נציב $a = b = \sqrt{x}$, ואז $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2 > 0$.

.5 $f(-x)=-f(x)$. נציב $y=-x$ ב-(1) ונקבל $f(x) + f(-x) = 0$.

.6 $f(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1$ נציב ב-(1) $y=1$, $x=\sqrt{2}+1$ אזי

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = x$$

ולכן $f(x)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ ז.א. $[f(x)]^2-2[f(x)]-1=0$, $f(x)=1\pm\sqrt{2}$

אבל מ-4 נובע כי $f(x) > 0$ ולכן יש לקחת את השורש החיובי.

.7 אם נכתב $c=\sqrt{2}+1$, אזי $f(c^r) = c^r$ עבור כל מספר רציונלי r, ראינו כי הדבר נכון עבור $r=1$. מסעיף (3) נובע כי

$$f(c^2) = [f(c)]^2 = c^2$$

וקל להמשיך ולהוכיח ע"י אינדוקציה כי $f(c^n) = c^n$ עבור כל n טבעי. כש- r שווה למספר שלם שלילי, נגיד $r=-m$, יהיה

$$f(c^{-m})\, .\, f(c^m) = f(1)$$

$$= 1$$

ולכן $f(c^{-m})=c^{-m}$. עכשיו ניקח $x=\frac{p}{q}$ כש- p,q שלמים ו-q חיובי.

$$[f(c^{\frac{p}{q}})]^q = f[(c^{\frac{p}{q}})^q] = f(c^p) = c^p$$

ולכן

$$f(c^{\frac{p}{q}}) = c^{\frac{p}{q}}$$

8. $x > y > 0 \rightarrow f(x) > f(y)$.

מ- (1) נובע כי

$$f(x) - f(y) = \frac{f(x) + f(y)}{f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$$

והאגף הימני חיובי בגלל סעיף 4.

9. עבור כל x קיים $f(x) \equiv x$.

מסעיף 5 רואים כי יספיק להוכיח את הדבר עבור $x>0$. נניח איפוא שקיים $x>0$ ו- $f(x)\neq x$ ונבחר במספר רציונלי r בין $\log_c r$ ו- $\log_c[f(x)]$, כך ש- c^r נמצא בין x ו- $f(x)$.

במקרה ש- $f(x)>x$ יש לנו $x<c^r<f(x)$ ולכן

$$f(x) < f(c^r) \quad \text{בגלל סעיף 8}$$
$$= c^r \quad \text{בגלל סעיף 7}$$
$$< f(x)$$

וזה מהווה סתירה, מאידך מתקבלת סתירה דומה מההנחה $f(x)<x$, והמסקנה נובעת.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1. לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס)
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ-15.3.70.
4. לרשום על המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגרים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לאותה בעיה.

השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד (אין פירוש הדבר שהן קלות).

391*(2) נתונה רשימה של 1970 משפטים. המשפט ה-N ברשימה זו $(N=1,2,..,1970)$ הוא: "ברשימה זו נמצאים בדיוק N משפטים שקריים". איזה מבין המשפטים האלה הוא אמיתי?

392 (2) הוכח כי $x=\tan\frac{\pi}{10}$ הוא שורש של המשואה $5x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

393*(2) מצא את כל הפתרונות של המערכת

$$x + 2y + 4z = 12$$

$$4yz + 2zx + xy = 22$$

$$xyz = 6$$

394 (3) הוכח: א. כי

$$1\cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

ב. כי

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$$

395*(3) המשיקים בנקודות A, B, C למעגל החוסם את המשולש ABC חותכים את המשכי הקטעים BC, CA ו- AB בנקודות U, V, W

בהתאמה. הוכח כי U, V, W נמצאים על ישר אחד.

396 (2) θ הוא כזה ש- $\cos n\theta=0$ עבור כל n טבעי. הסדרה $A_0, A_1, \dots$
מוגדרת ע"י $A_{n+1}\cos n\theta - A_n\cos(n+1)\theta = 0$, $A_0 = 0$
$(n=1,2\dots)$. הוכח כי $A_{n+2}-2A_{n+1}\cos\theta + A_n = 0$
ומצא נוסחה עבור A_n.

