

רְבָעָה לְמִתְמַשְׁקָה

ל למוד ולמחкар

בעריכת דב ירדן

כרך 4 1950 אוקטובר 3-4 חוברת

חלקו

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|--|----|-------------------------|----|--|----|-------------------------|----|---|----|--|----|-----------------------|----|--|----|---|----|------------------------------|----|-----------------------|----|
| עמוד | לבעית טאריר-אסקווט המינימלית | 41 | עיר דבושונסקי | 41 | לבעית טאריר-אסקווט המינימלית | 41 | עיר דבושונסקי | 41 | הערות למאמר "משיפט Wolstenholme והכללות". | 59 | הוכחה ודוגמאות לכך שימושה משפטו הגדול של פרמה נתנה לפתחו בקורס גיגנטים שלמים | 62 | אברהם בירמן | 65 | מציאות איז-סוח מספרים פרילים $n \equiv 1 \pmod{2}$ | 68 | סקירות באנגלית (בסור כל מאמר) | 69 | תלוניות למכבים 2-3 | 69 | תבון קרדי 4 | 69 |
|------|--|----|-------------------------|----|--|----|-------------------------|----|---|----|--|----|-----------------------|----|--|----|---|----|------------------------------|----|-----------------------|----|

כתחם המרכה: דב ירדן כננת החדשנה, ירושלים

המחיר 500 פרוטה

לבעית שאר-אסקרט המינימלית

עד ז' בושינסן

ב夷ת שאר-אסקרט המינימלית היא למצוא, בסביל M בתוֹן, שתי סדרות מספרים, $\{A_m\}$, $\{B_m\}$, מ- $m=1, 2, \dots, M$

$$\sum_{m=1}^M (A_m)^k = \sum_{m=1}^M (B_m)^k \quad (\Delta)$$

בלביל (Δ) עלול להופיע 0^0 . תגא, זה דoulos כדי, יוכיל להעתמך במתש-הביונים לכתוב תמיד $M=1$:¹ איזו גתבה

$$(a+t)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} t^i \quad (\Delta)$$

בעיה זו נחקרה באופן מקיף בחמלים הלגינים החרבות. ברגע 1944 הושיעה המהדרה הסגינה מספרו של אלברט גלוּרֶן¹, המודפס כו לו לבעה זו ולביעות הנובעות ממנה. בטער זהה בתנים שתובנות כל הבעה בלביל $M \leq 10^{45}$ (טג). אבו רותנים במלחה המלמשים הרארוניים את רב התבוננות המתוֹפרות לבערתינו בלביל כל M . המכשטים 1 ו-2, יוציאים הישב. המכשטים 3 ו-4, הוויתנים נסוח מושיפלייקטיבי. כל הבעה, הגבם מהרות דוועים, אבל איין בהם סל החרוט. מספט 5, המשטיל בפתחוניות פרטוריים (זאת או מרת בפרטוניות בהמ- Δ ו-ה- B_m וה- A_m הם פונקציות של פרטורים טריירוטיים), הרא, כנראה, חורל. מספט זה מהrhoה את המכשיר השקר. למצוותה פרטוריים.

מכאו ואילך אבו מספלים בפתחוניות פרטוריים לנארדים. מספט 6 בתרן אפרדרות כל נורמליזציה, דוועה ליל המתרוגות הידועות צל פתרונות הקאללה (הנתוּנות בעמודים 44-43, מיד אחריו מספט 2) בותנוּות סדר להלערה לכל הפתרוּנות הפרטוריים הליינארדים, כך להם עוזד תכוונה גומפה לבונסהה בהערה 1. במקירה משערה זו איבנה בכורה, יעא סדרינגו מאנטזמים לפתרונות המספרים את ההנחה שבהילערה 1 בלבד. פתרונוּנות אלה בתנים לנורמליזציה גומפה (תוּצתה 1).

מספט 7 קובע תנאי מספיק לצוריות הארטוריות הלינאריריות (א, ע, א_m)

1-(ע, א)_m אלר הרbau לזרה גורמיות לפי תועאה 1 בסביל סהו תהי בה מתרון כל בעיתבו. במקירה סנכרונזה העלהה 1, התגאי,itol מספט 7 הרא גם הכרה. מלעט 8 הוא מספט עזר על סדרת נס, גה מסויימת מסדר 4, הבזורתה אבר מוגאים את כל הצורות הלינאריריות המפקות את תגאי מספט 7. מספט 9 מסכם את כל הדיבטים ונתון פתרון אקסטזייניסי לבעית מציאת פתרונוּנות פרטוריים, נארדים בלביל כל M . אם נכוונה הלערה 1, ממצאה מספט זה את כל המטרוברות הפרטוריים הלינארדים. בשבילים 2 בתבת דוגמה של פתרון מטרוי בדודה כלוּבָּא. בסוף נתבת הצערת על הדראה המיבילה סל התרוּן הפרטורי, בשבייל

¹ Albert Gloden, Mehrgradige Gleichungen, Groningen, 1944, ס. 104.

במספרו מהתמל גליידן בחתיבת מקוואר ומכנאה את המלואה (A) בצורה

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M^{M-1} B_1, B_2, \dots, B_M$$

בעמוד ה-56 הוו נרתו גם פחרובות של הבעה בסביבת המקרים בעמורם הפטרוניות הקשטיים בירוח הידיועים עד הבה:

$$1, 3\frac{1}{2}, 2$$

$$1, 4, 4\frac{2}{3}, 2, 2, 5$$

$$1, 5, 8, 12\frac{3}{2}, 3, 10, 11$$

$$1, 5, 9, 17, 18\frac{1}{2}, 2, 3, 11, 15, 19$$

$$1, 4, 6, 12, 14, 17\frac{5}{2}, 2, 9, 9, 16, 16$$

$$1, 19, 28, 59, 65, 90, 102\frac{6}{2}, 14, 39, 45, 76, 85, 103$$

$$1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51\frac{7}{2}, 2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50$$

$$1, 25, 31, 84, 87, 134, 158, 182, 198\frac{8}{2}, 18, 42, 66, 113, 116, 169, 175, 199$$

$$1, 3084, 3302, 11894, 23315$$

הערה. הקרוּא, סדים לב צגלוידן מצינו בכרייב שלו לא אה סמפר הא' ברים מכל צד המטואה, אלא את החיקת תגבורתה בירוח, שהייא (1- $\frac{M}{2}$), שעבורה קיימן המטואה. אנו בקרא ל (1- $\frac{M}{2}$) ח' ז' ק' ת' המשוואה או הבעה ויל- $\frac{M}{2}$ בקרא ד' ג' ת' המשוואה או הבעה. להלן בראה שברוח הרא למיינו אה בעי' ות' שאר' – אסקוּט לפס, דרגת הספאו אorth ולא לטפי חזקתו. אבו גראה, למול, דבעי' ות' סדרגוּתיהן ה- $\frac{M}{2}$ כפלו רוחת כל אויתו מספר, יכל ביביהן מ- $\frac{M}{2}$ הקרבנה. (גלוידן לא היה יכול להשתמש בדרכות המעווארת, הואיל וhero א משפט גם בעשייה יותר רחבה: למצווא תרונאות לביעיה מהזקה (1- $\frac{M}{2}$) על-ידי פתרונות בעלי M א' ברים ל- $\frac{M}{2}$ ח' ו' ת' , בה בלעה סאנו סעמאטאים אה עצנו לחוף הפלרו בורה בועל, M א' ברים . ב ר' ו' ק').

שנוי מושפעים יסודו. ובכך נגי מושפעים המהוירים יסוד לבל המהקר

(המושפעים הבלתי דו עיים היסב):

$$\sum_{m=1}^M \left(\frac{M}{m} \right)^k = \sum_{m=1}^M (B_m)^k$$

$$\text{סכום } 1. \text{ אם } k \text{ים } \sum_{m=1}^M \left(\frac{M}{m} + t \right)^k = \sum_{m=1}^M (B_m + t)^k$$

הרכזה. נפתה את $(B_m + t)^k$ בעירה שפע הבניינים לארה, והזקירות של קבוצת המקדמים כל הזרקאות הם מלנין, צל, ומכוון.

מפתש זה מאמילר, לממל, לבוחר את סכל האיברים ייחודיים, גל.

$$\sum_{m=1}^{m=M} (A_m + t) = \sum_{m=1}^{m=M} (B_m + t) = 0$$

$$\text{כל } \Psi \text{ ו- } \Delta \text{ קיימים (א) ו- (ב) } M' \times M'$$

$$\text{אם } (b) \text{ אז, כיל } \Delta_m \text{ סדר } \frac{M}{m} \text{ א-ט.}$$

הרכזה. אם קיימים (א), אז כל הפלג עזיריה הסטראית של Δ_m שווות הן לאוthon המוגזערות של B_m . עד לירוקאיות הסטראירוח מהמעלה ($M-1$). אוולם הנו בגזעיות הסטראית מהמעלה M , כו-לוות להירוח שגורות. עתה בתבונת

$$\sum_{m=1}^{m=M} (A_m + t) = \sum_{m=1}^{m=M} (B_m + t - A_m)$$

$$\text{abil לבל } F(z) = G(z) = G(z) - F(z) \text{, ו- } G(z) \text{, ו- } F(z) \text{, ו- } B_m.$$

אתה המשוות 0= $F(z) - G(z) = 0$, ס' מ' לריכים, ולכז Δ_m צוים ל- $-B_m$. תזרחה. פתרונו לבז כל האיברים מהעד צוים לאי-בריים מהצעד המגע.

בסדר מתאים נקבע פתרון חרב, ר' ו' א' ל' . . .

חתור בורת מרטוריין, באוון מיזחן בחענין גאו בפתרונאות שאר משורדים,

הבעיה. ליתר דיוק, נסחбел בפתרונאות שעבורם $\Delta_m = A_m$, $B_m = B_m$ ה- x, y .

באזר x ו- y הם טני, מספרים קלמים כל כהם.

בלביל הסPOOL להלו נחו גואז דוגמאות כל פתרונות לתרנגולים.

ולגאלאן של עחרובות שאר משורדים (בחליך מהרוגאמאות הבעיות מושיעים גני).

א.

$M=3$	$M-1=2$	$A_1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$	$B_1 = 0 \cdot x + (a+b) \cdot y$
		$A_2 = (-b) \cdot x + (a) \cdot y$	$B_2 = (-b) \cdot x + 0 \cdot y$
		$A_3 = (a) \cdot x + (a+b) \cdot y$	$B_3 = (a) \cdot x + (a) \cdot y$
$M=4$	$M-1=3$	$A_1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$	$B_1 = 0 \cdot x + (a+b) \cdot y$
		$A_2 = (a-b) \cdot x + (a) \cdot y$	$B_2 = (a-b) \cdot x + 0 \cdot y$
		$A_3 = (2a) \cdot x + (a+b) \cdot y$	$B_3 = (2a) \cdot x + (a) \cdot y$
		$A_4 = (a+b) \cdot x + (b) \cdot y$	$B_4 = (a+b) \cdot x + (a+b) \cdot y$
$M=5$	$M-1=5$	$A_1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$	$B_1 = 0 \cdot x + (-a+b) \cdot y$
		$A_2 = (2a-b) \cdot x + (a) \cdot y$	$B_2 = (2a-b) \cdot x + 0 \cdot y$
		$A_3 = (3a) \cdot x + (a+b) \cdot y$	$B_3 = (3a) \cdot x + (a) \cdot y$
		$A_4 = (2a+2b) \cdot x + (2b) \cdot y$	$B_4 = (2a+2b) \cdot x + (a+b) \cdot y$
		$A_5 = (3b) \cdot x + (-a+2b) \cdot y$	$B_5 = (3b) \cdot x + (2b) \cdot y$
		$A_6 = (-a+2b) \cdot x + (-a+b) \cdot y$	$B_6 = (-a+2b) \cdot x + (-a+2b) \cdot y$

לבעית שאר - אסקזט למינימל, נ

44

ב.

$$\begin{array}{ll}
 M=5 & M-1=4 \\
 A_1 = & 0x^2 + (a^2 - b^2)xy + (a^2)y^2 & B_1 = 0x^2 + (-a^2 + b^2)xy + (-a^2)y^2 \\
 A_2 = & a(a-b)x^2 + (a^2)xy + (ab)y^2 & B_2 = a(a-b)x^2 + (a^2 - b^2)xy + 0y^2 \\
 A_3 = & b(a-b)x^2 + 0xy + (-ab)y^2 & B_3 = b(a-b)x^2 + (a^2)xy + (a^2)y^2 \\
 A_4 = & -b(a-b)x^2 + (-a^2)xy + (-a^2)y^2 & B_4 = -b(a-b)x^2 + 0xy + (ab)y^2 \\
 A_5 = & -a(a-b)x^2 + (-a^2 + b^2)xy + 0y^2 & B_5 = -a(a-b)x^2 + (-a^2)xy + (-ab)y^2 \\
 \\
 M=8 & M-1=7 & A_1 = 1x^2 - 23xy + 34y^2 & B_1 = 1x^2 + 5xy - 56y^2 \\
 & & A_2 = 3x^2 - 35xy + 112y^2 & B_2 = 3x^2 - 23xy + 28y^2 \\
 & & A_3 = 4x^2 - 33xy + 56y^2 & B_3 = 4x^2 - 35xy + 84y^2 \\
 & & A_4 = 2x^2 - 5xy - 28y^2 & B_4 = 2x^2 - 33xy + 112y^2 \\
 & & A_5 = -1x^2 + 23xy - 84y^2 & B_5 = -1x^2 - 5xy + 56y^2 \\
 & & A_6 = -3x^2 + 35xy - 112y^2 & B_6 = -3x^2 + 23xy - 28y^2 \\
 & & A_7 = -4x^2 + 33xy - 56y^2 & B_7 = -4x^2 + 35xy - 84y^2 \\
 & & A_8 = -2x^2 + 5xy + 28y^2 & B_8 = -2x^2 + 33xy - 112y^2
 \end{array}$$

א.

$M=7$

$M-1=6$

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = 1x^5 - 1x^4y - 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 4xy^4 + 1y^5 & 3_1 = -1x^5 + 1x^4y + 2x^3y^2 - 4x^2y^3 + 4xy^4 - 1y^5 \\
 A_2 = 0x^5 + 1x^4y - 3x^3y^2 + 0x^2y^3 + 3xy^4 - 1y^5 & 3_2 = 0x^5 - 1x^4y + 3x^3y^2 + 0x^2y^3 - 3xy^4 + 1y^5 \\
 A_3 = 0x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 + 1x^2y^3 - 1xy^4 + 0y^5 & B_2 = 0x^5 + 2x^4y - 3x^3y^2 - 1x^2y^3 + 1xy^4 + 0y^5 \\
 A_4 = -1x^5 + 2x^4y + 2x^3y^2 - 5x^2y^3 + 2xy^4 + 0y^5 & B_3 = 0x^5 + 2x^4y - 3x^3y^2 - 1x^2y^3 + 1xy^4 + 0y^5 \\
 A_5 = -1x^5 + 1x^4y + 1x^3y^2 + 1x^2y^3 - 3xy^4 + 1y^5 & B_4 = 1x^5 - 2x^4y - 2x^3y^2 + 5xy^3 - 2xy^4 + 0y^5 \\
 A_6 = 1x^5 - 2x^4y - 1x^3y^2 + 4x^2y^3 - 1xy^4 + 0y^5 & B_5 = 1x^5 - 1x^4y - 1x^3y^2 - 1x^2y^3 + 3xy^4 - 1y^5 \\
 A_7 = 0x^5 + 1x^4y + 0x^3y^2 - 5x^2y^3 + 4xy^4 - 1y^5 & B_6 = -1x^5 + 2x^4y + 1x^3y^2 - 4x^2y^3 + 1xy^4 + 0y^5 \\
 B_7 = 0x^5 - 1x^4y + 0x^3y^2 + 5x^2y^3 - 4xy^4 + 1y^5 & B_8 = -2x^2 + 33xy - 112y^2
 \end{array}$$

א.

