גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים

ארכימדס (287–212 לפנה"ס)

כרך 4 | חשון תשל"א – נובמבר 1970 | מס 4

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

חוברת זו, הראשונה לשנת תשל"א, מופיעה באיחור מה, הנובע בעיקר מהחגים שחלו הפעם בזמן כה מאוחר. אנו מבקשים את סליחת הקוראים, ומקווים להשיג את הפיגור הזה במשך השנה.

בעיה

שלשה מעגלים שווים הם בעלי נקודה משותפת, H, וגם נחתכים בזוגות בשלוש נקודות נוספות A, B, ו-C. יש להוכיח שהמעגל העובר דרך A, B, ו-C שווה לשלשת המעגלים האחרים.

(תולדות הבעיה הזאת ופתרונה בעמוד 4).

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה - תש"ל

תחרות הגמר של האולימפיאדה התקיימה במכון ויצמן ב-15.4.70. השתתפו בה 20 מתחרים שנבחרו על סמך התחרות המוקדמת. הפרסים הוענקו בטקס חגיגי במכון ויצמן בל"ג בעומר (24.5.70).

הזוכים היו: פרס ראשון - א. רוכמן (חיפה)

פרסי עידוד - א. גרסיה (קרית-גת)
נ. ליניאל (חיפה)
ב. סולל (תל-אביב)

ציונים לשבח - י. בן-שושן (הרצליה)
ד. ברנד (בני-ברק)

השאלון שהוצג בפני משתתפי תחרות הגמר מופיע למטה, ונשאיר לקוראים לנסות את כוחם. משום מה לא הצליחו רבים לפתר את השאלה מס' 9, ולכן החלטנו לפרסם גם את פתרונה. הפתרון מופיע בעמוד 4).

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה - תש"ל

(מכון ויצמן למדע בשתוף עם תכניות חסכון לנוער של בנק הפועלים)

<u>תחרות הגמר</u>   <u>ט' ניסן, תש"ל - 15.4.70</u>   <u>13.00-10.00</u>

(ענה על כמה שאלות שתרצה. המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה)

1. (12) אדם רוכב יום יום באופניים במהירות קבועה של 20 קמ"ש לעבודתו. מסלול רכיבתו מקביל למסילת ברזל והוא מגיע תמיד לקץ הנסיעה באותו רגע בו מגיעה רכבת. יום אחד איחר לצאת ב-25 דקות והרכבת הדביקה אותו 10 ק"מ לפני קץ דרכו. מהי מהירות הרכבת?

2. (12) הוכח כי סכום המספרים הטבעיים שאינם גדולים מ- $10n$ ושאינם מתחלקים ב-2 או ב-5 הוא $20n^2$.

3. (15) הוכח כי עבור כל זויות חדות α , β קיים

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$$

4. (20) הוכח כי עבור x,y,z,λ חיוביים

$$\sqrt{\frac{x+\lambda y}{z}} + \sqrt{\frac{y+\lambda z}{x}} + \sqrt{\frac{z+\lambda x}{y}} > 3\sqrt{1+\lambda}$$

וכי השויון מתקיים רק כש- $x=y=z$.

5. (20) נתון מעגל C ושתי נקודות X,Y חיצוניות למעגל C . תאר בנית מעגל העובר דרך X,Y והחותך את C בשתי נקודות שהן קצות קוטר של C . האם הבניה אפשרית תמיד?

6. (23) תלמיד אחד נדרש לפתר את המשואה

$$\cos\theta + \sin\theta = 1 + \sin 2\theta$$

ופתרונו היה כדלקמן:

$$\cos\theta + \sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= (\cos\theta + \sin\theta)^2$$

ולכן $(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta - 1) = 0$

הוא בדק את שתי האפשרויות

א) $\cos\theta + \sin\theta = 0$

ואז, לפי המשואה המקורית, $1 + \sin 2\theta = 0$

ומכאן הסיק ש- $\theta = (m-\frac{1}{4})\pi$

ב) $\cos\theta + \sin\theta = 1$

ואז $\sin 2\theta = 0$

ולכן $\theta = \frac{n\pi}{2}$

אך כשבדק את הפתרונות ע"י הצבה במשואה המקורית מצא כי $n = 2$ ז.א. $\theta = \pi$ אינו מקיים את המשואה. במה היה פתרונו לקוי?

7. (25) עבור כל ערך ממשי של t מגדירים את הנקודה P_t ע"י

$$x = \frac{t^2+2t-5}{2t^2-6t+5} \quad , \quad y = \frac{3t^2-8t+6}{2t^2-6t+5}$$

הראה כי כל הנקודות P_t נמצאות על קו ישר ומצא את משוואתו.