397 (3) מסמנים ב- x_n את השורש החיובי הקטן ביותר של המשואה
$x\tan nx=1$. הוכח כי nx_n שואף ל- $\frac{\pi}{2}$ כאשר n שואף
לאינסוף.

398*(3) נתונות שלוש סדרות $\{a_r\}$, $\{b_r\}$, $\{c_r\}$

$$(r = 1,2,\dots n)$$

עבורן $(r = 1,2,\dots n)$ $\quad a_r c_r > b_r^2 \quad a_r > 0$

הוכח כי

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \sum_{r=1}^{n} c_r > \left(\sum_{r=1}^{n} b_r\right)^2$$

399*(2) סרט אשר אורכו 25 מטר ועוביו 0.1 מ"מ מגולל סביב גליל
עץ. הקוטר של הגליל עם הסרט 10 ס"מ. מהו הקוטר של גליל
העץ ללא הסרט?

400*(3) להוכיח כי למשואה $x^5+x = 10$ יש בדיוק שורש חיובי אחד
וכי שורש זה לא יוכל להיות רציונלי.

401*(3) קבע על הצלעות BC, CA, AB של המשולש ABC נקודות X, Y, Z
בהתאמה, כך שצלעות המשולש ZYX תהיינה ניצבות ל- OA,
OB, OC בהתאמה, כש- O הוא מרכז המעגל החוסם את ABC.

402 (4) נתון כי $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

וגם $\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\tan\frac{\gamma+\alpha-\beta}{4}\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4} = 1$

הוכח כי $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$

403*(3) שורשי המשואה $x^4-7x^3+px^2+\lambda = 0$ הם $\alpha,\beta,\gamma,\delta$

הוכח כי תנאי הכרחי לזה ש- $\alpha\beta = \gamma\delta$ הוא $\lambda = \frac{1}{49}$.

404 (3) $c = \cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\ \cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\ \cos 5\theta + \dots$

הוכח כי

$$\tan(2c) = 2\cot^2\theta$$

405 (3) על צלעות מקבילית בונים רבועים מבחוץ. הוכח כי מרכזי רבועים אלה מהוים קודקדי רבוע.

פתרון בעיות 361-375

361. 17 ימים הם שלושה שבועות פחות יום. אילו התקיימו ב- 17 ימים 113 שעות היו צריכות להתקיים בשלושה שבועות 119 או 118 שעות, אולם אין אף אחד משני המספרים האלה מתחלק ב-3. הדבר לא יתכן.

362. בניסוח הבעיה הזאת נפלה טעות ולכן אין החלק האחרון נכון; מאידך אין קושי למצא נוסחה עבור a_n כי

$$(n+\beta)a_{n+1} = (n+\beta+1)a_n$$

נציב $F_n = \frac{a_n}{n+\beta}$ ואנו רואים כי $F_{n+1} = F_n$. מכאן נובע כי F_n הוא קבוע ולכן $F_n = F_2 = \frac{\alpha}{\beta+2}$. יוצא כי

$$a_n = \frac{n+\beta}{\beta+2}\alpha$$

363. נסתכל בפונקציה $F(a) = \frac{a^p}{p} - \frac{a^q}{q}$. עבור $a > 1$ קיים $F'(a) = a^{p-1} - a^{q-1} > 0$ ולכן $F(a)$ היא פונקציה עולה, ומכאן $F(a) > F(1)$, ז.א. $\frac{a^p}{p} - \frac{a^q}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. המסקנה מידית.

364. קיים $(u+1)-(z+1) = (z+1)-(y-1) = (y-1)-(x-1)$; $z^2-y^2=y^2-x^2$; ו- $u^2-z^2=z^2-x^2$. מכל אלה קל להסיק כי האפשרויות עבור (x,y,z,u) הן $(1,1,-1,-1)$ ו- $(13,7,17,23)$.

.365 יהיה α בסיס הספירה, אזי $\alpha^3+\alpha^2+5\alpha+5$ מתחלק ב- $\alpha+2$ אבל
$\alpha^3+\alpha^2+5\alpha+5=(\alpha+2)(\alpha^2-\alpha+7)-9$ ולכן גם 9 מתחלק ב- $\alpha+2$,
כשברור כי $\alpha>5$. מכאן $\alpha=7$.