$M=3, 4, 6$

$M-1=5$

הערה. בתיו את הדרוגאות בסדר זה, מכירנו שבילו לה מתקרים. הדרוגאות מוגדרות בטענה ל- N מתקרים $M=5, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144, 147, 150, 153, 156, 159, 162, 165, 168, 171, 174, 177, 180, 183, 186, 189, 192, 195, 198, 201, 204, 207, 210, 213, 216, 219, 222, 225, 228, 231, 234, 237, 240, 243, 246, 249, 252, 255, 258, 261, 264, 267, 270, 273, 276, 279, 282, 285, 288, 291, 294, 297, 299, 302, 305, 308, 311, 314, 317, 320, 323, 326, 329, 332, 335, 338, 341, 344, 347, 350, 353, 356, 359, 362, 365, 368, 371, 374, 377, 380, 383, 386, 389, 392, 395, 398, 401, 404, 407, 410, 413, 416, 419, 422, 425, 428, 431, 434, 437, 440, 443, 446, 449, 452, 455, 458, 461, 464, 467, 470, 473, 476, 479, 482, 485, 488, 491, 494, 497, 500, 503, 506, 509, 512, 515, 518, 521, 524, 527, 530, 533, 536, 539, 542, 545, 548, 551, 554, 557, 560, 563, 566, 569, 572, 575, 578, 581, 584, 587, 590, 593, 596, 599, 602, 605, 608, 611, 614, 617, 620, 623, 626, 629, 632, 635, 638, 641, 644, 647, 650, 653, 656, 659, 662, 665, 668, 671, 674, 677, 680, 683, 686, 689, 692, 695, 698, 701, 704, 707, 710, 713, 716, 719, 722, 725, 728, 731, 734, 737, 740, 743, 746, 749, 752, 755, 758, 761, 764, 767, 770, 773, 776, 779, 782, 785, 788, 791, 794, 797, 800, 803, 806, 809, 812, 815, 818, 821, 824, 827, 830, 833, 836, 839, 842, 845, 848, 851, 854, 857, 860, 863, 866, 869, 872, 875, 878, 881, 884, 887, 890, 893, 896, 899, 902, 905, 908, 911, 914, 917, 920, 923, 926, 929, 932, 935, 938, 941, 944, 947, 950, 953, 956, 959, 962, 965, 968, 971, 974, 977, 980, 983, 986, 989, 992, 995, 998, 1001, 1004, 1007, 1010, 1013, 1016, 1019, 1022, 1025, 1028, 1031, 1034, 1037, 1040, 1043, 1046, 1049, 1052, 1055, 1058, 1061, 1064, 1067, 1070, 1073, 1076, 1079, 1082, 1085, 1088, 1091, 1094, 1097, 1100, 1103, 1106, 1109, 1112, 1115, 1118, 1121, 1124, 1127, 1130, 1133, 1136, 1139, 1142, 1145, 1148, 1151, 1154, 1157, 1160, 1163, 1166, 1169, 1172, 1175, 1178, 1181, 1184, 1187, 1190, 1193, 1196, 1199, 1202, 1205, 1208, 1211, 1214, 1217, 1220, 1223, 1226, 1229, 1232, 1235, 1238, 1241, 1244, 1247, 1250, 1253, 1256, 1259, 1262, 1265, 1268, 1271, 1274, 1277, 1280, 1283, 1286, 1289, 1292, 1295, 1298, 1301, 1304, 1307, 1310, 1313, 1316, 1319, 1322, 1325, 1328, 1331, 1334, 1337, 1340, 1343, 1346, 1349, 1352, 1355, 1358, 1361, 1364, 1367, 1370, 1373, 1376, 1379, 1382, 1385, 1388, 1391, 1394, 1397, 1400, 1403, 1406, 1409, 1412, 1415, 1418, 1421, 1424, 1427, 1430, 1433, 1436, 1439, 1442, 1445, 1448, 1451, 1454, 1457, 1460, 1463, 1466, 1469, 1472, 1475, 1478, 1481, 1484, 1487, 1490, 1493, 1496, 1499, 1502, 1505, 1508, 1511, 1514, 1517, 1520, 1523, 1526, 1529, 1532, 1535, 1538, 1541, 1544, 1547, 1550, 1553, 1556, 1559, 1562, 1565, 1568, 1571, 1574, 1577, 1580, 1583, 1586, 1589, 1592, 1595, 1598, 1601, 1604, 1607, 1610, 1613, 1616, 1619, 1622, 1625, 1628, 1631, 1634, 1637, 1640, 1643, 1646, 1649, 1652, 1655, 1658, 1661, 1664, 1667, 1670, 1673, 1676, 1679, 1682, 1685, 1688, 1691, 1694, 1697, 1700, 1703, 1706, 1709, 1712, 1715, 1718, 1721, 1724, 1727, 1730, 1733, 1736, 1739, 1742, 1745, 1748, 1751, 1754, 1757, 1760, 1763, 1766, 1769, 1772, 1775, 1778, 1781, 1784, 1787, 1790, 1793, 1796, 1799, 1802, 1805, 1808, 1811, 1814, 1817, 1820, 1823, 1826, 1829, 1832, 1835, 1838, 1841, 1844, 1847, 1850, 1853, 1856, 1859, 1862, 1865, 1868, 1871, 1874, 1877, 1880, 1883, 1886, 1889, 1892, 1895, 1898, 1901, 1904, 1907, 1910, 1913, 1916, 1919, 1922, 1925, 1928, 1931, 1934, 1937, 1940, 1943, 1946, 1949, 1952, 1955, 1958, 1961, 1964, 1967, 1970, 1973, 1976, 1979, 1982, 1985, 1988, 1991, 1994, 1997, 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018, 2021, 2024, 2027, 2030, 2033, 2036, 2039, 2042, 2045, 2048, 2051, 2054, 2057, 2060, 2063, 2066, 2069, 2072, 2075, 2078, 2081, 2084, 2087, 2090, 2093, 2096, 2099, 2102, 2105, 2108, 2111, 2114, 2117, 2120, 2123, 2126, 2129, 2132, 2135, 2138, 2141, 2144, 2147, 2150, 2153, 2156, 2159, 2162, 2165, 2168, 2171, 2174, 2177, 2180, 2183, 2186, 2189, 2192, 2195, 2198, 2201, 2204, 2207, 2210, 2213, 2216, 2219, 2222, 2225, 2228, 2231, 2234, 2237, 2240, 2243, 2246, 2249, 2252, 2255, 2258, 2261, 2264, 2267, 2270, 2273, 2276, 2279, 2282, 2285, 2288, 2291, 2294, 2297, 2300, 2303, 2306, 2309, 2312, 2315, 2318, 2321, 2324, 2327, 2330, 2333, 2336, 2339, 2342, 2345, 2348, 2351, 2354, 2357, 2360, 2363, 2366, 2369, 2372, 2375, 2378, 2381, 2384, 2387, 2390, 2393, 2396, 2399, 2402, 2405, 2408, 2411, 2414, 2417, 2420, 2423, 2426, 2429, 2432, 2435, 2438, 2441, 2444, 2447, 2450, 2453, 2456, 2459, 2462, 2465, 2468, 2471, 2474, 2477, 2480, 2483, 2486, 2489, 2492, 2495, 2498, 2501, 2504, 2507, 2510, 2513, 2516, 2519, 2522, 2525, 2528, 2531, 2534, 2537, 2540, 2543, 2546, 2549, 2552, 2555, 2558, 2561, 2564, 2567, 2570, 2573, 2576, 2579, 2582, 2585, 2588, 2591, 2594, 2597, 2600, 2603, 2606, 2609, 2612, 2615, 2618, 2621, 2624, 2627, 2630, 2633, 2636, 2639, 2642, 2645, 2648, 2651, 2654, 2657, 2660, 2663, 2666, 2669, 2672, 2675, 2678, 2681, 2684, 2687, 2690, 2693, 2696, 2699, 2702, 2705, 2708, 2711, 2714, 2717, 2720, 2723, 2726, 2729, 2732, 2735, 2738, 2741, 2744, 2747, 2750, 2753, 2756, 2759, 2762, 2765, 2768, 2771, 2774, 2777, 2780, 2783, 2786, 2789, 2792, 2795, 2798, 2801, 2804, 2807, 2810, 2813, 2816, 2819, 2822, 2825, 2828, 2831, 2834, 2837, 2840, 2843, 2846, 2849, 2852, 2855, 2858, 2861, 2864, 2867, 2870, 2873, 2876, 2879, 2882, 2885, 2888, 2891, 2894, 2897, 2900, 2903, 2906, 2909, 2912, 2915, 2918, 2921, 2924, 2927, 2930, 2933, 2936, 2939, 2942, 2945, 2948, 2951, 2954, 2957, 2960, 2963, 2966, 2969, 2972, 2975, 2978, 2981, 2984, 2987, 2990, 2993, 2996, 2999, 3002, 3005, 3008, 3011, 3$

כמשלדה רבעית, וכן אפסטר לוחה את כלם בוגרים זה.
ptr. 1 ברגמן, מהצעלה הצעה עית, אבל ליכל הטענה כבודה של-
סחובותם, דיבריה גלוידן (עמ' 42-44). • צט אמרם מתקובל
אקוירילגט גלוידן (עמ' 42-44). • הדרו גמה למסדרה ג' = 54
(עמ' 45).

לעדי בורח לנטה את בשיית טאלר אסקריט בצלעה מושם כדר נחזר

לטול כולם מ- $\frac{1}{z-A_m}$ ו- $\frac{1}{z-B_m}$ למיניהם, והנכו נים, הטענו ש- $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z)$ מוגדרת בנקודה z .

שְׁתַרְוּן מִסְפָּר, וְלֹא בְעֵינֵי תְּטַאֲרָם, וְאֶת-אֶת-מִדְתָּן אֶסְמָךְ 3. הַיְלָה נְתַרְתָּלָה אֶת-מִזְבְּחָה (מִזְבְּחָה) וְאֶת-מִזְבְּחָה (מִזְבְּחָה) וְאֶת-מִזְבְּחָה (מִזְבְּחָה).

$$\sum_{m=1}^M (A_m)^k = \sum_{m=1}^M (B_m)^k \quad (k=0, 1, \dots, (M-1))$$

$$\frac{M}{L}(3_{n-M_m})=c$$

בְּאַמָּר כִּי־כֵן תַּלְמוֹד כְּנָסֶת־הַעֲלָדָה
בְּאַמָּר כִּי־כֵן תַּלְמוֹד כְּנָסֶת־הַעֲלָדָה :

卷之三

ללא ינבר התחפשי , הראיל ות הסמורי רות מל ה-III
עד לטוב רצאי רות ממאליה (1+1) וככל קדום

$$M_1 \cdot F(z) - G(z) = (-1)^M \left(\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{T_1 T_3} \right)$$

$$\sum_{m=1}^M (B_n - \hat{A}_m) = F(B_n) + (-1)^M \left(\sum_{m=1}^M A_m - \sum_{m=1}^M B_m \right)$$

$$\frac{1}{m-1}(\beta_n - \alpha_m) = 0$$

$$\sum_{m=1}^M \left(\frac{A}{\lambda} m \right)^{\zeta} = \sum_{m=1}^M \left(B_m \right)^k \quad (k=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(-1)^{m_C} = \prod_{m=1}^M \frac{\Gamma_{r_m}}{\Gamma_{B_m}}$$

המזהב. מילון עברי-רומי ורומי- עברית. מילון עברי-רומי ורומי- עברית. מילון עברי-רומי ורומי- עברית. מילון עברי-רומי ורומי- עברית.

הסדרירות מלמדים הולן מהטערת ($1 - \frac{1}{n}$), ו- $n = 0, 1, 2, \dots$ נכזרים.

$$\sum_{m=1}^M (B_m)^k = \sum_{m=1}^M (A_m)^k \quad (k=0, 1, 2, \dots, (M-1))$$

ו באס"ר לפ"ז בקצין רת הנטול יותם מעלה מ' ד' י' ס:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x, y) \quad k$$

המספקת את (B) תקרא
מצוחה הצורו האלגברי י-
 B_m (x, y) Δ_m
ערכם סמוכליות ה策 דילוי בעריכי
בעל תבר . רם טר , קל בעיתון . הערכם סמוכם ר-
עריכם בתרב'ם קל א-ע מהוים א-ע פתרן פתרן מטרים .
ברדי, ל-ע פתרן פתרן מטרים .

מהגר נר טריד $\psi_{\text{אליפס}}$. אם בתרביהם ה- (x,y) מושג ל ה | מושג $\psi_{\text{אליפס}}$.

אמילו בז'ן (T-W) ^אהעיר. אבו גראן קיימת כלהן סרמאנם פתרון מושגן, אפסדר לבחו,

פְּרָטָרִים **בְּלֵגָנָה** **אַמְּדָנִים** **אַתְּ** **רְתָבָה**

המלו אה (B) . איז . ב (א) אפסר ליעזרת אמת ה- λ_m (x) אפסר להכיפה ל- λ_m (x,y) אפסר להחכר ל- λ_m (x,y) אפסר לאות ה- λ_m (x,y) אפסר לסדר ה- λ_m (x,y,z).

(ז) $\Gamma(x,y)$ גורבע מסטס 1).

טז, טו, טז

וְעַד יָמֵינוּ כִּי מִתְרֵבָה שְׁאַפְלָרָה לְעַבֶּר מִתְּרֵבָה כִּי

מזהם יניהם אקריר לblastiem . כ"ד ,
אחר זו בז' פתרו גות פרטטראים . ע"ד ר' ,
הנתנים הפטר מטה , קב' המקדhn 8=M ,
לז' יגשד , קב' הפטר גות הפטר מטה

54 גם, למעילו, אקויר לבסיז במלון הגדה ליל מעלה.

התבונת הימדית שאל בחר במודול גורת הגדשהם, בחר במודול (B) את ז

מימין רתע ארבה סלול או תסום (T-W) איברים בלבד (במקוּם תאי ברים) הגבוי בותה (במקוּם תאי ברים) הגבוי בותה (במקוּם תאי ברים)

ל-III בגדים מודרניים. מתחם המבקרים יתנהל בזירה המרכזית של תערוכת המוזיאון. מושג זה יאפשר למבקרים לחשוף ממצאים מתקופות שונות של ההיסטוריה של ארץ ישראל.

$$(x+y)^k + (2x+3y)^k + (7x+6y)^k + (11x+7y)^k + (10x+5y)^k + (5x+2y)^k = \dots$$

$$z+7y)_{\Sigma} + (5x+5y)_{\Sigma}$$

ממשי $x+2y=11$. גזען $5x+2y=0$. משלו יקח המשנה $x=3$, $y=-2$.

$$1^k + 5^k + 4^k + (-1)^k + (-5)^k + (-4)^k + 1^k + 5^k$$

הצדיקות הגדלה ממנה נזקן לאין סוף, והוא יתגשם בלבב כל אחד מכם.

דָוִהַיְהַתְרֹוּ בְּעֵת הַפְתָרָה כְּלַיְלָה בְּמַה אֲבָדָה מִשְׁרַעַם.

אָתָה הַתְּבִרֵגֶת וְלֹא הַפְּתָרֶת אֲלֵיכֶם בְּתַחְנִיל אֲדֹמֶת הַפְּטָרָה עֲלֵיכֶם כְּלָמָדָה שְׁרָמָתָה גְּלָגָלָתָה לְאַלְמָנָתָה.

הנורמלים, חסכו נזקם, ותרו בערם מהצד:

אַחֲרָת יְהִי הַפְּתֻרָה הַפְּתֻרָה תַּלְוֵי

המקדש, סעיפים א' – (א', ב') ו- (ב' – ג') הם מילים
המשמעותן שלם ושלום. מילוי המילים בפיהם
הו – מילוי המילים בפיהם – מילוי המילים בפיהם –

הרכחה . יהי $(u, v)^{M=1} B_m (u, v)$ הפעררוֹן הפעררוֹן המרשמי , באשר ה- x_m^m

זה צוירות לי גאריות הו מרגנירוט ב- $u = v$. נבחרו :

$$x = \Delta_1 (u, v) - B_2 (u, v)$$

ונבשא את $u = v$ כפונקציות ליניאריות של $x = u$. זה אפסורי , הואייל ובישפרין

הפערםר , הבתוֹן איננו שרייל אליאו דגנרטיבי איזי המראות הלאו רות הנטבאות את $x = u$ ה- Δ_1 בלחתי תלויוות . נקבל $(u, v)^{M=1} A_m (u, v) = B_m (u, v)$

ברור ס- $(u, v)^M$ מחרוֹן מהוים פתרוֹן פרטשי לינארדי חזק $(u, v)^M$ אם המקדים אינם שלמים אפסר להכפיל את $x = u$ ו- Δ_1 במקדם מדרוף מתאים) , האקוילגשי

לראבוֹן . גביה עתה $x = 0$. איזי $\Delta_1 = 3$ כי כך בחרבוֹ את $x = u$ לבן , לפחות משלש גם סאר האיברים מצד שמאל לוים לאמאר האיברים מצד שמאל שמאל טוים בסדר מתאים . אם

עתה נבחר $y = 1$, האיברים מלני הצדדים הייחודי דראָק אַמְּקָדָמִים ליל $x = u$ ב- $(u, v)^M$. לכוֹן המקדים היל $x = u$ מעד למקדים ליל $x = u$ מעד יבאוֹת אפּוֹן , אם נבחרוֹ אפּוֹן , גראָה כי אם המקדים לל $x = u$ מעד

המאנטי עדר , המילואה .

צ'רננרט שרטודרים ליניארדים רוחברות . נחויר למשראה (C) יבוחט

לטהוֹות כל איבר מלמאָל לכל איבר סימין . נתחיל מזוה שבבחר את הראָרוֹן מלמאָל , $(u, v)^M$, ונטווה אותו בזוה אחר זה לכל אחד מהלחת האיברים מימיֶן , קובל

$$x+y = x+2y, \quad x+y = 2x+y, \quad x+y = 7x+3y, \quad x+y = 11x+6y, \quad x+y = 5x+5y$$

או :

$y=0, \quad x=0, \quad 2(3x+y)=0, \quad 5(2x+y)=0, \quad 3(3x+2y)=0, \quad 4(x+y)=0$

את המקדים חמוץ למסגרות אפּלר למחרק ולבסורק מקובלם אנו את קיד המדרוארטה : $x+y=0$

אם ברצתה להשוות עתה כל $x+y$ איבר סימין מזוה שבבחירה את האיבר הראָרוֹן

אתה מילא הטעאות הנזיכרות לעיל . בליה הבה סכמו אט התיעאות . כל ריירה מיצות איבר מעד למאָל וכל שטודה איבר מעד , מאי . בהעטלבאות הלוֹרָה והעטודה רימנו כל טעם את הבשוֹן ביביל קעליו לחתפאָם ב- $x = u$ קעליו לחתפאָם ב- $x = v$ האיברים הללו .

הרי יומם . נמצא :

לראָה I :

1 2 3 4 5 6

1	2	3	4	5	6
y	x	$3x+y$	$2x+y$	$3x+2y$	$x+y$
$x+y$	y	x	$3x+y$	$2x+y$	$3x+2y$
$3x+2y$	$x+y$	y	x	$3x+y$	$2x+y$
$2x+y$	$3x+2y$	$x+y$	y	x	$3x+y$
$3x+y$	$2x+y$	$3x+2y$	$x+y$	y	x
x	y	$2x+y$	$3x+2y$	$x+y$	y

אותה התופעה אפּלר להצעיג שלידיו לוח ממיֶן אחור : נקדיע כל יורה לאחד סלחת הבשויים ב- $x = u$ ייעליים להתחפש ובעוף הלוֹרָה בריכום את המספר הסדרוי רל האיבר מעד למאָל קעליו להירוח לאייבר ימאָד ימיֶן לילו סוקץית העמודה . נקבל :

לראן II.

1	2	3	4	5	6
7					
x	x+7				
3x+27					
2x+7					
3x+y					
x					
6	1	2	3	4	5

זהו לוח דהבו דהה עם לוח הכתל הל חבורה ציקלית מעלה ילייתו. להלן ביצועם בפתרון בוטה פרטוריים המבאים ללוח II שפuros לוח-הכתל כל חבורה ציקלית.

השערת . בעלה בשעת היעירה המבוססת על הדיווגמה לבוחה בסעיף הקרודים. הטעורה היא לאם, בhabiil מ איזה מהו א, קיים שתרו פרטורי לינארית הומווגני בלתי דוגרטיבי, גז, אפדר לבחור את סדר האיברים מלבוי הצדים באפוד לאמ בגנה לוח II, היה זה לוח שפuros לוח II, היה זה לוח שפולה כל חבורה ציקלית.

ذات אומרת, גבו מבנים כי קיימת:

הטעורה I. יהי M גטו. אם קיים שתרו פרטורי, לינארית הומווגני בלחתי דגרטיבי, גז, אפדר לסדר גזה דאם בוחרים את X ו- Y כך ש

$$\Delta_i(X, Y) = B_j(X, Y)$$

אז קיימים:

$$(X, X)_{h+1}^B = (X, Y)_{h+1}^A \quad (X, Y)_{m+1}^B = (X, X)_{m+1}^A$$

בלבייל כל מ, בגדר אבו קוובים כי (X, X)_{m+1}^B הטעורה I קוובעת י כל שתרו לינארית מביא ללוח II משפטו לוח הכתל של כל חבורה ציקלית. אם יתרבר לההייערה איבגה צורקתו ומקיימים פתרונות לינאריים הומווגניים אלר לוח II שלם איבגו מהשיטות הדוח, הר, על-ידי הנחת מסתבלים בהם. במקומות הללו, גבו שעלינו למשלה, יאנדו מסתבלים אך ורק בפתרונאות הפרטוריות הסדרים סאנדו 1 (הרוגמאות לגטו בעמוד 43 מוכחות דימונחן זו איבגה ריקה).

או גם סבור אגד, קאות הלעורה 1 אפדר להובייה. נסתכל איך בבו, לוח II. לפ, מלהפוך 5, כל שפער צרייך להרפייע בלוח זה שעם אחדת בכל שורה ופעם אחדת בכל עמודה. הלווא אסוא-ערבו עליבוי. בלביל להובייה דזוה גם לוח כתל של חבורה צרייך להובייה להאוצי-אליבירות: $c(ab) = (ca)b$. בדרך בסיסונית ראייתו, לרבותים לטבאים (אליה רבסיתו אויהם) איבם בו ביעים פתרונות שרוי-אלויים ($h-(X, X)_m^B$ זחים ל- $(X, X)_m^B$ בסדר ידו).