הוכח גם כי כל הנקודות P_t נמצאות בקטע סופי של אותו קו ישר.

8. (25) במרובע $ABCD$ מגדירים $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

ו- S הוא שטח המרובע. הוכח כי

$$S \le \frac{1}{4}(a+b)(c+d)$$

מתי יתקיים שויון?

9. (28) המספרים $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{22}$ מוגדרים ע"י

$$(1+x+x^2)^{11} = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{22}x^{22}$$

הוכח כי

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2 - \ldots\ldots + a_{22}^2 = a_{11}$$

פתרון שאלה מס׳ 9 של האולימפיאדה

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \;\ldots\ldots + a_{22}x^{22} = (1+x+x^2)^{11} \qquad (1)$$

אם נציב כאן $-\frac{1}{x}$ במקום x נקבל

$$(2) \qquad a_0 - \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} \cdots\cdots + \frac{a_{22}}{x^{22}} = \left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$$

$$= \frac{(1-x+x^2)^{11}}{x^{22}}$$

אם נכפיל (1) ו-(2) נקבל ש-

איבר שאינו תלוי $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 \cdots\cdots + a_{22}^2 =$

ב- x במכפלה.

אבל המכפלה היא

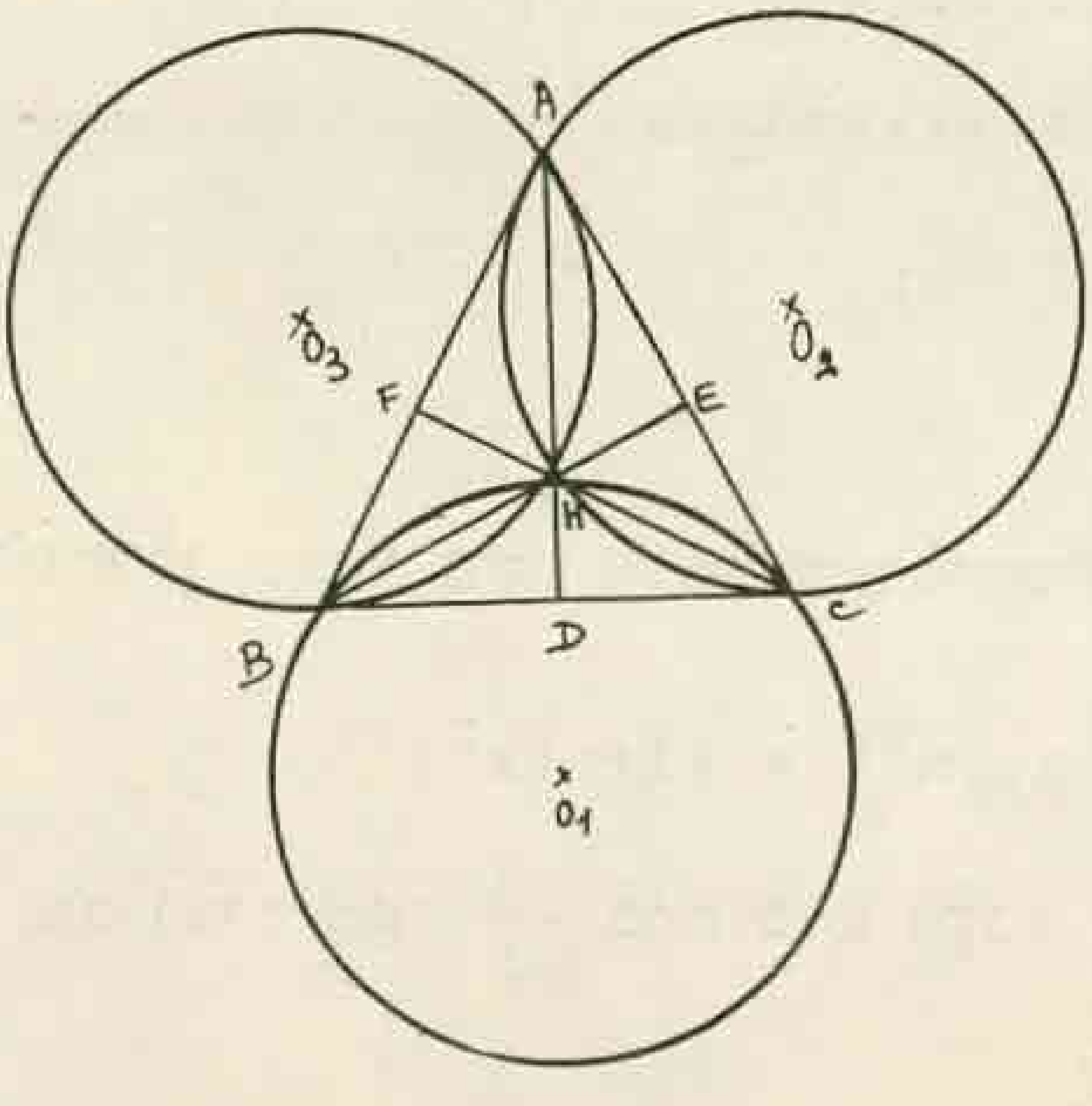
$$\frac{[(1+x+x^2)(1-x+x^2)]^{11}}{x^{22}}$$