.366
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{ix}-e^{ix}}{e^{ix}+e^{ix}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$$

ולכן
$$e^{2ix}=\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$$
$$=\frac{1-n\cos\alpha+i\,n\sin\alpha}{1-n\cos\alpha-i\,n\sin\alpha}$$
$$=\frac{1-ne^{-i\alpha}}{1-ne^{i\alpha}}$$

מזה נובע כי
$$2ix=\ln(1-ne^{-i\alpha})-\ln(1-ne^{i\alpha})$$
$$=(-ne^{-i\alpha}-\tfrac{1}{2}n^2e^{-2i\alpha}-\tfrac{1}{3}n^3e^{-3i\alpha}-\dots)$$
$$+(ne^{i\alpha}+\tfrac{1}{2}n^2e^{2i\alpha}+\tfrac{1}{3}n^3e^{3i\alpha}+\dots)$$
$$=2i(n\sin\alpha+\tfrac{1}{2}n^2\sin2\alpha+\tfrac{1}{3}n^3\sin3\alpha+\dots)$$

.367 ע"י חשוב פשוט מתקבלות התוצאות:

לומדי פסנתר, כנור, וחליל	2
כנור וחליל (ללא פסנתר)	10
פסנתר וכנור	6
פסנתר וחליל	4
פסנתר בלבד	6
סה"כ	28

.368 נכתב $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$. שני אלה הם שרשי המשואה
$x^2-2x-2=0$. ונכתב

$$F_n=x_1^{2n+1}+x_2^{2n+1}\quad,\quad G_n=x_1^{2n}+x_2^{2n}$$

$$f_n=F_n/2^{n+1}\quad,\quad g_n=G_n/2^n$$

ועלינו להוכח כי f_n הוא מספר שלם. אבל $x_1^2-2x_1-2=0$ ו- $x_2^2-2x_2-2=0$. אם נכפיל את המשואה הראשונה ב- x_1^{2n-1}, ואת השניה ב- x_2^{2n-1} ונחבר, נקבל $F_n-2G_n-2F_{n-1}=0$, וע"י חילוק ב- 2^{n+1} מקבלים

$$g_n = f_n - f_{n-1} \qquad (1)$$

כמו כן נכפיל את המשואה הראשונה ב- x_1^{2n-1} ואת השניה ב- x_2^{2n-2} ונחבר. יוצא כי $G_n-2F_{n-1}-2G_{n-1}=0$ ולכן