ששבט 9 לארד השערת I. מילול 9 רבע לאמ יש פתרון טרמי, לנאר, הובאי, ובלתי, דגראטי, אזי, קיים גם שתרו פרטורי אקוירו-לנטשי סייריו מסדרים גאנדו:

לבעית טרי-אסוציאט המינימלית

$$(x, y) = p_m x + q_m y; \quad B_m(x, y) = p_m x + q_m y$$

כאילר $(m) \neq n$ היא פונקציה כללית המקיימת את הנדרה $n = 1, 2, \dots, M$ על עצמה בסדר מוגדים.

הលערת 1 אומנת בינו היתר לאפרה תמי' לסדר קד' שיחיה הילערת 1 אומנת בינו היתר לאפרה תמי' לסדר קד' שיחיה.

ולענין 1. אם קיימים פתרון פרטורי, ל-באר, והוינו גדי, בלתי, דגראשיבי,

או, אפרה תמי' לבנות פתרון פרטורי, אקו, يولנש, מהצורה:

$$B_m(x, y) = p_m x + q_m y; \quad B_m(x, y) = p_m x + q_{m-1} y$$

(אבל מוגדים $m = M+m_0 - m_0 = M+m_0 - q_0$).

הערה. תוצאה 1 בותבת אפסרונות מל' גולדלייזיה ידרישה של פתרון פטרטוריים ליבארים אקרו, ולבטיים. בדומה ל-ליקי, מתח אורתה האפלורט מל' גולדלייזיה למל' פתרונות פרטוריים מסלילות, וותר גברות. כך למשל, הדוגמאות לנתבו בעסוי 44 עסוי 5 $M=8$ הבדנו בבריות בצרה הבהה:

$$\Delta_m^2(x, y) = p_m x + q_m y; \quad B_m(x, y) = p_m x^2 + q_{m-1} y^2; \quad B_m(x, y) = p_m x^2 + q_m xy + q_{m-2} y^2$$

או למ' רם הצלחת, לביר אם התכוונה הוצאה כלית היא לכל הפתורו בוטה העשרה, אם ממעלה האבויה הגראדייה.

צצען 'סוד' לעתורנרט הגרמארינט הליבארים להלו' בגיח תסיד

$$k, i, m \text{ הם המשמע: } M = M + m_0, \quad B_m = B_m, \quad \Delta_m = \Delta_m$$

מצצען 7. יה, מ' גניך סקייס:

$$\Delta_m(x, y) = p_m x + q_m y; \quad B_m(x, y) = p_m x + q_{m-1} y; \quad k = 1, 2, \dots, M$$

ב': $m - m_0$ רה- q_0 המ案ילה לאלה סאמ בוחרים x ו- y כר ס:

$$\Delta_m(x, y) = B_m(x, y)$$

אי, קיימים גלביל כל ה:

$$\Delta_m(x, y) = B_{n+h}(x, y)$$

אי, גרו א מכפלה כל M גורמים ליגנארים, מאהים פתרון פרטורי, של בעית שאר-אסקווט.

הוכחה. לשם הוכחת מლפט א' גנטט נמספט 4. בסתכל במקפה:

$$\prod_{m=1}^M [B_n(x, y) - \Delta_m(x, y)] = C_n(x, y)$$

על גרו להויכח להפלי גוּם (y , $C_n(x, y)$, סחוֹא מכפלה כל M גורמים ליגנארים, אי-גנו תלי, ב- n . אם גחליק אַה $n - h$) וככל לכתוב:

$$C_{n+h}(x, y) = \prod_{m=1}^M [B_{n+h}(x, y) - \Delta_m(x, y)] = \prod_{m=1}^M [B_{n+h}(x, y) - \Delta_{m-h}(x, y)]$$

מאנ' סעידי גרו לעבור באפ' עיקלי, על כל $h - m$. אבל לאור הוכח ב', שבמלהען

$$[B_n(x, y) - \Delta_{m+h}(x, y)] = [B_n(x, y) - \Delta_m(x, y)]$$

באדר 1 הוא גורם מספרי, בלתי תלוי, ב- x ו- y . כך:

$$C_{n+h}(x, y) = L \cdot C_n(x, y)$$

באלר גם L הוא גורם מספרי, בלתי תלוי, ב- x ו- y . עלי גו עתה להוכיח ס- $1 =$

בוחלב את האיברים בעלוי, המשילה הכו, ובירה ב- x , $C_n(x)$ מתקבלת מ- $C_{n+h}(x)$. מתקרא ה- $C_n(x)$, בוגע מתקרא ה- $C_{n+h}(x)$. מתקרא ה- $C_n(x)$, בוגע מתקרא ה- $C_{n+h}(x)$.

לפניהם נשים $x = 1$, ו- $y = 1$, ו- $z = 1$, ו- $w = 1$, ו- $t = 1$, ו- $s = 1$, ו- $u = 1$, ו- $v = 1$, ו- $p = 1$, ו- $q = 1$, ו- $r = 1$, ו- $m = 1$, ו- $n = 1$, ו- $d = 1$, ו- $c = 1$, ו- $b = 1$, ו- $a = 1$, ו- $f = 1$, ו- $g = 1$, ו- $h = 1$.

$$B_n(x, y) = \sum_{m=1}^M [f^{m+1-n}(x) + g^{m+1-n}(y)] (q_m - p_m)$$

באזור $W-U$ שורש מסגר אדר π ציר x ו- y ב- $x = 1$, ו- $y = 1$, ו- $z = 1$, ו- $w = 1$, ו- $t = 1$, ו- $s = 1$, ו- $u = 1$, ו- $v = 1$, ו- $p = 1$, ו- $q = 1$, ו- $r = 1$, ו- $m = 1$, ו- $n = 1$, ו- $d = 1$, ו- $c = 1$, ו- $b = 1$, ו- $a = 1$, ו- $f = 1$, ו- $g = 1$, ו- $h = 1$.

$$(x, y) = \frac{w_q - u_p}{w_q - w_p} (x + y) + \frac{w_q - u_p}{w_q - w_p} (q_m - p_m)$$

באזור $W-U$ שורש מסגר אדר π ציר x ו- y ב- $x = 1$, ו- $y = 1$, ו- $z = 1$, ו- $w = 1$, ו- $t = 1$, ו- $s = 1$, ו- $u = 1$, ו- $v = 1$, ו- $p = 1$, ו- $q = 1$, ו- $r = 1$, ו- $m = 1$, ו- $n = 1$, ו- $d = 1$, ו- $c = 1$, ו- $b = 1$, ו- $a = 1$, ו- $f = 1$, ו- $g = 1$, ו- $h = 1$.

$$\frac{p_{m+1} - p_n}{q_{n+1} - q_m} = f^{m+1-n} (q_m - p_n)$$

באזור $W-U$ שורש מסגר אדר π ציר x ו- y ב- $x = 1$, ו- $y = 1$, ו- $z = 1$, ו- $w = 1$, ו- $t = 1$, ו- $s = 1$, ו- $u = 1$, ו- $v = 1$, ו- $p = 1$, ו- $q = 1$, ו- $r = 1$, ו- $m = 1$, ו- $n = 1$, ו- $d = 1$, ו- $c = 1$, ו- $b = 1$, ו- $a = 1$, ו- $f = 1$, ו- $g = 1$, ו- $h = 1$.

$$p_{m+1} - p_n = f^{m+1-n} (q_m - p_n)$$

אך:

$$\frac{p_{n+1} - p_m}{q_{m+1} - q_n} = \frac{f^{n+1-m}}{f^{m+1-n}}$$

כך:

$$\frac{\prod_{m=1}^M p_m}{\prod_{m=1}^M q_m} = \frac{f^{n+1-m}}{f^{m+1-n}}$$

ולכן ה- π הונכלה הנטוותה לעצם סורה ל- -1 . וכך:

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{m=1}^M p_m}{\prod_{m=1}^M q_m} &= \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n} = -1 \\ \frac{\prod_{m=1}^M p_m}{\prod_{m=1}^M q_m} &= \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n} = -1 \end{aligned}$$

רשותה, כבויים אובי שטח הרובחת. קדים:

$$C_n(x, y) = \sum_{m=1}^M [(f^{m+1-n}(x) + g^{m+1-n}(y)) (q_m - p_m)]$$

בגבורם כל (x, y) ש- $x = 1$, ו- $y = 1$, מתקבל סיל איבר דה ריא $x^{m+1-n} y^{n+1-m}$. המתקבל בזיל העיטלה

$$(q_{n+1} - q_n) \left(\frac{u_m - v_n}{u_n - v_m} \right)^{m+1-n}$$

בְּשָׁמֶן וְבְּגַת

• 6

$$\begin{aligned}
 & \left(q_{n-1} - q_n \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M (p_n - p_m) = (q_n - q_{n+1}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M (u_n - u_m) \\
 & = \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M (p_n - p_m)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^M (p_n - p_{m+1})} \\
 & = \frac{(p_n - p_{n+2})}{(p_{n+1} - p_{n-1})} \\
 & = \frac{p_n - p_{m+1}}{p_{n+1} - p_m} = \frac{n - p_{m+1}}{n - p_{n+2}}
 \end{aligned}$$

$$(u_d - u_{\bar{d}})(u_b - u_{\bar{b}}) = (u_b - u_{\bar{b}})(u_d - u_{\bar{d}})$$

$$\frac{u_{b-q_n} - u_{b-p_{n-1}}}{u_{d-q_n} - u_{d-p_{n-1}}} = \frac{u_{b-q_n+1} - u_b}{u_{d-p_n+1} - u_d} = t^2$$

חישוב גודל גראן. סטטואנומטר למדוזא

(D) $B_m(x, y) = p_{m,x} + q_{m,y}$

$$(x) \quad \frac{1 - u + \int_b^a u_1 \, d_1}{1 + \int_a^b u_1} = \frac{1 - \int_b^a u_1 \, d_1}{1 + \int_a^b u_1}.$$

$$\cdot (f_1 \cdots f_m) = f^{(1-j)}$$

במקרה זה נשים $\alpha = \beta$. מכאן $\alpha_i = \beta_i$ ו- $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$. נזכיר ש- $\alpha_i < \beta_i$ ו- $\alpha_{i+1} > \beta_{i+1}$. נשים $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ ו- $\gamma_{i+1} = \beta_{i+1} - \alpha_{i+1}$. נשים $\delta_i = \alpha_{i+1} - \beta_i$ ו- $\delta_{i+1} = \beta_{i+1} - \alpha_{i+1}$. נשים $\epsilon_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ ו- $\epsilon_{i+1} = \beta_{i+1} - \beta_i$. נשים $\zeta_i = \alpha_{i+1} - \beta_{i+1}$ ו- $\zeta_{i+1} = \beta_{i+1} - \alpha_{i+1}$.

עתקה: גדרה ב עתקה: $(f - T)$

$$\sum_{m=1}^M D_m = 0$$

卷之三

$$= \frac{q_{j+2} - q_j}{q_{j+1} - q_j} = \frac{D_{j+1} + D_j + D_{j-1}}{D_j} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$D_{j+1} = z D_j - D_{j-1}$$

הנשיגת בירתנות לבו בזיה אחד ראת b את a ורוי, זען לבחר את z, או גם עלי, גען D₅=-(z²-1)a+(z³-2z)b, D₃=-az+zb: a=qz, D₄=-za+(z-1)

לעומת זה, מתקיים בדקה ש- $D_m = \sum_{j=1}^m D_j$ ו- $\sum_{m=1}^{\infty} D_m = 0$. במקביל בדקה אחריה: אם $a = b$, אז $S_m(z) = \sum_{j=1}^m D_j = 0$.

ביעי תגר הילך לבוחר את ז, ו-א-ק גאטל טו=^תן. א-ר גראם אמר ז כדר עיד'ה בגת אחת
(ז) א-ר גראם אמר ז כדר עיד'ה בגת אחת

$$R_{\tau}^-(z) = 0, \quad S_{\tau}^+(z) = 0 \quad (\text{II})$$

אַפְלָר לִהְרֹאַל אַפְלָרָה (ב) מִכְיָאָה רַק לְעַתָּרָה גַּעֲלָה יְמָם • בְּגַעַל

המ לרב בלה קלי ז הצע רצויים או לויים . סמלים אליהם עירם יתברך לאן גראן .

לענין זה מילא ליטרתו הנטול מ- \bar{G}_m גבורה, לדין עלייה לאלה אל רתק.

שנה זאת הדרשו הנכון והבואר: $\sigma = T_B$, $\sigma = T_C$, $\tau = T_D$, $\tau = T_E$.

$$Q_m = \sum_{j=1}^m D_j = E_{m+1}$$

$$Q_m = \sum_{j=1}^{m-1} D_j = E_{m+1}$$

לפחות מ- $\frac{1}{m}$ (במקרה של $m = 1$, מ- $\frac{1}{2}$)

מתחוד כדר עלייבר עטה הטענה קהן ר' זלמן

卷之四

מבחן זה מושג על ידי ביצוע הנוסחה (E) ורואה אם $(z_{m+1} - z_m)^{m+1}$ מוגדר או לא.

卷之三

$$U_{\text{VI}} + U_{\text{V}} = U_{\text{IV}} + U_{\text{III}}$$

卷之三

$R_0 = 0$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$

סדרת גאנז גאנז מס' 3

$$T_{m+1}(z) = zT_m(z) - T_{m-1}(z)$$

卷之三

בגדים מודרניים לא נסימן אוניברסיטאות
אל-יד, המוסר אוניברסיטאות

וְתִתְהַנֵּן אֶת־מָרְדָּךְ :

$$R_m(z) = -\tau_m(z) \tau_m(z); \quad S_m(z) = \tau_m(z) \tau_m(z).$$

רְמֵן (z) = אַלְגָּז (z) + סְרִינְדֶּם (z) + מְרוֹתֶם (z) + רְהַבְּרָה (z) + הַמְּדוֹרָה (z)

לכז. מילק את הפלויים (ז) יט. אם מילק את הפלויים (ז) יט. מילק את הפלויים (ז) יט. מילק את הפלויים (ז) יט.

۲۰۱

ההו בבהה טען מושג 8 דיא טפוח בסדרות נסיגת רהננ' מסאייר ים

העיר. המספרים (ז) נ-ז, בסייל, את מפער,

לעומת זה, מתקיימת הטענה הבאה:

卷之三

רְמָאָה, לְ(אַ) וְלִמְגָדָה 8 גְּלֵכָה אַדְּבָה:

$$q_{m-1}(z) = z^{m-4}(z^2 + z^m - 1)$$

$$P_m = P_{m-1}(z) [-P_{m-4}(z)a_1 + P_{m-2}(z)b_1]$$

גַּתְּרָהָב, כֵּם, שָׁעָרִים גַּדְּלָה, סְבִּמְלָה אֶתְּנָאָה (ז)

אָמֵן בְּמִשְׁרַע אֶתְנָה
זֶה גַּכְתּוֹב זֶה
וְאַחֲרֵי כָּל־זֶה
זֶה רְגִזְעִים וְזֶה

מְסֻדָּר אֲוֹתָלִי בַּאֲרֵי יְהוּנָה -

הארץ, גראן צ'רט.

אַתְּ בָּנֵי יִשְׂרָאֵל אֲמֹתָה וְאֶתְבָּשָׁה

CHAPTER 6. **THE** **WORLD** **OF** **Y**, **X**, **Z** **AND** **Q** **GLCQL**.

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\mu(x)$$

וְעַמְקָדָן אֶת־הַלְּבָנָן

הנִּזְעָמָן אֶל-אַתְּ בְּמִזְבֵּחַ

רִיחַנְדָּה כְּלֵי מִרְגָּדָה עַל-יְדֵי הַמֶּסֶן אֲוֹת :

$$P_m = \tau_{m-1}(z) \left[-\tau_{m-4}(z)a_1 + \tau_{m-2}(z)b_1 \right]$$

תודה יכלה באה מארץ ישראל צורחת לארץ ישראל מגדרת

$$A_m(x,y) = p_{m-1}y + q_m x^m$$

הַדָּבָר :

$$\sum_{m=1}^{M-1} [A_m(x, y)]^k \cdot \sum_{m=1}^{M-1} [B_m(x, y)]^k \pmod{P_M(z) [-P_{M-3}(z) a + P_{M-1}(z) b]}$$

בשביל $(M-1, \dots, M)$

$$P_M(z) [-P_{M-3}(z) a + P_{M-1}(z) b] = 0$$

או $(x, y, z) \in \Delta_M$ ו- $B_m(x, y)$ מהוים פתרו שרמשר סל הביעיה, אם z הוא כורע של הגורם הפרימיטיבי סל $(z)^M$ אז הפתורו שרמשר הורא לא טרוייאלי. בכל מקרה אחר הפתורו שרמשר הורא טרוייאלי.

אם לגורם הפרימיטיבי סל $(z)^M$ יש סולס רצוי גלי, אז הפתורו הפרטורי הנזכר לעיל בוית פתרוביות מספריים סלמים. זה קורה שבביל $M=3, 4, 6$.

אם בכירנה השערה 1 אז איז לביעית טארוי-אסקוסט מתרינו ורמייריהם

ליגראדים מלבד אלה הנתוננים על ידי מספט זה.

דו גמה למקראה $P_{12}(z)$, $M-1=11$, $M=12$ הגורב המרימיסיבי a :

$$P_{-2}=-1, \quad P_{-1}=-1, \quad P_0=0, \quad P_1=1, \quad P_2=1, \quad P_3=1+\sqrt{3}, \quad P_4=\sqrt{3}, \quad P_5=2+\sqrt{3}, \quad P_6=2,$$

$$P_7=2+\sqrt{3}, \quad P_8=1+\sqrt{3}, \quad P_{10}=1, \quad P_{11}=1, \quad P_{12}=0, \dots$$

$$A_1=0 \quad A_2=\sqrt{3} \quad A_3=5+\sqrt{3} \quad A_4=5+5\sqrt{3} \quad A_5=12+5\sqrt{3} \quad A_6=12+8\sqrt{3}$$

$$B_1=2-\sqrt{3} \quad B_2=-1+\sqrt{3} \quad B_3=3+\sqrt{3} \quad B_4=6+3\sqrt{3} \quad B_5=3+6\sqrt{3} \quad B_6=14+6\sqrt{3}$$

$$A'_1=a+b'=\sqrt{3}-1, \quad b'=3 \quad A'_2=b+c'=\sqrt{3}-1, \quad c'=7 \quad A'_3=c+d'=\sqrt{3}-1, \quad d'=9 \quad A'_4=d+e'=\sqrt{3}-1, \quad e'=14+8\sqrt{3} \quad A'_5=e+f'=\sqrt{3}-1, \quad f'=14+7\sqrt{3} \quad A'_6=f+g'=\sqrt{3}-1, \quad g'=11+7\sqrt{3}$$

כזכורם. האלגוריתם למציאת כל הפתורוביות הטרטראות הליניאריים, ואולם

ראי בו טלא תמידה המקדמית הם רצוי בלוים. כנראה Δ_M יסודרים מרים טיבים ליבארים וק בבל מקרה ים לביעיה שטרו שרמשר, עלידי צירופ אלגבריות הומווגניות עם מקדמים רצוי רגליים סמללה שווה לזו של הגורם הפרימיטיבי סל $(z)^M$, זאת אומרת של הטעו ליזה המאמין $(z)^M$. העו בדעת הידועות איבן סטורות את התשעיה הזרקת. מענו זו היה לערוך תיאוריה של פתרוביות פרטיריים ממולות 2, 3 וברלי, דוגמת התיאוריה הכתבת כאז. יתכן כי הדבר ידרו שפוץ ברב-חבורות (מורלטי-גרומט, בלעז).