$$= \frac{(1+x^2+x^4)^{11}}{x^{22}}$$

ולכן האיבר הוא המקדם של x^{22} בפתוח של $(1+x^2+x^4)^{11}$. אם נציב x^2 במקום x ב-(1) נראה שמקדם זה הוא בדיוק a_{11} .

פתרון הבעיה מעמוד 1

המתמטיקאי הרומני ציצייקה אהב בעיות בהנדסה אלמנטרית ובזמנו פרסם ספר במקצוע זה ובו 1,400 בעיות מקוריות.



פעם ישב והשגיח על קבוצת תלמידים בבחינה. מתוך שעמום לקח מטבע מכיסו והשתמש בה כדי לשרטט מעגלים על ניר. תוך עיסוק זה שם לב לתופעה המוזכרת בבעיה וגם הצליח להוכיח אותה באופן כללי.

לפנינו איפוא משפט בהנדסה שהתגלה מתוך נסיון. אנו מודים לאבי סיגלר שהביא את הבעיה וגם את ספור קורותיה לידיעתנו.

והנה ההוכחה:

יהיו O_1, O_2, O_3 מרכזי המעגלים, ותהיינה A, B, C הנקודות המשו- המשותפות ל-(O_2,O_3), (O_3,O_1), ו- (O_1,O_2) בהתאמה. תהיינה F,E,D נקודות תוך של (AH,BC), (BH,CA). ו-(CH,AB).
הנקודה O_3 סימטרית ל-O_1 ביחס לאמצע של HB (מפני שהמעגלים שווים) וכמו כן O_2 סימטרית ל-O_1 ביחס לאמצע של HC. מכאן נובע ש- O_2O_3 שווה ל- BC.

כמו כן $AB = O_1O_2$, $CA = O_3O_1$; ומכאן שהמשולשים $O_1O_2O_3$, ABC חופפים. אבל AH הוא אנך אמצעי ל- O_2O_3 (הוכח את זה) כמו כן BH ל- O_3O_1 ו- CH ל- O_1O_2. מכאן ש- H הוא מרכז המעגל $O_1O_2O_3$ ולכן רדיוס המעגל $O_1O_2O_3$ הוא HO_1 שהוא גם הרדיוס של שלושת המעגלים הראשונים. אבל ראינו כבר כי המשולשים ABC , $O_1O_2O_3$ חופפים, ולכן גם למעגל ABC יהיה אותו רדיוס.

שברים משולבים

1. מבוא

שני אנשים רצו לחשב את הסדרה הבאה של שברים:-

$$\frac{p_1}{q_1} = 2+\frac{1}{3}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{5}}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{5 - \cfrac{3}{7}}}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{5 - \cfrac{3}{7 + \cfrac{1}{2}}}}$$

האיש הראשון חישב כל אחד מהשברים לפי הטור,

לפי שיטה פשוטה דהינו שהתחיל כל פעם מחדש מלמטה, ולא טרח אפילו לצמצם את השברים שקבל תוך כדי עבודתו. חשבונו היה כדלקמן:-

א)
$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{3}$$

ולכן
$$p_1 = 7 \quad ; \quad q_1 = 3$$

ב)
$$\frac{p_2}{q_2} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{5}}$$

$$= 2 + \frac{5}{17}$$

$$= \frac{39}{17}$$

ולכן
$$p_2 = 39 \; ; \; q_2 = 17$$

ג)
$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{14}{32}}$$

$$= 2 + \frac{32}{110}$$

$$= \frac{252}{110}$$

$$p_3 = 252 \; ; \; q_3 = 110$$

ד)
$$\frac{p_4}{q_4} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{5 - \frac{6}{15}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{3 + \frac{30}{69}}$$