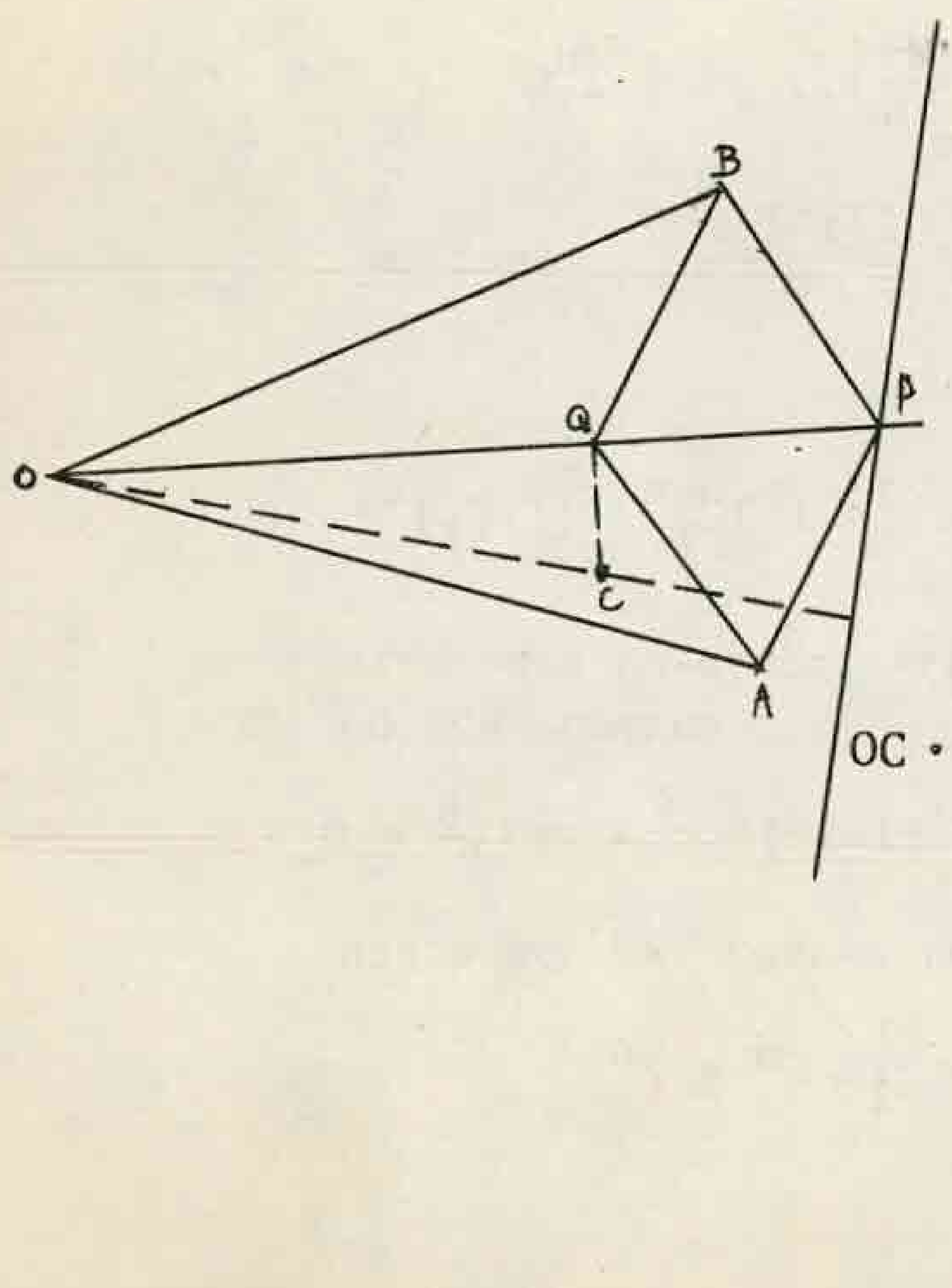
$$f_{n-1} = g_n - g_{n-1} \qquad (2)$$

מ-(1) ו- (2) נובע כי

$$f_{n-1} = (f_n-f_{n-1}) - (f_{n-1}-f_{n-2})$$

דהינו $f_n=3f_{n-1}-f_{n-2}$. יוצא איפוא כי f_n יהיה בהכרח שלם אם f_{n-1} f_{n-2} הם שלמים. אבל קל לאשר כי f_1, f_2 שלמים והמסקנה הכללית נובעת ע"י אינדוקציה.

.369 טענה. OP ישר. כי הרי QBPA מעוין ולכן PQ ניצב ל- AB מאידך OAPB דלתון ולכן גם OP ניצב ל- AB (ראה ציור).
עכשיו נוריד אנך OD מ-O לישר r ונוריד אנך ל- OP ב- Q שיפגש את OD ב- C. המשולשים ODP, OQC דומים ולכן



$$\frac{OQ}{OD} = \frac{OC}{OP}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} OC \cdot OD &= OQ \cdot OP \\ &= (OM-QM)(OM+QM) \\ &= OM^2 - QM^2 \\ &= (OB^2-BM^2)-(QM^2-BM^2) \end{aligned}$$

$$OC \cdot OD = OB^2 - QB^2$$
$$= \ell^2 - a^2$$

אבל OD נתון ולכן OC קבוע, ז.א. C נקודה קבוע. אבל $\angle OQC$ הוא זוית ישרה ולכן נמצא Q על המעגל אשר קוטרו OC.