ברצונו, לנוכח את הטעורה הזרחת באפ"ן פורמלי:

השערה 2. לביעית טארוי-אסקוסט מסדר M ייכ שתרו שרמשר בצוות

של בוגרים הומווגניים בסוג, שרמשרים עם סקרמים ראייגליים, מעלה הטו
למעלה הגורם הפרימיטיבי סל $(z)^M$.

לORTH ה- $P_n(z)$ - z^{n+20} בשביל

הגורמים הפרימיטיביים מורטגמיים. (הגורם הפרימיטיבי של $P_M(z)$) .

השורליברים המאפקין ($Q_M(z)$) .

$$P_n(z) = z \cdot P_{n-2}(z) - P_{n-4}(z)$$

n	$P_n(z)$
-3	$-z - 1$
-2	-1
-1	-1
0	0
1	$\underline{1}$
2	$\underline{1}$
3	$\underline{\frac{z+1}{z}}$
4	$\underline{\frac{z}{z}}$
5	$\underline{\frac{z^2+z-1}{z}}$
6	$\underline{z^2-1} = (\underline{z-1})(\underline{z+1})$
7	$\underline{z^3+z^2-2z-1}$
8	$\underline{z^3-2z=z(\underline{z^2-2})}$
9	$\underline{z^4+z^3-3z^2-2z+1} = (\underline{z+1})(\underline{z^3-3z+1})$
10	$\underline{z^4-3z^2+1} = (\underline{z^2-z-1})(\underline{z^2+z-1})$
11	$\underline{z^5+z^4-4z^3-3z^2+3z+1}$
12	$\underline{z^5-4z^3+3z=z(z-1)(z+1)(\underline{z^2-3})}$
13	$\underline{z^6+z^5-5z^4-4z^3+6z^2+3z-1}$
14	$\underline{z^6-5z^4+6z^2-1} = (\underline{z^3-z^2-2z+1})(\underline{z^3+z^2-2z-1})$
15	$\underline{z^7+z^6-6z^5-5z^4+10z^3+6z^2-4z-1} = (\underline{z+1})(\underline{z^2+z-1})(\underline{z^4-z^3-4z^2+4z+1})$
16	$\underline{z^7-6z^5+10z^3-4z=z(z^2-2)(\underline{z^4-4z^2+2})}$
17	$\underline{z^8+z^7-7z^6-6z^5+15z^4+10z^3-10z^2-4z+1}$
18	$\underline{z^8-7z^6+15z^4-10z^2+1} = (\underline{z-1})(\underline{z+1})(\underline{z^3-3z-1})(\underline{z^3-3z+1})$
19	$\underline{z^9+z^8-8z^7-7z^6+21z^5+15z^4-20z^3-10z^2+5z+1}$
20	$\underline{z^9-3z^7+21z^5-20z^3+5z=z(z^2-z-1)(z^2+z-1)(\underline{z^4-5z^2+5})}$

THE MINIMAL TARRY-ESCOTT PROBLEM

(Summary)

Eri Jabotinsky

The main result is contained in Theorems 8 and 9, which may be summarized as follows:

Let $P_n(z)$ be polynomials in z defined by the recurrence relation: $P_{n+2}(z) = z \cdot P_n(z) - P_{n-2}(z)$, with the initial conditions: $P_0(z) = 0$, $P_1(z) = P_2(z) = 1$, $P_3(z) = z + 1$. If $n|m$, then $P_n(z)$ divides $P_m(z)$. $P_m(z)$ is the product of factors appearing in the $P_n(z)$ for which $n|m$ and of a new factor $Q_n(z)$, called the n -th characteristic polynomial of the Tarry-Escott problem.

Let a, b, x, y be four parameters. Then the following algebraic congruence holds: (I) $\sum_{m=1}^M [A_m(x, y; z)]^k \equiv \sum_{m=1}^M [B_m(x, y; z)]^k \pmod{P_M(z)}$, where $A_m(x, y; z) = P_m(z) \cdot x + Q_m(z) \cdot y$, $B_m(x, y; z) = P_m(z) \cdot x + Q_{m-1}(z) \cdot y$, with: $P_m(z) = P_{m-1}(z) [-P_{m-4}(z) \cdot a' + P_{m-2}(z) \cdot b']$, $Q_m(z) = P_{m-1}(z) [-P_{m-4}(z) \cdot a + P_{m-2}(z) \cdot b]$, and: $a' = (z+1)a - b$; $b' = a + b$. The above proposition is established after ^{proving} assuming the following Lemma contained in Theorem 7:

Lemma. Let M be given. Then, if there exist homogeneous linear forms $A_m(x, y)$ and $B_m(x, y)$ defined for $m=1, 2, \dots, M$ and for $m > M$ by the relations $A_{m+M}(x, y) = A_m(x, y)$ and $B_{m+M}(x, y) = B_m(x, y)$, such that: if, for arbitrary i and j , x and y are chosen to satisfy the equation $A_i(x, y) = A_j(x, y)$, then these same values of x and y satisfy the equations $A_{i+h}(x, y) = A_{j+h}(x, y)$ for any h , then these homogeneous linear forms satisfy the equation $\sum_{m=1}^M [A_m(x, y)]^k \equiv \sum_{m=1}^M [B_m(x, y)]^k$ for $k=0, 1, \dots, (M-1)$, provided $A_m(x, y) = Q_m x + Q_{m-1} y$ and $B_m(x, y) = P_m x + Q_{m-1} y$.

The main instrument used is the following quite general

Theorem 5. If $\sum_{m=1}^M [A_m(x, y)]^k = \sum_{m=1}^M [B_m(x, y)]^k$ for $k=0, 1, \dots, (M-1)$,

A_m, B_m being any polynomials in x, y and if x, y are so chosen that $A_i(x, y) = B_j(x, y)$, then all the A_m are equal to the B_m in some order. By choosing z to be the root of the characteristic polynomial $Q_M(z)$, equation (I) yields a non-trivial parametric solution in four parameters a, b, x, y of the minimal Tarry-Escott problem of the order $(M-1)$ in integers belonging to the ring of the roots of $Q_M(z)$ over that of the rational integers. An example for $M=12$ is given.

Two hypotheses are formulated. The first hypothesis asserts that the solutions obtained from our main theorem for values of z for which $Q_M(z)=0$, are the only linear parametric solutions of the problem. The second hypothesis asserts that for every m there exists a parametric solution where the $A_m(x, y)$ and $B_m(x, y)$ are polynomials of the degree of the polynomial $Q_M(z)$.

הערות למאמרי "משפט Wolstenholme רהבלרתר"

בחו אלירוסן (קובקר)

1. במאמר "משפט Wolstenholme ורביעי להילן על-ידי W."

סחו פיער ב"רביעי למתמטיקה" כרך 4 עט' 9-14 כמיון מספר, כדי להוכיח משפטים שבנושאים הטעוי לא הותעו טרורים אלה.

חר-על-כו היתר נאלץ לנצל מיטתם עטוק במשפט Clausen-Staudt מספר רב של טעמים. במאמר זה אראת כיצד להגייע לאותו תוצאות כמו ב-W בלי טרור

במספר, Bernoulli.

2. כ-W השטמתה, במספר, רק ב>Show מייחסים וहם 10 §§6, 10.

. $T_k(p^e) = 0 \pmod{p^e}$ אם $k \equiv 1 \pmod{p-1}$ ו- $T_k(p^e) = p^e$ אם $k \equiv 0 \pmod{p-1}$

. $T_k(p^e) = \varphi(p^e) \pmod{p^e}$ אם $k \equiv 1 \pmod{p-1}$
ב) אם $k \equiv 0 \pmod{p-1}$ $\sum_{t=1}^k T_k(m)$

כאו מסנו $(m \equiv k \pmod{p})$ יזדים לוי.

הרכחה. א) הוכחה ב-Show, W, בלי קיטוע במספר, Bernoulli, הוכחה להוכיח k .

ב) נחלק את ההוכחה לכמה טקדים, בהתאם להוכיח k .

. $t^{k-1} \pmod{p^e}$ המופיע ברור כי $a \equiv t^k \pmod{p^e}$ אם $k \mid e$ ($\varphi(p^e) \mid k$)

וניה אפרוא כ- $\Delta(\varphi(p^e))^k$.

אחר ש- $\varphi(p^e) \equiv k \pmod{\varphi(p^e)}$ ($T_k(p^e) = T_k$, $(p^e) \pmod{p^e}$)

בליל הגבלה הכלכלית, כי $\Delta(\varphi(p^e))^k \equiv 1 \pmod{p^e}$ בכתוב אמור $\Delta(\varphi(p^e))^{k-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$, ו- $\Delta(\varphi(p^e))^k \equiv 1 \pmod{p^e}$.

במקרה עתיה את פתרונו הוכיחו אנצ'יה:

$x^{k-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$. (1)

הינו שרש פרימיטיבי p^e mod. הפתורנו ייל (1) המכון ב- $\Delta(\varphi(p^e))^{k-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$ ו- $\Delta(\varphi(p^e))^k \equiv 1 \pmod{p^e}$.

נקבל כי $a^k \equiv 1 \pmod{p^e}$ פותח את (1) ו- $a^k \equiv 1 \pmod{p^e}$, מכיוון $a \equiv t^k \pmod{p^e}$.

(1) חום:

$$\Delta = \{1, g^r, g^{2r}, \dots\}$$

ובכך כי $s \equiv r \pmod{p^e-1-s}$ ואנו, נסנו $R = p^{e-1-s} \cdot R$ אחד:

$g^{kr-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$, ועל כן $g^R \equiv 1 \pmod{p^e}$.

בקביעת Δ , $r \mid p^{e-1-s}$. מאכו $r \mid p^{e-1-s} - 1$, $r \mid R - 1$.

$kr \equiv 0 \pmod{\varphi(p^e)}$ ו- $g^{kr-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$ ו- $g^{kr-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$ ו- $g^{kr-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$.

ב- Δ -הכל רואים כי:

(2) $\Delta = \{1, g^r, g^{2r}, \dots, g^{(n-1)r}\}$... $n = p^s$... $(n-1-c)$

הערית למאמר "וְהַלְלוֹתִים" מעתן וולסטנהולם

משמע-עד. מספר החריגות של $s_k^{(e-1)}$ היא $t^{k-1} \mid k$ בתנאי $s - k - e - 1$.

>If χ היזקה האבויה בירטור של φ המחלקה α ובתנאי $\varphi(s) = s$.
בזרור להוכיח את החלק ב' ליל המשפט ב- §3.

יבHi אחד המחו ברים בסכרים המגדיר את $T_k(p^e)$ ריבול $t^k \mod p^e$ ריבול $t^k \mod p^e$ ריבול $t^k \mod p^e$ בסכום $\sum t^k$ בדיעוק $(s-1)^s$ פעמים. נכו:

$$T_k(p^e) = p^s \left(\sum_{j=0}^{r-1} t^k \mod p^e \right)$$

כאשר $\sum s_{s+1} \alpha$ הסכום על כל $h-t$ כרך $\sum t^k$ סכום למלקות צבירוות $s \geq r$ רוחן מאפרט לchrom:

$$T_k(p^e) = p^s \left(\sum_{j=0}^{r-1} (g^j)^k \mod p^e \right) \quad (3)$$

וניה לרצין כי $\sum s_{s+1} g^{e-1}$ קלומר $s_{s+1} g^{e-1}$. נא $p^s \mod p^{s+1}$ $g^k \equiv 1 \mod p^{s+1}$ וועל כן $g^k \equiv 1 \mod p^s$

ונקבל $(\lambda - \lambda - \lambda \dots \lambda) \sum s_{s+1} g^{e-s}$ מה רצינו להוכיח.

$$T_k(p^e) = p^s (1 - p^{e-s-1})^{k-1} = p^{e-1} (\varphi(p) - \varphi(p^e)) \mod p^e$$

6. גלאר המקרה $\sum s_{s+1} g^{e-1} = 0$ כתוב:

או גם $(\lambda - \lambda - \lambda \dots \lambda) \sum s_{s+1} g^{e-1} = 0$ כתוב ב- §5 בו בזע כי:

$$T_k(p^e) = \varphi(p^e) \mod p^e$$

או גם $\{t_1, \dots, t_{\varphi(p)}\} = \{\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_{\varphi(p)}}\} \mod p^e$ ריבול:

$$T_k(p) = \sum_{t \in \mathbb{F}_{p^k}} \frac{1}{t} = \sum_{t \in \mathbb{F}_p} \frac{1}{t} = \sum_{t \in \mathbb{F}_p} t^k = T_k(p)$$

ובזה הוכיח המבנה במלמו.

7. ב- §9 הוכיח, בלי גמוץ במספרי Bernoulli כי:

$$T_k(m) = p^e T_k(m_1) (1 - p^{k-1}) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} m_1 j T_{k-j}(m_1) T_j(p^e) \dots \quad (4)$$

כאלה $m = m_1 p^e$ בתנאי $m \neq m_1 p^e$.

אם $e \leq k$ הוכיח הגרורה בירטור סיל ס המלקה את m אזי:
. $T_k(m) = 0 \mod p^e$ היה $p-1/k$ אם $e > k$

הרחה. על-סידר בקייל הימפה ב- §3 כי:

$$T_k(m) = \varphi(p^e) \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} m_1 j T_{k-j}(m_1) \mod p^e \dots \quad (5)$$

מהר $m = \varphi(p^e) m_1$ על-ידי, $e-1 \mid k$ אם אדר ב- (5) ריק $\mod p$.

לכן: $\sum_{k=1}^n t_k^{m_1} \equiv \sum_{k=1}^n t_k^{m_2} \pmod{p-1}$

לכל גזע, נסיעה, $m_1 = 1, \dots, m_1$, גזע
כך (x) $\phi(p^e)3(\sigma, k) \text{ mod } p^e$, $p-1 \neq k \text{ mod } x$

אוצר נ- 38, היל: 38, ב' לוח א' (9) אוצר נ- 38, היל: 38, ב' לוח א' (9).

卷之三

במונט אליר ע- 388, ה'ג: א- 0= (x, c) \phi \mod p^e

ת. קבלנו את $\varphi(r^e)(\theta(m)) = \varphi(r^e m^{-1}(\theta))$

כ- (9) רצקניא: גַּדְעֹן (w) \phi(m) mod \phi(p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k})

כ, כב הצעה.

REMARKS ON MY PAPER "EXTENSIONS OF WOLSTENHOLME'S THEOREM."

THEORY OF TIME-DEPENDENT (Summary)

Nathan Eljoseph (Summary)

paper which has a

The above-named paper which has appeared in this Review, vol. 4, pp. 9-14, I made extensive use of the properties of the numbers of Bernoulli. In this paper I show how to prove all the theorems of that paper only with use of the concept of primitive root mod n .

METHOD OF PROOF. If $k = (p-1)^s u$ where $0 \leq s < e-1$, I prove that all the solutions of the congruence $x^k \equiv 1 \pmod{p^e}$ are $\{1, g^r, \dots, g^{(n-1)r}\}$ where g is a primitive root mod p^e , $r = p^e - 1 - s$ and $n = p^s(p-1)$. Hence if $\pi_k(p^e) = \sum t_k$ where t_k is smaller than and coprime to p^e then $T_k(p^e) \equiv p^s(p-1) \sum t_k$, the sum for all the t_k belonging to different residue classes.

$T_k(p^e) \equiv p^s(p-1) \sum_{j=0}^{r-1} (g^j)^k \pmod{p^e}$. It is easily seen that the sum is congruent to $p^{e-1-s} \pmod{p^{s+1}}$ when $s > \frac{e-1}{2}$. If $s < \frac{e-1}{2}$ put $k' = \phi(p^e) - k$ and $T_k(p^e) \equiv T_{k'}(p^e) \pmod{p^e}$.

הרכזה ודרגמותו לכך שמשר את הגדול של שרמה

בתבנת לתרורו בקורס גירבאים שלמים

אברהם בירמן

לקיים רגניות אסוציאטיביות קדומות, בלו מר
וכו, הגם מספרים רציבובליים שלמים. הקורשנירגים
 $q_2 = a - a_1 j_1 - a_2 j_2 + a_3 j_3$ נקרא "צמוד" ל- j_1 .

בו כיה להלן כי לאובי כל כי, סכום החזקיות ה-ק-ירות של שני קושרנירגים
צמודים ומספרם הבנו מספר רציבובלי סלים, ובמו-כון גראה כי בתנאים מסוימים
יבול סכום זה להירות הוו עצמו חזקה ס-ית, וכן תתקיים במו-כון ירוע משוכאותו
המשמעות של פרמה (Fermat) : $a^p = a_2^p + a_1^p$, בעידן מספר רציבובלי שלם.

בעין באות S את החלק ה"על-דמירני" של הקורשנירגן, בלו מר את

$$q_2 = a_1 + s; \quad q_1 = a_2 + j_1.$$

בזכר-גען כי בצד זה שיריה וקימה מערבה כל חוקי האלגברת הראללה,
פרש לאחד : החוק הקומוטטיבי של המכפל קים אמגו בינו המקרים ובסינו האלמנטים
 j_1, j_2, j_3 ובסובנו גם בינו המקרים לביוז עצם, אך כדי ליתקיים בין האלמנטים
דרוג ל ה פו ר את הסימן : $1 j_2 j_3 = 2 j_1 j_2$ לפיכך נקל לראות כי :

$$s \text{ קלימר מספר רציבובלי סלים ומילילי.}$$

אל היות והחוק הקומוטטיבי, קים בינו המקרים, רסאים אנו לפתח את
הבטוי $\dots a^{p-1} s + a_0^p a_1^p + \dots + a_1^p a_0^p$ ברד הביבו מית הראללה. והוא הדיבר
ג'ב, ולטיכד, בחברדו את הסכום $a_1^p + a_2^p + a_3^p$, ותבשלהה כל החזקות האיזוגויות של
הרו אומר, תקובל מספר רציבובלי סלים. הבה גראה אם ומתי, יכו למספר זה
להיות חזקה ק-ית לילמה.

لتבלית זו נבחר תחילת את המקדים בראפטו י:

$$3a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (1)$$

שחייא מסואת דירפובלית הבנתה לפרטו. במרקחה זה מקבל :

$$q_1^p + q_2^p = a_3^p. [(j_3)^p + (1-j_3)^p] \quad (2)$$

על-שם מלשו הידוע סל דה-טואבר : $(\cos \Delta + i \sin \Delta)^p = \cos(p\Delta) + i \sin(p\Delta)$

$$q_1^p + q_2^p = (2a_0)^{-2} \cos \frac{p\pi}{3} \quad (3)$$

אם ק הוו מספר אי-זוגי סאיובי מחריק ב-3 (אקו איזו א זרייד
להיות ראלובי דוקא), אז $\cos \frac{p\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ולכן :

$$q_1^p + q_2^p = (2a_0)^p \quad (4)$$

צעיג, למיל, יאו א זריה ביזה י-ה י-ד י-ת בדרה

$$(1+j_1+j_2+j_3)^p + (1-j_1-j_2-j_3)^p = 2^p \quad (5)$$

卷之三

רְגָדָלָה: $a_0 = 11$; $a_1 = 17$; $a_2 = 7$; $a_3 = 5$, לְמַשְׁנָה, גַּעֲזָה, וְאֶלְעָזָר.

תהי ה המלך המבורק

$$(11+17j_1+7j_2+5j_3)z + (11-17j_1-7j_2-5j_3)y = 22. \quad (6)$$

שם, האמנויות מודרניות. ייחודה. ראמם קידם
אלאן אדר זר נבר כהן!

רלא שוד אליא טבטב, 3= \bar{c} , למסיל, הוכח
(Hardy-Wright, Theory of Numbers, Ch. XII, p. 192)

התרזאות דלעיל בצדקה סאייה מקריה טלית ב-3, סאייה מתקנת בחתום (הסלים) (ו.) ו. מאידך אפסר לבסת אה

•K (א) בתקופת ג' רודוס לארתור גראן ג'ונס נחלה נזק

בקו שרגו גיבים צמיגים מושגים נכון ב:

המקדים סם ילה נ מסגר רצין רגליים (לאו-דו-קואסilm), ובעסיה לקבוט את ערבי-

卷之三

אחוּרִי בְּשָׁר לְהַלְלוֹת הָאֵי - זֶה גִּירָת בְּגָבְלֵי: 2-6K=d³ וְלֹכֶל K= $\frac{2-d}{6}$ (9)

מתרב אפריאן, ק, כו ללה ירთ ר'ק מספר רצ'ירבל סמכנהו 9. בכתובה • K=g/6

לארם ורתק אמר ליה כי נס בטל הצעיר רה: $t(8N-1)$

$$(1+3j_1+j_2+j_2)^3 + (1-3j_1-j_2-j_2)^3 = (-4)^3$$

בגסה עתה למצוות באילו תנאים מחייבים סכום סתת, מכך ניתן תקון

סיל קשור בפונקציית זמירות להרבה מקרים:

כטראת רבו עמלאי, ובזבר כטראת רבו עמלאי, סקר ימי גנטה חיבת להיזבר כטראת רבו עמלאי, ובקבלי: $D = 2d$. $128 \pm 8d = v_1^2$. $4^4 \pm D^4 = v_1^2$.

א' פתרו בות למס' אחד זו אליאם כ-1 K=3 D=4; d=2 כלו מר

הראת הדריך נישב, ותקדמת אברחות ריתר.

PROOF AND EXAMPLES THAT THE EQUATION OF FERMAT'S LAST THEOREM
IS SOLVABLE IN INTEGRAL QUATERNIONS

Abraham Birman

(Summary)

First it is proved that the sum of the p^{th} powers of two quaternion conjugates is a real number.

If q_1 and q_2 are quaternion conjugates with rational integral coefficients:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3; & q_2 &= a_0 - a_1 j_1 - a_2 j_2 - a_3 j_3 \\ \text{and if we choose the coefficients so as to satisfy the (solvable) Diophantine equation: } \\ 3a_0^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \text{ we have: } q_1^p + q_2^p = a_0^p [(1+i\sqrt{3})^p + (1-i\sqrt{3})^p] = (2a_0)^p \cdot 2 \cos \frac{\pi p}{3}. \\ \text{If } p \text{ is an odd rational integer not divisible by 3 (but not necessarily a prime), } \cos \frac{\pi p}{3} \text{ will be equal to } \frac{1}{2}, \text{ so that:} \\ q_1 + q_2 &= (2a_0)^p \end{aligned}$$

If we set, for example, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$, we shall obtain a relation between UNITIES of the field:

$$(1+j_1+j_2+j_3)^p + (1-j_1-j_2-j_3)^p = 2^p$$

Setting $a_0 = 11$, $a_1 = 17$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, we obtain a definitely non-trivial result:

$$(11+17j_1+7j_2+5j_3)^p + (11-17j_1-7j_2-5j_3)^p = 22^p$$

If p is divisible by 3, these results are no longer correct. But it is possible to find other solutions for the case $p=3$. In fact,

$$k \cdot a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (\text{solvabile for certain values of } k)$$

we find that our basic equation is solvable, in cubes, for such values of k as 11, 85, etc.

For $k=11$, $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=1$, $a_3=1$, we have:

$$(1+3j_1+j_2+j_3)^3 + (1-3j_1-j_2-j_3)^3 = (-4)^3$$

For biquadrates it is proved that the only solution in integral quaternion conjugates is $k=3$, which has already been discussed. It is conjectured that the same result holds for higher powers. Therefore the number of solutions is rather limited.

מציאות אינטגרת מספרים שקיימים $n \pmod{2^{n-1}-1}$

רב ירדן

ברדי סה בשם

Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres $(2^n-2)/n$
par W. Sierpiński (Colloquium Mathematicum I (1947), p. 9).
מצ'אותם של מתק'מת הקוינגריאנטיה של פרמה: $n \pmod{2^{n-1}-1}$

ונב'א את הדברים בהרצעתו של שפטיבנסקי, בתרגום:
הממשיכאים המשינויים חשבו כי המספר $(2^n-2)/n$ איבר יכול להיות עליל נאלר ה הוא מספר פריק. 2000
מר בע"ז, 3, 1) מצא ב-1909 חלה מספרים שביעיים $n \pmod{2^{n-2}}$

סחהערה הסינית איבריה לוביאט n^2). קסן המספרים האלה הוו $n=31=11\cdot 3$.

אקבען כאו את מציאותם של $n=307$ מספרים פריקים $n \pmod{2^{n-2}}$

לטט כר, הוואיל וקימס (*)

מספר טרייך אי-זווגי אחד $n \pmod{2^{n-2}/n}$ מספר סבביליו $n \pmod{2^n}$, והוא מספר תלם,

די להובייח כי, לביל n סיבי לוי התכובגה (*), קים מספר k גדוול מ- n סיבי לוי גם כן אורתה תכובגה. ואמנם, די להובייח:

$$k=2^{n-1}.$$

רבאמת, היה ב מהlik של $n=1$. אין ס' לנו קדים-ככל

שהוא אפוא k , כי 2^{n-1} ורואים בלו. קשיי כ- $2^{n-1}=2^{2^{n-2}-1}$ מתק' הדדרה א'-זואג'. לבסוק, בהירות n א'-זואג'י. לבפי החדחה, $(2^{n-2})/n$ בועל זוגי, וჟעוי $n=2^{n-1}-1$ ה הוא כחuzioneה מכון מספר שלם; והוא אל

$2^{k-1}-1=2^{k-1}-1=(2^n)^{2^m}-1$, ומכאז $2^{k-1}=2^{2^{m-1}}$, $2^{k-1}=2^{2(2^{m-1}-1)}=2^{2mn}=(2^n)^{2^m}$
 $(2^k-2)/k$, כלוור מאליו כי המספר $-2^{k-1}=2^{n-1}=k$ מתק' ב- n וברור מאליו כי המספר דהוא מספר שלם. ובעכו, לא סבנה התכובגה (**), מה שהייתה להובייח. "

עד כאו רבר, שפטיבנסקי.

"1) T. Banachiewicz, Comptes rendus de la Soc. des Sc. et de Lettres de Varsovie, Classe III, Année 2 (1909), p. 9."

"2) המרכיב למדת מחרך מכתב בא-מרקורי של מר בע"ז, 2, ס' ים;

בדיווק שבעה (אלא טהור לא מעזאת הצליש, ואת הרבייעי כי-אם בומן מאחר יותר), ים:

341=11.31, 561=3.11.17, 645=3.5.43, 1105=5.13.17, 1387=19.73,
1729=7.13.19, 1905=3.5.127, "

סתיי התחנכו בדור היפני שיטות מדע ומספרים - פער מוחה פלט $F_m = 2^{2^m} + 1$, הבאה ת:

(T) $u \neq u$ \Rightarrow $\exists x \forall y (y = x \rightarrow y = u)$

$\theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n$ are even mod n (2)

卷之三

$$2^{2^m} - 1 = (2^{2^m-1} - 1)(2^{2^m-1} + 1)$$

$$-1 = (2^{\frac{m}{2}} - 1) (2^{\frac{m}{2}} + 1)$$

$$-1 = \binom{2^2}{2^2} - 1 \left(\binom{2^2}{2^2} + 1 \right)$$

$$2^{2^m+1}-1 = (2^{2^m}-1)(2^{2^m}+1)$$

וְקַבֵּל בְּגָרְמִים הַמְסֻרָתָה יְמִינָם בְּקַבֵּל:

$$+1)(2^{2^m}-1) \dots (2^{2^{m+1}}+1)(2^{2^m}+1)(2^{2^m}-1) \quad (3)$$

באלר סולו טה הצעה רשות מושב אסלאם (ט' 1)

לעומם הרכבת (2) עכ' וְאֶלְעָנָן וְמִשְׁבְּרֵי יַהֲרֹגָה וְמִשְׁבְּרֵי
רַאשֵּׂן כְּפָרָה וְמִשְׁבְּרֵי מִזְרָחָם וְמִשְׁבְּרֵי
מִזְרָחָם וְמִשְׁבְּרֵי מִזְרָחָם וְמִשְׁבְּרֵי מִזְרָחָם