.370 $\tan\alpha = h_1/y$ ואילו $\tan\beta = h_2/x = \frac{h_2}{y/\sqrt{2}} = h_2\sqrt{2}/y$. אנו יודעים כי $h_2 - h_1 = 6t$ ולכן

$$t = \frac{1}{6}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\tan\beta - y\tan\alpha\right)$$

ומהירות הרוח נתונה ע"י

$$u = \frac{y}{\sqrt{2}}/t = \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\frac{y}{\sqrt{2}}\tan\beta - y\tan\alpha} = \frac{6}{\tan\beta - \sqrt{2}\tan\alpha}$$

.371 נכתב $P = (1+\cos\alpha)\left[1+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)\right]\left[1+\cos\left(\alpha+\frac{8\pi}{n}\right)\right]$

$$\ldots\left[1+\cos\left(\alpha+\frac{4(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

$$= 2^n\left[\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\right]^2 = 2^n Q^2$$

אם נסמן $\beta_r = \frac{\alpha}{2} + \frac{2(r-1)\pi}{n}$, $C_r = \cos\beta_r$ יש לנו

$$\cos\frac{n\alpha}{2} = \cos n\beta_r$$
$$= C_r^{\,n} - \binom{n}{2}C_r^{\,n-2}(1-C_r)^2 + \binom{n}{4}C_r^{\,n-4}(1-C_r)^4 + \ldots$$

בגלל משפט דה-מואבר. יוצא איפוא כי המספרים $C_1, C_2 \ldots, C_n$ הם שרשי המשואה

$$x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 \ldots - \cos\frac{n\alpha}{2} = 0$$

המקדם של x^n במשואה זו הוא

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

בעוד שהאיבר החפשי הוא

$$(-1)^{\frac{n}{2}} - \cos\frac{n\alpha}{2}$$ כש- n זוגי

$$- \cos\frac{n\alpha}{2}$$ כש- n אי-זוגי

נשתמש בסימן E_n שהוא $(-1)^{\frac{n}{2}}$ עבור n זוגי, ו- 0 עבור n אי-זוגי ואז נוכל לכתב את האיבר החפשי במשואה בצורת $E_n - \cos\frac{n\alpha}{2}$. רואים איפוא כי

$$Q = C_1 C_2 C_3 \ldots C_n = \frac{(-1)^n (E_n - \cos\frac{n\alpha}{2})}{2^{n-1}}$$

ולכן $$P = 2^{+n} Q^2$$

$$= 2^{2-n}(E_n - \cos\frac{n\alpha}{2})^2$$

והמסקנה מידית.

372. לפי משפט הממוצעים $\frac{1}{3}(a+b+c) \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}}$ עם שויון אך ורק כש- $a=b=c$, ז.א.

$$(\frac{2p}{3})^3 \geqslant abc$$

ולכן $2p^2 \geqslant \frac{27abc}{4p}$. אבל $R = \frac{abc}{4s}$ ו- $r = \frac{s}{p}$ ומכאן

$$2p^2 > \frac{27 \cdot 4sR}{4 \cdot s/r} = 27Rr$$

כדי לראות את האי-שויון השני נשים לב לעובדה כי, עבור הזויות A, B, C של משולש, קיים

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \geqslant 4$$

עם שויון אך ורק כש- $A=B=C$, את העובדה הזאת נשאיר לקורא להוכיח. אבל

$$Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= pr = s = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \ \sin B \ \sin C} = \frac{2R}{r}$$ ולכן

מזה נובע כי $\frac{2R}{r} > 4$, ז.א.

$$27Rr > 54r^2$$

.373 ידוע כי, עבור k אי-זוגי מחלק $a^k + b^k$ ב- $(a+b)$. נוכל לכתב

$$S = 1^k + 2^k \ldots + 15^k$$
$$= (1^k+15^k)+(2^k+14^k)+(3^k+13^k)\ldots+(7^k+9^k)+8^k$$

ומהאמור נובע כי כל מחובר מחלק ב-16. מאידך

$$S = (1^k+14^k)+(2^k+13^k)+\ldots+(7^k+8^k)+15^k$$

וכאן מחלק כל מחובר ב-15.