ל- (d mod p) = 2, 2⁴=2 (mod p), 2⁸=2 (mod p), 2¹⁶=2 (mod p), 2³²=2 (mod p), 2⁶⁴=2 (mod p), 2¹²⁸=2 (mod p), 2²⁵⁶=2 (mod p), 2⁵¹²=2 (mod p), 2¹⁰²⁴=2 (mod p), 2²⁰⁴⁸=2 (mod p), 2⁴⁰⁹⁶=2 (mod p), 2⁸¹⁹²=2 (mod p), 2¹⁶³⁸⁴=2 (mod p), 2³²⁷⁶⁸=2 (mod p), 2⁶⁵⁵³⁶=2 (mod p), 2¹³¹⁰⁷²=2 (mod p), 2²⁶²¹⁴⁴=2 (mod p), 2⁵²⁴²⁸⁸=2 (mod p), 2¹⁰⁴⁸⁵⁷⁶=2 (mod p), 2²⁰⁹⁷¹⁵²=2 (mod p), 2⁴¹⁹⁴³⁰⁴=2 (mod p), 2⁸³⁸⁸⁶⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁶⁷⁷⁷²¹⁶=2 (mod p), 2³³⁵⁵⁴⁴³²=2 (mod p), 2⁶⁷¹⁰⁸⁸⁶⁴=2 (mod p), 2¹³⁴²¹⁷⁷²⁸=2 (mod p), 2²⁶⁸⁴³⁵⁴⁵⁶=2 (mod p), 2⁵³⁶⁸⁷⁰⁹¹²=2 (mod p), 2¹⁰⁷³⁷⁴¹⁸²⁴=2 (mod p), 2²¹⁴⁷⁴⁸³⁶⁴⁸=2 (mod p), 2⁴²⁹⁴⁹⁶⁷²⁹⁶=2 (mod p), 2⁸⁵⁸⁹⁹³⁴⁵⁹²=2 (mod p), 2¹⁷¹⁷⁹⁸⁶⁹¹⁸⁴=2 (mod p), 2³⁴³⁵⁹⁷³⁸³⁶⁸=2 (mod p), 2⁶⁸⁷¹⁹⁴⁷⁶⁷³⁶=2 (mod p), 2¹³⁷⁴³⁸⁹⁵³⁴⁷²=2 (mod p), 2²⁷⁴⁸⁷⁷⁹⁰⁶⁹⁴⁴=2 (mod p), 2⁵⁴⁹⁷⁵⁵⁸¹³⁸⁸⁸=2 (mod p), 2¹⁰⁹⁹⁵¹¹⁶²⁷⁷⁷⁶=2 (mod p), 2²¹⁹⁹⁰²³²⁵⁵⁵⁵²=2 (mod p), 2⁴³⁹⁸⁰⁴⁶⁵¹¹¹⁰⁴=2 (mod p), 2⁸⁷⁹⁶⁰⁹³⁰²²²⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁷⁵⁹²¹⁸⁶⁰⁴⁴⁴¹⁶=2 (mod p), 2³⁵¹⁸⁴³⁷²⁰⁸⁸⁸³²=2 (mod p), 2⁷⁰³⁶⁸⁷⁴⁴¹⁷⁷⁶⁶⁴=2 (mod p), 2¹⁴⁰⁷³⁷⁴⁸⁸³⁵⁵³²⁸=2 (mod p), 2²⁸¹⁴⁷⁴⁹⁷⁶⁷¹⁰⁶⁵⁶=2 (mod p), 2⁵⁶²⁹⁴⁹⁹⁵³⁴²¹³¹²=2 (mod p), 2¹¹²⁵⁸⁹⁹⁹⁰⁶⁸⁴²⁶²⁴=2 (mod p), 2²²⁵¹⁷⁹⁹⁸¹³⁶⁸⁵²⁴⁸=2 (mod p), 2⁴⁵⁰³⁵⁹⁹⁶²⁷³⁷⁰⁴⁹⁶=2 (mod p), 2⁹⁰⁰⁷¹⁹⁹²⁵⁴⁷⁴⁰⁹⁹²=2 (mod p), 2¹⁸⁰¹⁴³⁹⁸⁵⁰⁹⁴⁸¹⁹⁸⁴=2 (mod p), 2³⁶⁰²⁸⁷⁹⁷⁰¹⁸⁹⁶³⁹⁶⁸=2 (mod p), 2⁷²⁰⁵⁷⁵⁹⁴⁰³⁷⁹²⁷⁹³⁶=2 (mod p), 2¹⁴⁴¹¹⁵¹⁸⁸⁰⁷⁵⁸⁵⁵⁸⁷²=2 (mod p), 2²⁸⁸²³⁰³⁷⁶¹⁵¹⁷¹¹⁷⁴⁴=2 (mod p), 2⁵⁷⁶⁴⁶⁰⁷⁵²³⁰³⁴²³⁴⁸⁸=2 (mod p), 2¹¹⁵²⁹²¹⁵⁰⁴⁶⁰⁶⁸⁴⁶⁹⁷⁶=2 (mod p), 2²³⁰⁵⁸⁴³⁰⁰⁹²¹³⁶⁹³⁹⁵²=2 (mod p), 2⁴⁶¹¹⁶⁸⁶⁰¹⁸⁴²⁷³⁸⁷⁹⁰⁴=2 (mod p), 2⁹²²³³⁷²⁰³⁶⁸⁵⁴⁷⁷⁵⁸⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁸⁴⁴⁶⁷⁴⁰⁶⁷³⁷⁰⁹⁵⁵¹⁶¹⁶=2 (mod p), 2³⁶⁸⁹³⁴⁸¹³⁴⁷⁴¹⁹¹⁰³²³²=2 (mod p), 2⁷³⁷⁸⁶⁹⁶²⁶⁹⁴⁸³⁸²⁰⁶⁴⁶⁴=2 (mod p), 2¹⁴⁷⁵⁷³⁹²⁵³⁸⁹⁶⁷⁶⁴¹²⁹²⁸=2 (mod p), 2²⁹⁵¹⁴⁷⁸⁵⁰⁷⁷⁹³⁵²⁸²⁵⁸⁵⁶=2 (mod p), 2⁵⁹⁰²⁹⁵⁷⁰¹⁵⁵⁸⁷⁰⁵⁶⁵¹⁷¹²=2 (mod p), 2¹¹⁸⁰⁵⁹¹⁴⁰³¹¹⁷⁴¹¹³⁰³⁴²⁴=2 (mod p), 2²³⁶¹¹⁸²⁸⁰⁶²³⁴⁸²²⁶⁰⁶⁸⁴⁸=2 (mod p), 2⁴⁷²²³⁶⁵⁶¹²⁴⁶⁹⁶⁴⁵²¹³⁶⁹⁶=2 (mod p), 2⁹⁴⁴⁴⁷³¹²²⁴⁹³⁹²⁹⁰⁴²⁷³⁹²=2 (mod p), 2¹⁸⁸⁸⁹⁴⁶²⁴⁴⁹⁸⁷⁸⁵⁸⁰⁸⁵⁴⁷⁸⁴=2 (mod p), 2³⁷⁷⁷⁸⁹²⁴⁸⁹⁹⁷⁵⁷¹⁶¹⁶⁵⁹⁵⁶⁸=2 (mod p), 2⁷⁵⁵⁵⁷⁸⁴⁹⁷⁹⁹⁵¹⁴³²³²¹⁹¹³⁶=2 (mod p), 2¹⁵¹¹¹⁵⁶⁹⁹⁵⁹⁸⁵²⁶⁶⁴⁶⁴³⁸²⁷²=2 (mod p), 2³⁰²²³¹³⁹⁹¹⁹⁷⁰⁵³²⁹²⁸⁷⁶⁵⁴⁴=2 (mod p), 2⁶⁰⁴⁴⁶²⁷⁹⁸³⁹⁴¹⁰⁶⁵⁸⁵⁷⁵³⁰⁸⁸=2 (mod p), 2¹²⁰⁸⁹²⁵⁵⁹⁶⁷⁸⁸²¹³¹⁷¹⁵⁰⁶¹⁷⁶=2 (mod p), 2²⁴¹⁷⁸⁵¹¹⁹³⁵⁷⁶⁴²⁶³⁴³⁰¹²³⁵²=2 (mod p), 2⁴⁸³⁵⁷⁰²³⁸⁷¹⁵²⁸⁵²⁶⁸⁶⁰²⁴⁷⁰⁴=2 (mod p), 2⁹⁶⁷¹⁴⁰⁴⁷⁷⁴³⁰⁵⁷⁰⁵³⁷²⁰⁴⁹⁴⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁹³⁴²⁸⁰⁹⁵⁴⁸⁶¹¹⁴¹⁰⁷⁴⁴⁰⁹⁸⁸¹⁶=2 (mod p), 2³⁸⁶⁸⁵⁶¹⁹⁰⁹⁷²²²⁸²¹⁴⁸⁸¹⁹⁷⁶³²=2 (mod p), 2⁷⁷³⁷¹²³⁸¹⁹⁴⁴⁴⁵⁶⁴²⁹⁷⁶³⁹⁵²⁶⁴=2 (mod p), 2¹⁵⁴⁷⁴²⁴⁷⁶³⁸⁸⁸⁹¹²⁸⁵⁹⁵²⁷⁹⁰⁵²⁸=2 (mod p), 2³⁰⁹⁴⁸⁴⁹⁵²⁷⁷⁷⁷⁸²⁵⁷¹⁹⁰⁵⁵⁸¹⁰⁵⁶=2 (mod p), 2⁶¹⁸⁹⁶⁹⁹⁰⁵⁵⁵⁵⁵⁶⁵¹⁴³⁸¹¹¹⁶²¹¹²=2 (mod p), 2¹²³⁷⁹³⁹⁸¹¹¹¹¹¹³⁰²⁸⁷⁶²²³²⁴²²⁴=2 (mod p), 2²⁴⁷⁵⁸⁷⁹⁶²²²²²²⁶⁰⁵⁷⁵²⁴⁴⁶⁴⁸⁴⁴⁸=2 (mod p), 2⁴⁹⁵¹⁷⁵⁹²⁴⁴⁴⁴⁴⁵²¹¹⁵⁰⁴⁸⁹²⁹⁶⁸⁹⁶=2 (mod p), 2⁹⁹⁰³⁵¹⁸⁴⁸⁸⁸⁸⁹⁰⁴²³⁰⁰⁹⁷⁸⁵⁹³⁷⁹²=2 (mod p), 2¹⁹⁸⁰⁷⁰³⁶⁹⁷⁷⁷⁷⁸⁰⁸⁴⁶⁰¹⁹⁵⁷¹⁸⁷⁹⁸⁴=2 (mod p), 2³⁹⁶¹⁴⁰⁷³⁹⁵⁵⁵⁵⁶¹⁶⁹²⁰³⁹¹⁴³⁷⁵⁹⁶⁸=2 (mod p), 2⁷⁹²²⁸¹⁴⁷⁹¹¹¹¹²³³⁸⁴⁰⁷⁸²⁸⁷⁵¹⁹³⁶=2 (mod p), 2¹⁵⁸⁴⁵⁶²⁹⁵⁸²²²⁴⁶⁶⁷⁶⁸¹⁵⁶⁵⁷⁰⁰³⁸⁷²=2 (mod p), 2³¹⁶⁹¹²⁵⁹¹⁶⁴⁴⁴⁹³³⁵³⁶³¹³¹⁴⁰⁰⁷⁷⁴⁴=2 (mod p), 2⁶³³⁸²⁵¹⁸³²⁸⁸⁹⁸⁶⁷⁰⁷²⁶²⁶²⁸⁰⁰¹⁵⁸⁸=2 (mod p), 2¹²⁶⁷⁶⁵⁰³⁶⁶⁵⁷⁷⁹⁷³⁴¹⁴⁵²⁵²⁵⁶⁰⁰³¹⁷⁶=2 (mod p), 2²⁵³⁵³⁰⁰⁷³³¹⁵⁵⁹⁴⁶⁸²⁹⁰⁵⁰⁵¹²⁰⁰⁶³⁵²=2 (mod p), 2⁵⁰⁷⁰⁶⁰¹⁴⁶⁶³¹¹⁸⁹³⁶⁵⁸¹⁰¹⁰²⁴⁰¹²⁷⁰⁴=2 (mod p), 2¹⁰¹⁴¹²⁰²⁹³²⁶²³⁷⁸⁷³¹⁶²⁰²⁰⁴⁸⁰²⁵⁴⁰⁸=2 (mod p), 2²⁰²⁸²⁴⁰⁵⁸⁶⁵²⁴⁷⁵⁷⁴⁶³²⁴⁰⁴⁰⁹⁶⁰⁵⁰⁸¹⁶=2 (mod p), 2⁴⁰⁵⁶⁴⁸¹¹⁷³⁰⁴⁹⁵¹⁴⁹²⁶⁴⁸⁰⁸¹⁹²¹⁰¹⁶³²=2 (mod p), 2⁸¹¹²⁹⁶²³⁴⁶⁰⁹⁸⁵²⁹⁸⁵²⁹⁶¹⁶³⁸⁴²⁰³²⁶⁴=2 (mod p), 2¹⁶²²⁵⁹²⁴⁶⁹²¹⁹⁷⁰⁵⁹⁷⁰⁵⁹²³²⁷⁶⁸⁴⁰⁶⁵²⁸=2 (mod p), 2³²⁴⁵¹⁸⁴⁹³⁸⁴³⁹⁴¹¹⁹⁴¹¹⁸⁴⁶⁵⁵³⁶⁸¹³⁰⁵⁶=2 (mod p), 2⁶⁴⁹⁰³⁶⁹⁸⁷⁶⁸⁷⁸⁸²³⁸⁸²³⁶⁹³¹⁰⁷³⁶²⁶¹¹²=2 (mod p), 2¹²⁹⁸⁰⁷³⁹⁷⁵³⁷⁵⁷⁶⁴⁷⁷⁶⁴⁷³⁸⁶²¹⁴⁷²⁵²²²⁴=2 (mod p), 2²⁵⁹⁶¹⁴⁷⁹⁵⁰⁷⁵¹⁵²⁹⁵⁵²⁹⁴⁷⁷²⁴²⁹⁴⁵⁰⁴⁴⁴⁸=2 (mod p), 2⁵¹⁹²²⁹⁵⁹⁰¹⁵⁰³⁰⁵⁹¹⁰⁵⁸⁹⁵⁴⁴⁸⁵⁸⁹⁰⁰⁸⁸⁹⁶=2 (mod p), 2¹⁰³⁸⁴⁵⁹¹⁸⁰³⁰⁶⁰¹¹⁸²¹¹⁷⁹⁰⁸⁹⁷¹⁷⁸⁰¹⁷⁷⁹²=2 (mod p), 2²⁰⁷⁶⁹¹⁸³⁶⁰⁶¹²⁰²³⁶⁴²³⁵⁸¹⁷⁹⁴³⁵⁶⁰³⁵⁵⁸⁴=2 (mod p), 2⁴¹⁵³⁸³⁶⁷²¹²²⁴⁰⁴⁷²⁸⁴⁷¹⁶³⁸⁸⁸⁷¹²⁰⁷¹¹⁶⁸=2 (mod p), 2⁸³⁰⁷⁶⁷³⁴⁴²⁴⁴⁸⁰⁹⁴⁵⁶⁹⁴³²⁷⁷⁷⁷⁴²⁴¹⁴²³³⁶=2 (mod p), 2¹⁶⁶¹⁵³⁴⁶⁸⁸⁴⁸⁹⁶¹⁸⁹¹³⁸⁸⁶⁵⁵⁵⁵⁴⁸⁴⁸²⁸⁴⁷⁰⁴=2 (mod p), 2³³²³⁰⁶⁹³⁷⁶⁹⁷⁹²³⁷⁸²⁷⁷⁷³¹¹¹⁰⁹⁶⁹⁶⁵⁶⁹⁴⁰⁸=2 (mod p), 2⁶⁶⁴⁶¹³⁸⁷⁵³⁹⁵⁸⁴⁷⁵⁶⁵⁵⁵⁴⁶²²²¹⁹³⁹³¹³⁸⁸¹⁶=2 (mod p), 2¹³²⁹²²⁷⁷⁵⁰⁷⁹¹⁶⁹⁵¹³¹¹⁰⁹²⁴⁴⁴³⁸⁷⁸⁶²⁷⁷⁶³²=2 (mod p), 2²⁶⁵⁸⁴⁵⁵⁵⁰¹⁵⁸³³⁹⁰²⁶²²¹⁸⁴⁸⁸⁸⁷⁷⁵⁷²⁵⁵⁵²⁶⁴=2 (mod p), 2⁵³¹⁶⁹¹¹⁰⁰³¹⁶⁶⁷⁸⁰⁵²⁴⁴³⁶⁹⁷⁷⁷⁵⁵¹⁴⁵¹¹⁰⁵²⁸=2 (mod p), 2¹⁰⁶³³⁸²²⁰⁰⁶³³⁵⁶⁰¹⁰⁴⁸⁸⁷³⁹⁵⁵⁵¹⁰²⁹⁰²²¹⁰⁵⁶=2 (mod p), 2²¹²⁶⁷⁶⁴⁴⁰¹²⁶⁷¹²⁰²⁰⁹⁷⁷⁴⁷⁹¹¹⁰²⁰⁵⁸⁰⁴⁴²¹¹²=2 (mod p), 2⁴²⁵³⁵²⁸⁸⁰²⁵³⁴²⁴⁰⁴¹⁹⁵⁴⁹⁵⁸²²⁰⁴¹¹⁶⁰⁸⁸⁴²²⁴=2 (mod p), 2⁸⁵⁰⁷⁰⁵⁷⁶⁰⁵⁰⁶⁸⁴⁸⁰⁸³⁹⁰⁹⁹¹⁶⁴⁴⁰⁸²³²¹⁷⁶⁸⁴⁴⁸=2 (mod p), 2¹⁷⁰¹⁴¹¹⁵²¹⁰¹³⁶⁹⁶¹⁶⁷⁸¹⁹⁸³²⁸⁰¹⁶⁴⁶⁴³⁵³⁶⁹⁹²=2 (mod p), 2³⁴⁰²⁸²³⁰⁴²⁰²⁷³⁹²³³⁵⁶³⁹⁶⁶⁵⁶⁰³²⁹²⁸⁷¹⁷³⁹⁸⁴=2 (mod p), 2⁶⁸⁰⁵⁶⁴⁶⁰⁸⁴⁰⁵⁴⁷⁸⁴⁶⁷¹²⁷⁹³³¹²⁰⁶⁵⁸⁵⁷⁴³⁴⁷⁹⁶⁸=2 (mod p), 2¹³⁶¹¹²⁹²¹⁶⁸¹⁰⁹⁵⁶⁹³⁴²⁵⁵⁸⁶²⁴¹³³¹⁷¹⁴⁶⁶⁹⁹³⁶=2 (mod p), 2²⁷²²²⁵⁸⁴³³⁶²¹⁹¹³⁸⁶⁸⁵¹¹⁷²⁴⁸²⁶⁶³⁴²⁹³³⁹⁸⁷²=2 (mod p), 2⁵⁴⁴⁴⁵¹⁶⁸⁶⁷²⁴³⁸²⁷⁷³⁷⁰²³⁴⁴⁹⁶⁵³²⁶⁸⁵⁸⁶⁷⁹⁷⁴⁴=2 (mod p), 2¹⁰⁸⁸⁹⁰³³⁷³⁴⁴⁷⁷⁶⁵⁵⁴⁷⁴⁰⁴⁶⁸⁹⁹³⁰⁶⁵³⁷¹⁷³⁵⁹⁴⁸⁸=2 (mod p), 2²¹⁷⁷⁸⁰⁶⁷⁴⁶⁸⁹⁵⁵³¹⁰⁹⁴⁸⁰⁹³⁷⁹⁸⁶¹³⁰⁷⁴³⁴⁷¹⁸⁹⁷⁶=2 (mod p), 2⁴³⁵⁵⁶¹³⁴⁹³⁷⁹¹⁰⁶²¹⁸⁹⁶¹⁸⁷⁵⁹⁷²²⁶¹⁴⁸⁶⁹⁴³⁷⁹⁵²=2 (mod p), 2⁸⁷¹¹²²⁶⁹⁸⁷⁵⁸²¹²⁴³⁷⁹²³⁷⁵¹⁹⁴⁴⁵²²⁹³⁸⁸⁸⁷⁹⁰⁴=2 (mod p), 2¹⁷⁴²²⁴⁵³⁹⁷⁵¹⁶⁴²⁴⁸⁷⁵⁸⁴⁷⁵⁰³⁸⁸⁹⁰⁴⁵⁸⁷⁷⁷⁷⁸⁰⁸=2 (mod p), 2³⁴⁸⁴⁴⁹⁰⁷⁹⁵⁰³²⁸⁴⁹⁷⁵¹⁶⁹⁵⁰⁰⁷⁷⁷⁸⁰⁹¹⁷⁵⁵⁵⁵⁶¹⁶=2 (mod p), 2⁶⁹⁶⁸⁹⁸¹⁵⁹⁰⁰⁶⁵⁶⁹⁹⁵⁰³³⁹⁰⁰¹⁵⁵⁵⁶¹⁸³⁵¹¹¹²³²=2 (mod p), 2¹³⁹³⁷⁹⁶³¹⁸⁰¹³¹³⁹⁹⁰⁰⁶⁷⁸⁰⁰³¹¹¹²³⁶⁷⁰²²²⁴⁶⁴=2 (mod p), 2²⁷⁸⁷⁵⁹²⁶³⁶⁰²⁶²⁷⁹⁸⁰¹³⁵⁶⁰⁰⁶²²²⁴⁷³⁴⁰⁴⁴⁴⁹²⁸=2 (mod p), 2⁵⁵⁷⁵¹⁸⁵²⁷²⁰⁵²⁵⁵⁹⁶⁰²⁷¹²⁰⁰¹⁴⁴⁴⁹⁴⁶⁸⁰⁸⁸⁹⁸⁵⁶=2 (mod p), 2¹¹¹⁵⁰³⁷⁰⁵⁴⁴¹⁰⁵¹¹⁹²⁰⁵⁴²⁴⁰²⁸⁸⁹⁹⁸⁹³⁶¹⁷⁷⁷⁷²=2 (mod p), 2²²³⁰⁰⁷⁴¹⁰⁸⁸²¹⁰²³⁸⁴¹⁰⁸⁴⁸⁰⁵⁷⁷⁹⁹⁷⁸⁷²³⁵⁵⁵⁴⁴=2 (mod p), 2⁴⁴⁶⁰¹⁴⁸²¹⁷⁶⁴²⁰⁴⁷⁶⁸²¹⁶⁹⁶¹¹⁵⁵⁹⁹⁵⁷⁴⁴⁷¹¹⁰⁸⁸=2 (mod p), 2⁸⁹²⁰²⁹⁶⁴³⁵²⁸⁴⁰⁹⁵³⁶⁴³³⁹²²³¹¹⁹⁹¹⁴⁸⁹⁴²²¹⁷⁶=2 (mod p), 2¹⁷⁸⁴⁰⁵⁹²⁸⁷⁰⁵⁶⁸¹⁹⁰⁷²⁶⁶⁷⁸⁴⁴⁶²³⁹⁸²⁹⁷⁸⁸⁴⁴³⁵²=2 (mod p), 2³⁵⁶⁸¹¹⁸⁵⁷⁴¹¹³⁶³⁸¹⁴⁵³³⁵⁶⁸⁹²⁴⁷⁹⁶⁵⁹⁵⁷⁶⁸⁸⁷⁰⁴=2 (mod p), 2⁷¹³⁶²³⁷¹⁴⁸²²⁷²⁷⁶²⁹⁰⁶⁷¹³⁷⁸⁴⁹⁵⁹³¹⁹¹⁵³⁷⁷⁴⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁴²⁷²⁴⁷⁴²⁹⁶⁴⁵⁴⁵⁵²⁵⁸¹³⁴²⁷⁶⁸⁹¹⁹⁸⁶³⁸³⁰⁷⁵⁴⁸¹⁶=2 (mod p), 2²⁸⁵⁴⁴⁹⁴⁸⁵⁹²⁹⁰⁹¹⁰⁵¹⁶²⁶⁸⁵⁵³⁷⁸³⁹⁷²⁷⁶⁶¹⁵⁰⁹⁶³²=2 (mod p), 2⁵⁷⁰⁸⁹⁸⁹⁷¹⁸⁵⁸¹⁸²¹⁰³²⁵³⁷¹⁰⁷⁵⁶⁷⁹⁴⁵⁵³²³⁰¹⁹²⁶⁴=2 (mod p), 2¹¹⁴¹⁷⁹⁷⁹⁴³⁷¹⁶³⁶⁴²⁰⁶⁵⁰⁷⁴²¹⁵¹³⁵⁸⁹¹⁰⁶⁴⁶⁰³⁸⁵²⁸=2 (mod p), 2²²⁸³⁵⁹⁵⁸⁸⁷⁴³²⁷²⁸⁴¹³⁰¹⁴⁸⁴³⁰²⁷¹⁷⁸²¹²⁹²⁰⁷⁷⁰⁵⁶=2 (mod p), 2⁴⁵⁶⁷¹⁹¹⁷⁷⁴⁸⁶⁵⁴⁵⁶⁸²⁶⁰²⁹⁶⁸⁶⁰⁵⁴³⁵⁶⁴²⁵⁸⁴¹⁵⁴¹¹²=2 (mod p), 2⁹¹³⁴³⁸³⁵⁴⁹⁷³⁰⁹¹³⁶⁵²⁰⁵⁹³⁷²¹⁰⁸⁷¹²⁸⁵¹⁶⁸²⁸⁸²²⁴=2 (mod p), 2¹⁸²⁶⁸⁷⁶⁷⁰⁹⁹⁴⁶¹⁸²⁷³⁰⁴¹¹⁸⁷⁴⁴²¹⁷⁴²⁵⁷⁰³³⁶⁵⁶⁴⁴⁴⁸=2 (mod p), 2³⁶⁵³⁷⁵³⁴¹⁹⁸⁹²³⁶⁵⁴⁶⁰⁸²³⁷⁴⁸⁸⁴³⁴⁸⁵¹⁴⁰⁶⁷³¹²⁸⁸⁹⁶=2 (mod p), 2⁷³⁰⁷⁵⁰⁶⁸³⁹⁷⁸⁴⁷³⁰⁹²¹⁶⁴⁷⁴⁹⁷⁶⁸⁶⁹⁷⁰²⁸¹³⁴⁶²⁵⁷⁷⁹²=2 (mod p), 2¹⁴⁶¹⁵⁰¹³⁶⁷⁹⁵⁶⁹⁴⁶¹⁸⁴³²⁹⁴⁹⁵³³⁷³⁹⁴⁰⁵⁶²⁶⁹²⁵¹⁵⁵⁸⁴=2 (mod p), 2²⁹²³⁰⁰²⁷³⁵⁹¹³⁸⁹²³⁶⁸⁶⁵⁸⁹⁸⁵⁶⁷⁴⁷⁸⁸¹¹²⁵³⁸⁵⁰³¹¹⁶⁸=2 (mod p), 2⁵⁸⁴⁶⁰⁰⁵⁴⁷¹⁸²⁷⁷⁸⁴⁷³⁷³¹⁷⁹⁷¹³⁴⁹⁵⁷⁶²²⁵⁶⁷⁷⁰⁰⁶²³³⁶=2 (mod p), 2¹¹⁶⁹²⁰¹⁰⁹⁴³⁶⁵⁵⁵⁶⁹⁴⁷⁴⁶³⁵⁹⁴²⁶⁹⁹¹⁵²⁴⁵¹³⁵⁴⁰¹²⁴⁶⁷²=2 (mod p), 2²³³⁸⁴⁰²¹⁸⁸⁷³¹¹¹³⁸⁹⁴⁹²⁷¹⁸⁸⁵³⁹⁸³⁰⁴⁹⁰²⁷⁰⁸⁰²⁴⁹³⁴⁴=2 (mod p), 2⁴⁶⁷⁶⁸⁰⁴³⁷⁷⁴⁶²²²⁷⁷⁸⁹⁸⁵⁴³⁷⁷⁰⁷⁹⁶⁶⁰⁹⁸⁰⁵⁴¹⁶⁰⁴⁹⁸⁶⁸⁸=2 (mod p), 2⁹³⁵³⁶⁰⁸⁷⁵⁴⁹²⁴⁴⁵⁵⁵⁷⁹⁷⁰⁸⁷⁵⁴¹⁵⁹³²¹⁹⁶¹⁰⁸³²⁰⁹⁹³⁷⁷⁶=2 (mod p), 2¹⁸⁷⁰⁷²¹⁷⁵⁰⁹⁸⁴⁸⁹¹¹¹⁵⁹⁴¹⁷⁵⁰⁸³¹⁸⁶⁴³⁹²²¹⁶⁶⁴¹⁹⁸⁷⁵²=2 (mod p), 2³⁷⁴¹⁴⁴³⁵⁰¹⁹⁶⁹⁷⁸²²³¹⁸⁸³⁵⁰¹⁶⁶³⁷²⁸⁷⁸⁴⁴³³²⁸³⁹⁷⁰⁰⁴=2 (mod p), 2⁷⁴⁸²⁸⁸⁷⁰⁰³⁹³⁹⁵⁶⁴⁴⁶³⁷⁶⁷⁰⁰³³²⁷⁴⁵⁷⁵⁶⁸⁸⁶⁶⁵⁶⁷⁹⁴⁰⁰⁸=2 (mod p), 2¹⁴⁹⁶⁵⁷⁷⁴⁰⁰⁷⁸⁷⁹¹²⁸⁹²⁷⁵³⁴⁰⁰⁶⁶⁵⁴⁹¹⁵¹³⁷⁷³³¹³⁵⁸⁸¹⁶=2 (mod p), 2²⁹⁹³¹⁵⁴⁸⁰¹⁵⁷⁵⁸²⁵⁷⁸⁵⁵⁰⁶⁸⁰⁰¹³⁰⁹⁸³⁰²⁷⁵⁴⁶⁶²⁷¹⁷⁶³²=2 (mod p), 2⁵⁹⁸⁶³⁰⁹⁶⁰³¹⁵¹⁶⁵¹⁵⁷¹⁰¹³⁶⁰⁰²⁶¹⁹⁶⁶⁰⁵⁵⁰⁹³²⁵⁴³⁵²⁶⁴=2 (mod p), 2¹¹⁹⁷²⁶¹⁹²⁰⁶³⁰³³⁰³¹⁴²⁰²⁷²⁰⁰⁵²³⁹³²¹¹⁰¹⁸⁶⁵⁰⁸⁷⁰¹²⁸=2 (mod p), 2²³⁹⁴⁵²³⁸⁴¹²⁶⁰⁶⁶⁰⁶²⁸⁴⁰⁵⁴⁴⁰¹⁰⁴⁷⁸⁶⁴²²⁰³⁷³⁰¹⁷⁴⁰²⁵⁶=2 (mod p), 2⁴⁷⁸⁹⁰⁴⁷⁶⁸²⁵²¹³²¹²⁵⁶⁸¹⁰⁸⁸⁰²⁰⁹⁵⁷²⁸⁴⁴⁰⁷⁴⁶⁰³⁴⁸⁰⁵¹²=2 (mod p), 2⁹⁵⁷⁸⁰⁹⁵³⁶⁵⁰⁴²⁶⁴²⁵¹³⁶²¹⁷⁶⁰⁴¹⁹¹⁴⁵⁶⁸⁸¹⁴⁹²⁰⁶⁹⁶⁰²⁴=2 (mod p), 2¹⁹¹⁵⁶¹⁹⁰⁷³⁰⁰⁸⁵²⁸⁵⁰²⁷²⁴³⁵²⁰⁸³⁸²⁹¹³⁷⁶²⁹⁸⁴¹³⁹²⁰⁴⁸=2 (mod p), 2³⁸³¹²³⁸¹⁴⁶⁰¹⁷⁰⁵⁷⁰⁰⁵⁴⁴⁸⁷⁰⁴¹⁶⁷⁶⁵⁸²⁷⁵²⁵⁹⁶⁸²⁷⁸⁴⁰⁹⁶=2 (mod p), 2⁷⁶⁶²⁴⁷⁶²⁹²⁰³⁴¹¹⁴⁰¹⁰⁸⁹⁷⁴⁰⁸³³⁵³¹⁶⁵⁵⁰⁵¹⁹³⁶⁵⁵⁶⁸¹⁹²=2 (mod p), 2¹⁵³²⁴⁹⁵²⁵⁸⁴⁰⁶⁸²²⁸⁰²¹⁷⁹⁴¹⁶⁶⁶⁷⁰⁶³³¹⁰¹⁰³⁸⁷³¹¹³⁶³⁸⁴=2 (mod p), 2³⁰⁶⁴⁹⁸⁵⁵¹⁶⁸¹³⁶⁴⁵⁶⁰⁴³⁵⁸⁸³³³³⁴¹²⁶⁶²⁰²⁰⁷⁷⁴⁶²²⁷²⁷⁶⁸=2 (mod p), 2⁶¹²⁹⁹⁷¹⁰³³⁶²⁷²⁹¹²⁰⁸⁷¹⁷⁶⁶⁶⁶⁶⁸²⁵³²⁴⁰⁴¹⁵⁴⁹²⁴⁵⁴⁵⁵³⁶=2 (mod p), 2¹²²⁵⁹⁹⁴²⁰⁶⁷²⁵⁴⁵⁸²⁴¹⁷⁴³⁵³³³³³⁶⁵⁰⁶⁴⁸⁰⁸³⁰⁹⁸⁴⁹⁰⁹¹¹²=2 (mod p), 2²⁴⁵¹⁹⁸⁸⁴¹³⁴⁵⁰⁹¹⁶⁴⁸³⁴⁸⁷⁰⁶⁶⁶⁶⁷³⁰¹²⁹⁶¹⁶⁶¹⁹⁶⁹⁸¹⁸²⁴=2 (mod p), 2⁴⁹⁰³⁹⁷⁶⁸²⁶⁹⁰¹⁸³²⁹⁶⁶⁹⁷⁴¹³³³³⁴⁶⁰²⁵⁹²³³²³⁹³⁹⁶³⁶⁴⁸=2 (mod p), 2⁹⁸⁰⁷⁹⁵³⁶⁵³⁸⁰³⁶⁶⁵⁹³³⁹⁴⁸²⁶⁶⁶⁶⁹²⁰⁵¹⁸⁴⁶⁶⁴⁷⁸⁷⁹²⁷²⁹⁶=2 (mod p), 2¹⁹⁶¹⁵⁹⁰⁷³⁰⁷⁶⁰⁷³³¹⁸⁶⁷⁸⁹⁶⁵³³³³⁸⁴¹⁰³⁶⁹³²⁹⁵⁷⁵⁸⁵⁴⁹⁹²=2 (mod p), 2³⁹²³¹⁸¹⁴⁶¹⁵²¹⁴⁶⁶³⁷³⁵⁷⁹³⁰⁶⁶⁶⁷⁶⁸²⁰⁷³⁸⁶⁵⁹¹⁵¹⁷⁰⁹⁹⁸⁴=2 (mod p), 2⁷⁸⁴⁶³⁶²⁹²³⁰⁴²⁹³²⁷⁴⁷¹⁵⁸⁶¹³³³⁵³⁶⁴¹⁴⁷⁷³⁸²³⁰³⁴¹⁹⁹⁶⁸=2 (mod p), 2¹⁵⁶⁹²⁷²⁵⁸⁴⁶⁰⁸⁵⁸⁶⁵⁴⁹⁴³¹⁷²²⁶⁶⁷⁰⁷²⁸²⁹⁵⁴⁷⁶⁴⁶⁰⁶⁸³⁹⁹³⁶=2 (mod p), 2³¹³⁸⁵⁴⁵¹⁶⁹²¹⁷¹⁷³⁰⁹⁸⁸⁶³⁴⁴⁵³³⁴¹⁴⁵⁶⁵⁹⁰⁹⁵²⁹²¹³⁶⁷⁹⁸⁷²=2 (mod p), 2⁶²⁷⁷⁰⁹⁰³³⁸⁴³⁴³⁴⁶¹⁹⁷⁷²⁶⁸⁹⁰⁶⁶⁸²⁹¹³¹⁸¹⁹⁰⁵⁸⁴²⁷³⁵⁹⁷⁴⁴=2 (mod p), 2¹²⁵⁵⁴¹⁸⁰⁶⁷⁶⁸⁶⁸⁶⁹²³⁹⁵⁴⁵³⁷⁸¹³³⁶⁵⁸²⁶³⁶³⁸¹¹⁶⁸⁵⁴⁷¹⁹⁴⁸⁸=2 (mod p), 2²⁵¹⁰⁸³⁶¹³⁵³⁷³⁷³⁸⁴⁷⁹⁰⁹⁰⁷⁵⁶²⁶⁷³¹⁶⁵²⁷²⁷⁶²³³⁷⁰⁹⁴³⁸⁹⁷⁶=2 (mod p), 2⁵⁰²¹⁶⁷²²⁷⁰⁷⁴⁷⁴⁷⁶⁹⁵⁸¹⁸¹⁵¹²⁵³⁴⁶³³⁰⁵⁴⁵⁵²⁴⁶⁷⁴¹⁸⁸⁷⁷⁹⁵²=2 (mod p), 2¹⁰⁰⁴³³⁴⁴⁵⁴¹⁴⁹⁴⁹⁵³⁹¹⁶³⁶³⁰²⁵⁰⁶⁹²⁶⁶¹⁰⁹¹⁰⁴⁹³⁴⁸³⁷⁷⁵⁵⁰⁴=2 (mod p), 2²⁰⁰⁸⁶⁶⁸⁹⁰⁸²⁹⁸⁹⁹⁰⁷⁸³²⁷²⁶⁰⁵⁰¹³⁸⁵³²²¹⁸²⁰⁹⁸⁶⁹⁶⁷⁵⁵¹⁰⁰⁸=2 (mod p), 2⁴⁰¹⁷³³⁷⁸¹⁶⁵⁹⁷⁹⁸¹⁵⁶⁶⁵⁴⁵²¹⁰⁰²⁷⁷⁰⁶⁴⁴³⁶⁴¹⁹⁷³⁹³⁵¹⁰²⁰¹⁶=2 (mod p), 2⁸⁰³⁴⁶⁷⁵⁶³³¹⁹⁵⁹⁶³¹³³⁰⁹⁰⁴²⁰⁰⁵⁵⁴¹²⁸⁸⁷²⁸³⁹⁴⁷⁸⁷⁰²⁰⁴⁰³²=2 (mod p), 2¹⁶⁰⁶⁹³⁵¹²⁶⁶³⁸⁹⁸⁶⁶²⁶⁶¹⁸⁰⁸⁴⁰¹¹⁰⁸²⁵⁷⁵⁴⁵⁶⁷⁸⁹⁵⁷⁴⁰⁴⁰⁸⁰⁶⁴=2 (mod p), 2³²¹³⁸⁷⁰²⁵³²⁷⁷⁹⁷³²⁵³²³⁶¹⁶⁸⁰²²¹⁶⁵¹⁵⁰⁹¹³⁵⁷⁹¹⁴⁸⁰⁸¹⁶¹²⁸=2 (mod p), 2⁶⁴²⁷⁷⁴⁰⁵⁰⁶⁵⁵⁵⁹⁴⁶⁵⁰⁶⁴⁷²³³⁶⁰⁴⁴³²⁰³⁰¹⁸²⁷¹⁵⁸²⁹⁶¹⁶³²²⁵⁶=2 (mod p), 2¹²⁸⁵⁵⁴⁸¹⁰¹³¹¹¹⁸⁹³⁰¹²⁹⁴⁴⁶⁷²⁰⁸⁸⁶⁴⁰⁶⁰³⁶⁵⁴³¹⁶⁵⁹²³²⁶⁵¹²=2 (mod p), 2²⁵⁷¹⁰⁹⁶²⁰²⁶²²³⁷⁸⁶⁰²⁵⁸⁸⁹³⁴⁴¹⁷⁷²⁸¹²⁰⁷³⁰⁸⁶³³¹⁸⁴⁶⁵²⁰²⁴=2 (mod p), 2⁵¹⁴²¹⁹²⁴⁰⁵²⁴⁴⁷⁵⁷²⁰⁵¹⁷⁷⁸⁶⁸⁸³⁵⁴⁵⁶²⁴¹⁴⁶¹⁷²⁶⁶³⁶⁹³⁰⁴⁰⁴⁸=2 (mod p), 2¹⁰²⁸⁴³⁸⁴⁸¹⁰⁴⁸⁹⁵¹⁴⁴¹⁰³⁵⁵⁷³⁷⁶⁷⁰⁹¹²⁴⁸²⁹²³⁴⁵³²⁷³⁸⁶⁰⁸¹⁹²=2 (mod p), 2²⁰⁵⁶⁸⁷⁶⁹⁶²⁰⁹⁷⁹⁰²⁸⁸²⁰⁷¹¹⁴⁷⁵³⁴¹⁸²⁴⁹⁶⁵⁸⁴⁶⁹⁰⁶⁵⁴⁷⁷²¹⁶³⁸⁴=2 (mod p), 2⁴¹¹³⁷⁵³⁹²⁴¹⁹⁵⁸⁰⁵⁷⁶⁴¹⁴²²⁹⁵⁰⁶⁸³⁶⁴⁹⁹³¹⁶⁹³⁸¹³⁰⁹⁵⁴⁴³²⁷⁶⁸=2 (mod p), 2⁸²²⁷⁵⁰⁷⁸⁴⁸³⁹¹⁶¹¹⁵²⁸²⁸⁴⁵⁹⁰¹³⁶⁷²⁹⁹⁶⁶³³⁸⁷⁶²⁶¹⁸⁵⁸⁸⁶⁵⁵³⁶=2 (mod p), 2¹⁶⁴⁵⁵⁰¹⁵⁶⁹⁶⁷⁸³²²³⁰⁵⁶⁵⁶⁹¹⁸⁰²⁷³⁴⁵⁹⁹³²⁶⁷⁷⁵²⁵²³⁷¹⁷⁷³¹⁰⁷²=2 (mod p), 2³²⁹¹⁰⁰³¹³⁹³⁵⁶⁶⁴⁴⁶¹¹³¹³⁸³⁶⁰⁵⁴⁶⁹¹⁹⁸⁶⁵³⁵⁵⁰⁵⁰⁴⁷⁴³⁵⁴⁶²¹⁴⁴=2 (mod p), 2⁶⁵⁸²⁰⁰⁶²⁷⁸⁷¹³²⁸⁹²²²⁶²⁷⁶⁷²¹⁰⁹³⁸³⁹⁷³⁰⁷¹⁰¹⁰⁰⁹⁴⁸⁷⁰⁹²⁴²⁸⁸=2 (mod p), 2¹³¹⁶⁴⁰¹²⁵⁵⁷⁴²⁶⁵⁷⁸⁴⁴⁵²⁵⁵³⁴⁴²¹⁸⁷⁶⁷⁹⁴⁶¹⁴²⁰²⁰¹⁸⁹⁷⁴¹⁸⁴⁸⁵⁷⁶=2 (mod p), 2²⁶³²⁸⁰²⁵¹¹⁴⁸⁵³¹⁵⁶⁸⁹⁰⁵¹⁰⁶⁸⁸⁴³⁷⁵³⁵⁸⁹²²⁸⁴⁰⁴⁰³⁷⁹⁴⁸³⁶⁹⁷¹⁵²=2 (mod p), 2⁵²⁶⁵⁶⁰⁵⁰²²⁹⁷⁰⁶³¹³⁷⁸¹⁰²¹³⁷⁶⁸⁷⁵⁰⁷¹⁷⁸⁴⁵⁶⁸⁰⁸⁰⁷⁵⁸⁹⁶⁷³⁹⁴³⁰⁴=2 (mod p), 2¹⁰⁵³¹²¹⁰⁰⁴⁵⁹⁴¹²⁶²⁷⁵⁶²⁰⁴²⁷⁵³⁷⁵⁰¹⁴³⁵⁶⁹¹³⁶¹⁶¹⁵¹⁷⁹³⁴⁷⁸⁸⁶⁰⁸=2 (mod p), 2²¹⁰⁶²⁴²⁰⁰⁹¹⁸⁸²⁵²⁵⁵¹²⁴⁰⁸⁵⁵⁰⁷⁵⁰⁰²⁸⁷¹³⁸²⁷²³²³⁰³⁵⁸⁶⁹⁵⁷⁷²¹⁶=2 (mod p), 2⁴²¹²⁴⁸⁴⁰¹⁸³⁷⁶⁵⁰⁵¹⁰²⁴⁸¹⁷¹⁰¹⁵⁰⁰⁰⁵⁷⁴²⁷⁶⁵⁴⁴⁶⁴⁶⁰⁷¹⁷³⁹¹⁵⁴⁴³²=2 (mod p), 2⁸⁴²⁴⁹⁶⁸⁰³⁶⁷⁵³⁰¹⁰²⁰⁴⁹⁶³⁴²⁰³⁰⁰⁰¹¹⁴⁸⁵⁵³⁰⁸⁹²⁹²⁰¹⁴⁴⁷⁸³⁰⁸⁸⁶⁴=2 (mod p), 2¹⁶⁸⁴⁹⁹³⁶⁰⁷³⁵⁰⁶⁰²⁰⁴⁰⁹⁹²⁶⁸⁴⁰⁶⁰⁰⁰²²⁹⁷¹⁰⁶¹⁷⁸⁵⁸⁴⁰²⁸⁵⁶⁶¹⁷⁷⁷²⁸=2 (mod p), 2³³⁶⁹⁹⁸⁷²¹⁴⁷⁰¹²⁰⁴⁰⁸¹⁹⁸⁵³⁶⁸¹²⁰⁰⁰⁴⁵⁹⁴²¹²³⁵⁷¹⁶⁸⁰⁵⁷¹³²³⁵⁵⁴⁵⁶=2 (mod p), 2⁶⁷³⁹⁹⁷⁴⁴²⁹⁴⁰²⁴⁰⁸¹⁶³⁹⁷⁰⁷³⁶²⁴⁰⁰⁰⁹¹⁸⁸⁴²⁴⁷¹⁴³³⁶¹¹⁴²⁶⁴⁷¹⁰⁹¹²=2 (mod p), 2¹³⁴⁷⁹⁹⁴⁸⁸⁵⁸⁸⁰⁴⁸¹⁶³²⁷⁹⁴¹⁴⁷²⁴⁸⁰⁰¹⁸³⁷⁶⁸⁴⁹⁴²⁸⁶⁴²²⁸⁴⁵²⁹⁴²¹⁸²⁴=2 (mod p), 2²⁶⁹⁵⁹⁸⁹⁷⁷¹⁷⁶⁰⁹⁶³²⁶⁵⁵⁸⁸²⁹⁴⁴⁹⁶⁰⁰³⁶⁷⁵³⁶⁹⁸⁵⁵⁷²⁸⁴⁵⁶⁹⁰⁵⁸⁴³⁶⁴⁸=2 (mod p), 2⁵³⁹¹⁹⁷⁹⁵⁴³⁵²¹⁹²⁶⁵³¹¹⁷⁶⁵⁸⁸⁹⁹²⁰⁰⁷³⁵⁰⁷³⁹⁷¹¹⁴⁵⁶⁹¹³⁸¹¹⁶⁸⁷²⁹⁶=2 (mod p), 2¹⁰⁷⁸³⁹⁵⁹⁰⁸⁷⁰⁴³⁸⁵³⁰⁶²³⁵³¹⁷⁷⁹⁸⁴⁰¹⁴⁷⁰¹⁴⁷⁹⁴²²⁹¹⁸²⁷⁷⁶²³³⁷⁴⁵⁹²=2 (mod p), 2²¹⁵⁶⁷⁹¹⁸¹⁷⁴⁰⁸⁷⁷⁰⁶¹²⁴⁷⁰⁶³⁵⁵⁹⁶⁸⁰²⁹⁴⁰²⁹⁵⁸⁸⁵⁵⁸³⁶⁵⁵⁵²⁴⁶⁷⁴⁹¹⁸⁴=2 (mod p), 2⁴³¹³⁵⁸³⁶³⁴⁸¹⁷⁵⁴¹²²⁴⁹⁴¹²⁷¹¹⁹³⁶⁰⁵⁸⁸⁰⁵⁹¹⁷⁷¹¹⁶⁷³¹¹⁰⁴⁹³⁴⁹⁸³⁶⁸=2 (mod p), 2⁸⁶²⁷¹⁶⁷²⁶⁹⁶³⁵⁰⁸²⁴⁴⁹⁸⁸²⁵⁴²³⁸⁷²¹¹⁷⁶¹¹⁸³⁵⁴²³³⁴⁶²²⁰⁹⁸⁶⁹⁹⁶⁷³⁶=2 (mod p), 2¹⁷²⁵⁴³³⁴⁵³⁹²⁷⁰¹⁶⁴⁸⁹⁷⁷⁶⁵⁸⁸⁴⁷⁷⁴⁴²³⁵²²³⁶⁷⁰⁸⁴⁶⁶⁹²⁴⁴¹⁹⁷³⁹⁹³⁵²=2 (mod p), 2³⁴⁵⁰⁸⁶⁶⁹⁰⁷⁸⁵⁴⁰³²⁹⁷⁹⁵⁵³¹⁷⁶⁹⁵⁴⁸⁸⁴⁷⁰⁴⁴⁷³⁴¹⁶⁹³³⁸⁴⁸⁸³⁹⁴⁷⁹⁸⁷⁰⁴=2 (mod p), 2⁶⁹⁰¹⁷³³⁸¹⁵⁷⁰⁸⁰⁶⁵⁹⁵⁹¹⁰⁶³⁵³⁹⁰⁹⁷⁶⁹⁴⁰⁸⁹⁴⁶⁸³³⁸⁶⁷⁷⁹⁷⁶⁷⁸⁹⁵⁹⁷⁴⁰⁸=2 (mod p), 2¹³⁸⁰³⁴⁶⁷⁶³¹⁴¹⁶¹³¹⁹¹⁸²¹²⁷⁰⁷⁸¹⁹⁵³⁸⁸¹⁷⁸⁹²⁶⁶⁷⁷³⁵⁵⁹⁵³⁵⁷⁹¹⁹⁴⁸¹⁶=2 (mod p), 2²⁷⁶⁰⁶⁹³⁵²⁶²⁸³²²⁶³⁸³⁶⁴²⁵⁴¹⁵⁶³⁹⁰⁷⁷⁶³⁵⁷⁸⁵³³⁵⁴⁷¹¹⁹⁰⁷¹⁵⁸³⁸⁹⁶³²=2 (mod p), 2⁵⁵²¹³⁸⁷⁰⁵²⁵⁶⁶⁴⁵²⁷⁶⁷²⁸⁵⁰⁸³¹²⁷⁸¹⁵⁵²⁷¹⁵⁷⁰⁶⁷⁰⁹⁴²³⁸¹⁴³¹⁶⁷⁷⁹²⁶⁴=2 (mod p), 2¹¹⁰⁴²⁷⁷⁴¹⁰⁵¹³²⁹⁰⁵⁵³⁴⁵⁷⁰¹⁶⁶⁵⁵⁶¹⁵¹⁰⁵⁴³¹⁴¹³⁴¹⁸⁸⁴⁷⁶²⁸⁶³³⁵⁸⁸⁵²⁸=2 (mod p), 2²²⁰⁸⁵⁵⁴⁸²¹⁰²⁶⁵⁸¹¹⁰⁶⁹¹⁴⁰³³³¹¹²³⁰²⁰⁵⁸⁶²⁸²⁶⁸³⁷⁶⁹⁵²⁵⁷²⁶⁷¹⁷⁷⁰⁵⁶=2 (mod p), 2⁴⁴¹⁷¹⁰⁹⁶⁴²⁰⁵³¹⁶²²¹³⁸²⁸⁰⁶⁶⁶²²⁴⁶⁰⁴¹¹⁷²⁵⁷³³⁶⁷⁵³⁹⁰⁵¹⁴⁵³⁴³⁵⁴¹¹²=2 (mod p), 2⁸⁸³⁴²¹⁹²⁸⁴¹⁰⁶³²⁴⁴²⁷⁶⁵⁶¹³³²⁴⁴⁹²⁰⁸²³⁴⁵¹⁴⁶⁷³⁵⁰⁷⁸¹⁰²⁹⁰⁶⁸⁷⁰⁸²²⁴=2 (mod p), 2¹⁷⁶⁶⁸⁴³⁸⁵⁶⁸²¹²⁶⁴⁸⁸⁵⁵³¹²²⁶⁶⁴⁸⁹⁸⁴¹⁶⁴⁶⁸⁷⁵³³⁴⁷⁰¹⁵⁶²⁰⁵⁸¹³⁷⁴¹⁶⁴⁴⁸=2 (mod p), 2³⁵³³⁶⁸⁷⁷¹³⁶⁴²⁵²⁹⁷⁷¹⁰⁶²⁴⁵³²⁹⁷⁹⁶⁸³²⁹³⁷⁵⁰⁶⁶⁹⁴⁰³¹²⁴¹¹⁶³⁵⁵⁸³²⁸⁹⁶=2 (mod p), 2⁷⁰⁶⁷³⁷⁵⁴²⁷²⁸⁵⁰⁵⁹⁵⁴²¹²⁴⁹⁰⁶⁵⁹⁵⁹³⁶⁶⁵⁸⁷⁵⁰¹³³⁸⁸⁰⁶²⁴⁸²³²⁷¹¹⁶⁶⁵⁷⁹²=2 (mod p), 2¹⁴¹³⁴⁷⁵⁰⁸⁵⁴⁵⁷⁰¹¹⁹⁰⁸⁴²⁴⁹¹³¹¹⁹¹⁸⁷³³¹⁷⁵⁰²²⁶⁷⁷⁶¹²⁴¹⁶⁴⁶⁵⁴²³³³¹⁵⁸⁴=2 (mod p), 2²⁸²⁶⁹⁵⁰¹⁷⁰⁹¹⁴⁰²³⁸¹⁶⁸⁴⁹⁸²⁶²³⁸³⁷⁴⁶⁶³⁵⁰⁰⁴⁵³⁵⁵²²⁴⁸³²⁹³⁰⁸⁴⁶⁶⁶³¹⁶⁸=2 (mod p), 2⁵⁶⁵³⁹⁰⁰³⁴¹⁸²⁸⁰⁴⁷⁶³³⁶⁹⁹⁶⁵²⁴⁷⁶⁷⁴⁹³²⁷⁰⁰⁰⁸⁵⁷¹⁰⁴⁴⁹⁶⁶⁵⁸⁶¹⁶⁹³³²⁶³³⁶=2 (mod p), 2¹¹³⁰⁷⁸⁰⁰⁶⁸³⁶⁵⁶⁰⁹⁵²⁶⁷³⁹⁹³⁰⁴⁹⁵³⁴⁹⁸⁶⁵⁴⁰⁰¹⁷¹⁴²⁰⁸⁹⁹³¹⁷⁷²³³⁸⁶⁶⁵²⁶⁷²=2 (mod p), 2²²⁶¹⁵⁶⁰¹³⁶⁷³¹²¹⁹⁰⁵³⁴⁷⁹⁸⁶⁰⁹⁹⁰⁶⁹⁹⁷³⁰⁸⁰⁰³⁴²⁸⁴¹⁷⁹⁸⁶³⁵⁴⁴⁶⁷⁷³³⁰⁵³⁴⁴=2 (mod p), 2⁴⁵²³¹²⁰²⁷³⁴⁶²⁴³⁸¹⁰⁶⁹⁵⁹⁷²¹⁹⁸¹³⁹⁹⁴⁶¹⁶⁰⁰⁶⁸⁵⁶⁸³⁵⁹⁷²⁷⁰⁸⁹³⁵⁴⁶⁶¹⁰⁶⁸⁸=2 (mod p), 2⁹⁰⁴⁶²⁴⁰⁵⁴⁶⁹²⁴⁸⁷⁶²¹³⁹¹⁹⁴⁴³⁹⁶²⁷⁹⁸⁹²³²⁰⁰¹³¹³⁶⁷¹⁹⁴⁵⁴¹⁷⁸⁷⁰⁹³²²¹³⁷⁶=2 (mod p), 2¹⁸⁰⁹²⁴⁸¹⁰⁹³⁸⁴⁹⁷⁵²⁴²⁷⁸³⁸⁸⁷⁷⁹²⁵⁵⁹⁷⁸⁴⁶⁴⁰⁰²⁶²⁷³⁴³⁸⁹⁰⁸³⁵⁷⁴¹⁸⁶⁴⁴²⁷²=2 (mod p), 2³⁶¹⁸⁴⁹⁶²¹⁸⁷⁶⁹⁹⁵⁰⁴⁸⁵⁵⁶⁷⁷⁷⁵⁵⁸⁵¹¹⁹⁵⁶⁹²⁸⁰⁰⁵²⁴⁴⁶⁸⁷⁷⁸¹⁶⁷¹⁴⁸³⁷²⁸⁸⁵⁴⁴=2 (mod p), 2⁷²³⁶⁹⁹²⁴³⁷⁵³⁹⁹⁰⁰⁹⁷¹¹³⁵⁵⁵¹¹⁷⁰²³⁸⁵³⁸⁵⁶⁰¹⁰⁴⁸⁹⁷⁵⁵⁵⁶³³⁴²⁹⁶⁷⁴⁵⁷⁷⁰⁸⁸=2 (mod p), 2¹⁴⁴⁷³⁹⁸⁴⁸⁷⁵⁰⁷⁹⁸⁰¹⁹⁴²²⁷¹¹⁰²³⁴⁰⁴⁷⁷⁰⁷⁷¹²⁰²⁰⁹⁷⁹⁵¹¹¹²⁶⁶⁸⁵⁹³⁴⁹¹⁵⁴¹⁷⁶=2 (mod p), 2²⁸⁹⁴⁷⁹⁶⁹⁷⁵⁰¹⁵⁹⁶⁰³⁸⁸⁴⁵⁴²²⁰⁴⁶⁸⁰⁹⁵⁴¹⁵⁴²⁴⁰⁴¹⁹⁵⁸⁵²²²⁵³³⁷¹⁸⁶⁹⁸³⁰⁸³⁵²=2 (mod p), 2⁵⁷⁸⁹⁵⁹³⁹⁵⁰⁰³¹⁹²⁰⁷⁷⁶⁹⁰⁸⁴⁴⁰⁹³⁶¹⁹⁰⁸³⁰⁸⁴⁸⁰⁸³⁹¹⁷⁰⁴⁴⁵⁰⁶⁷⁴³⁷³⁹⁶⁶¹⁶⁷⁰⁴=2 (mod p), 2¹¹⁵⁷⁹¹⁸⁷⁹⁰⁰⁶³⁹⁸¹⁵⁵³³⁸¹⁶⁸⁸¹⁸⁷²³⁸¹⁶⁶¹⁶⁸¹⁶⁷⁸²³⁴⁰⁸⁹⁰¹³⁴⁸⁷⁴⁷⁹³²³³⁴⁰⁸=2 (mod p), 2²³¹⁵⁸³⁷⁵⁸⁰¹²⁷⁹⁶³¹⁰⁶⁷⁶³³⁷⁶³⁷⁴⁴⁷⁶³³²³³⁶³²⁵⁶⁴⁶⁸¹⁷⁸⁰²⁶⁹⁴⁸⁹⁵⁸⁶⁴⁶⁶⁸¹⁶=2 (mod p), 2⁴⁶³¹⁶⁷⁵¹⁶⁰²⁵⁵⁹²⁶²¹³⁵²⁶⁷⁵²⁷⁴⁸⁹⁵²⁶⁶⁴⁶⁷²⁶⁵¹²⁹³⁶³⁵⁶⁰⁵³⁸⁹⁷⁹¹⁷²⁹³³⁶³²=2 (mod p), 2⁹²⁶³³⁵⁰³²⁰⁵¹¹⁸⁵²⁴²⁷⁰⁵³⁵⁰⁵⁴⁹⁷⁹