.374 נכתב $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$. קיים $a+b = c$ ולכן

$$S = (a+c)^3 b + (a-b)^3 c$$
$$= b(a^3+3a^2c+3ac^2+c^3) + c(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$= a^3(b+c) + 3abc(c+b) + bc(c^2-b^2)$$
$$= (b+c)\{a^3+3abc+bc(c-b)\} = a(b+c)(a^2+4bc)$$
$$= a(b+c)[(c-b)^2+ 4bc] = a(b+c)^3$$

.375 גם בבעיה זו נפלה טעות. התנאי הנכון הוא שלמשואה $P(x)=6$ ישנם לפחות <u>ארבעה</u> פתרונות שלמים שונים. יהיו $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ פתרונות כאלה. אזי

$$P(x)-6 \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\cdot Q(x)$$

כש- גם $Q(x)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים. אם η הוא שורש שלם של $P(x) = 11$ יהיה

$$5 = 11-6 = (\eta-\alpha)(\eta-\beta)(\eta-\gamma)(\eta-\delta)\cdot Q(\eta)$$

אבל $\alpha-\eta$, $\beta-\eta$, $\gamma-\eta$, $\delta-\eta$ הם מספרים שלמים שונים וגם $Q(\eta)$ שלם, מאידך אין למצא ארבעה גורמים שלמים שונים של המספר 5.

רשימת פותרים

אהרוביץ אליעזר	י"א	תיכון עירוני א', ת"א	(4)
אהרנשטין חנה	י"א	תיכון חרדי לבנות, ר"ג	(7)
אולק שמואל	י'	בית הספר הריאלי חיפה	(10)
אחיטוב יונתן		צה"ל	(24)
אטיאס מרון	י"ב	אחד העם, פתח-תקוה	(11)
אילן שדה	י'	תיכון עירוני ד' ת"א	(4)
ביסטרי מרדכי	י"ב	אחד העם פתח-תקוה	(12)
בר-אדון שולמית	י"א	ביה"ס הריאלי, חיפה	(5)
ברזילי אבי	י'	כל ישראל חברים, ת"א	(12)
גולדהירש יצחק		צה"ל	(43)
גולדים חיים	י"ב	תיכון עירוני ד' ת"א	(11)
גורי אהוד	י"ב	תיכון מאוחד רחובות	(15)
גרש אגון		צה"ל	(13)
דונגי רן	ח'	"הערבה", חולון	(40)
הלפמן צבי	י'	תיכון עירוני הרצליה	(11)
המברג עודד	י'	כל ישראל חברים, ת"א	(12)
וינרב מירון	י"א	תיכון עירוני א' ת"א	(7)
זגר אליהו	י'	אחד העם, פתח תקוה	(2)
חיימי כהן רזיאל	ט'	תיכון עירוני א', ת"א	(9)
טרייבטש מרדכי	י'	תיכון עירוני ה' ת"א	(6)
יואל ניסן	י'	בי"ס הריאלי, חיפה	(4)
יערי אבי	י"א	"אורט" ת"א	(11)
לין אבי	י"ב	ישיבת ב"ע פרחי אהרן, חיפה	(29)
לינדה אבי		צה"ל	(9)
מישקוביץ חיים	י"א	תיכון עירוני דתי, רחובות	(4)
מנדלבאום אבישי		ת"א	(30)
מרקוביץ צבי	י"א	תיכון "קוגל",חולון	(4)
סמואל גד	י'	ביה"ס הריאלי, חיפה	(8)
עיני אברהם	י"א	אהל שם רמת-גן	(31)
עמיקם ארי		צהלה ת"א	(45)
פרידמן יעקב	י"ב	ישיבת נחלים	(25)
פריטג חנוך	י"ב	עירוני א' בת-ים	(15)
קובלר אריה	י"א	ביה"ס הריאלי, חיפה	(30)
קויאט דורון	י"ב	תיכון עירוני ה' ת"א	(39)
רוכמן אהרן	י"א	ביה"ס הריאלי חיפה	(26)
שידלובסקי עדית	ח'	כל ישראל חברים, ת"א	(9)
שפייר נורית	י'	תיכון עירוני ה'	(4)
שקדי יהודה	י"א	תיכון עירוני ה'	(27)
תדמור איתן	ט'	גמנסיה "הרצליה", ת"א	(28)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמתיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 4-23357-4

מחיר חוברת בודדת -.1 ל"י

מחיר חתימה ל-4 חוברות 3.50 ל"י