(ב) $\Delta_{pq} = 2 \cdot 2^{q-p}$. (3)

$$= -1 \pmod{2^{2m+1} + 1}$$

מֵה שָׁמַע, הִתְאַת (ז)

1) L. E. Dickson, History of the theory of numbers I, p. 94.

二

3) Hardy-Wright, An introduction to the theory of numbers, second edition (1945), p. 71-72.

$2^{n-1}-1 \bmod n$ סבכילים נ-בריקים איזו ר' מספרים פירק'ים מ-הו או איזו?

נתחם עכמי בודך "סמה-גפלד": מספר המספרים הפירק'ים F_m הוא או איזו?

או סופי. במקורה הראשו ל-טובייה (1) את חוצאת שרפינסקי. במקורה התשוי, יעצא כי, בהביל מספר שבעי מסויים כל המספרים $,_{m>1} F_k$ הם ראשוניים. בהניחסו, נקבע אפוא את תרצעת ספרינסקי על-ஸיר (2).

EXISTENCE OF AN INFINITE OF COMPOSITE n FOR WHICH $2^{n-1}-1 \bmod n$

Dov Jarden

(Summary)

In Colloquium Mathematicum I (1947), p. 9, W. Sierpiński proved the existence of an infinite of composite numbers n satisfying the congruence $2^{n-1}-1 \bmod n$, using the fact that, if $2^{n-1}-1$ is divisible by n , then $2^{2^n-2}-1$ is divisible by 2^{n-1} . The aim of the present note is to prove Sierpiński's result by the following two very simple properties of the Fermat-numbers $F_m=2^{2^m}+1$:

- (1) $2^{n-1}-1 \bmod n$ for every $n=F_m$.
 - (2) $2^{n-1}-1 \bmod n$ for $n=F_m F_{m+1}$ if F_m, F_{m+1} are primes and $m>1$.
- (Compare Dickson, History of the Theory of Numbers I, p. 94).
- Now, the number of composite F_m is either infinite, or finite. In the first case, (1) proves Sierpiński's result. In the second case, it follows that, for a certain positive integer $m>1$, all the numbers $F_k, k=m, m+1, m+2, \dots$, are primes. Then, supposing $n=F_i F_{i+1}$, where $i>m$, we obtain Sierpiński's result by (2).

תשלג ג' ים לפלנרים - 3

בְּרִית מָשֶׁה וְעֵדָת לְוִי :

הסדר מופיע במקומם המקורי, ומי שפונטן מזכיר כאל-

• ק-1 טרגדיה

ב-1, ..., 3, 2, 1 לוייט: צד' ל (9T)

卷之二

• (3.231) במקומם (3.232): צורה 18 שעתן 3 עריכת 40 סירה

בגדוד 3 עמד 40 מטר מדרום לירטן: $\frac{|\text{ירטן}|}{\infty} \leq \left(\text{כגדוד } 02 \text{ מטר} \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |\text{ו.}|_i}{\alpha}$

כגד 3 עמד 41 סורה אחר רבה צהיר לומר: (3, 21) במקם ((3, 22)) $n=s+1$

בנוסף למשרדים נסגרו 3 סניפים ו-59 סניפים נסגרו ב-1 במרץ.

ברך 3 עמיה 62 עירן 3 מלטה צרבן לישר:

卷之三

וְאַתָּה תִּשְׁעַל אֶת־בְּנֵי־יִשְׂרָאֵל וְאֶת־בְּנֵי־עֲמָקָם

כגדל 3 סטודט 49 חילדה 9 טאל הסכרים האבלים צבידן צבידן מאר: $\frac{A}{\tau}$ (τ מוקדם \cdot $\frac{L}{A}$)

תבונן כרך 4

- אלרנס (קברקר) ג'הן
ממשת חבללוותי, Wolstenholme 15-9
על דשרמינגרו, סלים, ווילט איבר, 22-28
הערות למאמרי, "Wolstenholme 61-59
בירמן אברם הוכחה ודוגמאות לכך שמספרים בקורסיביותם של פתרון 64-66
גרמניך ברוד הוכחה אלטרנטיבית למספר אכבי-בלגאייה בנווע לאבסיאו-טוטה סל המספרים 21-18
- זכאי סלמה הימנשטיין מודול זוגי, 37-35
זכאי סלמה י. רדוֹן רב הרכבה פשותה למספרים לוד-סודול בלוט, מהלך ג-9, 17-16
- זכאי בושינסקי ערי לבעתית טאר, אסקרוט הטיני-מלית, 58-41
- ירדוֹן דב (ראה גם זכאי, וירדוֹן) על המספרים $n^{\frac{1}{2}}$ (נ \neq זוגי) בסדרה העצומה לסדרת פבו גז', 40-38
מציאות איז-טולף מספרים פריקים n שבובילם $n \equiv 1 \pmod{2}$ 67-65
- עמידור סמסוּן סולידונים דיפרגציילאים סופיים, 1-8
סור עבי תבידות טרדיות בשרטוטים ורמציעות ליביריות, 34-29
-
- Contents of Volume 4
- Anitsur Shimshon
Finite differential polynomials, 1-8
- Birman Abraham
Proof and examples that the equation of Fermat's Last Theorem is solvable in integral quaternions, 62-64
- Eljoseph Nathan
Extensions of Wolstenholme's Theorem, 9-15
On determinants with integral elements, 22-28
Remarks on my paper "Extensions of Wolstenholme's Theorem", 59-61
- Germansky Baruch
An alternative proof of a theorem of equivalence concerning axioms of natural numbers, 18-21
- Jabotinsky Eri
The minimal Tarry-Escott problem, 41-58
- Jarden Dov (see also Zakay and Jarden)
On the numbers V_{5n} (n odd) in the sequence associated with Fibonacci's Sequence, 38-40
- Existence of an infinite of composite n for which $2^{n-1} \pmod{n}$, 65-67
- Schur Zvi
Oscillations of sequences in linear transformations, 29-34
- Zakay Shlomo
Leudesdorf's Theorem in case of an even modulus, 35-37
- Zakay Shlomo and Jarden Dov
Simple proof of Leudesdorff's theorem in cases of a modul non-divisible by 6, 16-17

רְבָעָה לִמְתָּחָם שִׁיקָה

לִימֹוד וּלְמַחְקָר

בערך כת

רב ירדן

כרך 4

תש"י-י"א

ירושלים

R I V E O N L E M A T E M A T I K A

A Quarterly Journal

Intended to Promote Mathematical Research

Among Students of Mathematics

Dov Jarden

Editor

Volume 4

1950

Jerusalem
Israel

RIVEON LEMATEMATIKA

A QUARTERLY JOURNAL

INTENDED TO PROMOTE MATHEMATICAL RESEARCH
AMONG STUDENTS OF MATHEMATICS

DOV JARDEN, EDITOR

Volume 4

Jerusalem, October 1950

Number 3-4

CONTENTS

	Page
The minimal Tarry-Escott problem	ERI JABOTINSKY
Remarks on my paper "Extensions of Wolstenholme's theorem"	NATHAN ELJOSEPH
Proof and examples that the equation of Fermat's last theorem is solvable in integral quaternions	ABRAHAM BIRMAN
Existence of an infinitude of composite n for which $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$	DOV JARDEN
Corrigenda, Vol. 2-3	68
Contents of Volume 4	69

Editor's address: Dov Jarden, Knesset Hachadasha, Jerusalem, Israel