$$= 2 + \frac{69}{237}$$

$$= \frac{543}{237}$$

$$p_4 = 543 \; ; \; q_4 = 237$$

השני העיר כי $\frac{p_3}{q_3}$ מתקבל מ- $\frac{p_2}{q_2}$ ע"י זה שהוספנו למכנה האחרון את השבר $\frac{-3}{7}$ וקשר את העובדה הזאת עם העובדה שלמעשה

$$p_3 = 7p_2 - 3p_1$$

$$q_3 = 7q_2 - 3q_1$$

כדי לבדק אם היה הדבר הזה רק מקרה, המשיך האיש השני תוך תשומת לב לעובדה ש- $\frac{p_4}{q_4}$ התקבל מ- $\frac{p_3}{q_3}$ ע"י הוספת $\frac{1}{2}$ למכנה האחרון. ואמנם קל לראות כי

$$p_4 = 2p_3 + 1 \cdot p_2$$

$$q_4 = 2q_3 + 1 \cdot q_2$$

אם המסקנה שמתבקשת מההתאמה הזאת נכונה, והדבר איננו סתם מקרה, הרי שיש לפנינו שיטה לחשב שברים משולבים כאלה בלי בלי שנצטרך להתחיל כל פעם מלמטה. במקום זה נוכל לחשב את השלבים השונים אחד אחד, כשכל אחד נובע בצורה קלה משני קודמיו. ובאמת תפקידנו הראשון יהיה להוכיח כי הדבר נכון באופן כללי.

2. נגדיר "שבר משולב" שבר כתוב בצורה

$$x = a_o + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

אנו קוראים לשבר

$$a_o + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

"השלב מסדר n " ל- x ונוהגים לסמן אותו ע"י $\frac{p_n}{q_n}$. עכשיו נוכל לנסח את משפטנו הראשון:-

משפט 1

$$(n>z)\, p_n = a_n p_{n-1} + a_n p_{n-2};\; q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

המשפט הכללי הזה מבטא איפוא, בדיוק מה שמצא באופן נסיוני
האיש השני של הסעיף הקודם.

הוכחה: את המשפט נוכיח ע"י אינדוקציה, נגדיר

$$\frac{p_o}{q_o} = a_o$$

ז.א. $p_o = a_o$; $q_o = 1$.

$$\frac{p_1}{q_1} = a_o + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_o a_1 + b_1}{a_1} \tag{1}$$

ולכן

$$p_1 = a_o a_1 + b_1 \quad ; \quad q_1 = a_1 \tag{2}$$

עכשיו

$$\frac{p_2}{q_2} = a_o + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}$$

$$= a_o + \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}$$

$$= \frac{a_o a_1 a_2 + a_o b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}$$

ולכן

$$p_2 = a_o a_1 a_2 + a_o b_2 + a_2 b_1 \; ; \; q_2 = a_1 a_2 + b_2 \tag{3}$$

אבל מהמשואות (1), (2), ו- (3) אנו רואים כי

$$p_2 = a_2(a_o a_1 + b_1) + b_2 a_o$$

$$= a_2 p_1 + b_2 p_o$$

וכמו כן

$$q_2 = a_2 a_1 + b_2 \cdot$$

$$= a_2 q_1 + b_2 q_o$$

ז.א. שהמשפט נכון עבור $n=2$. עכשיו נניח כי הוא נכון
עבור $n\le k$ ונסתכל בשבר

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2\ \dots+\cfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}+\cfrac{b_k}{a_k+\cfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}}}}}$$

ערכו של שבר זה הוא, לפי ההנחה, $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. מאידך הוא מתקבל
מהשבר אשר ערכו $\frac{p_k}{q_k}$ ע"י זה שבמקום a_k בסוף כתבנו
$a_k+\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$. השלבים $\frac{p_r}{q_r}$ עבור $r<k$ זהים עם השלבים המתאימים
של השבר $\frac{p_k}{q_k}$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה,

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)p_{k-1}+b_{k-1}p_{k-2}}{\left(a_k+\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)q_{k-1}+b_{k-1}q_{k-2}}$$

$$=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+b_{k-1}p_{k-2})+b_{k+1}p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+b_{k-1}q_{k-2})+b_{k+1}q_{k-1}}$$

$$=\frac{a_{k+1}p_k+b_{k+1}p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+b_{k+1}q_{k-1}}$$

(שוב לפי הנחת האינדוקציה), ז.א. שהמשפט נכון גם עבור $n=k+1$.

בהמשך המאמר נהיה מעונינים בעיקר בשברים המיוחדים אשר בהם
$b_1=b_2=\dots\dots=1$ ו- , ז.א. בשברים מהצורה

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

כשכל המספרים a_0, a_1, ... חיוביים. שברים אלה נקראים שברים משולבים סדירים ויש להם כמה תכונות מענינות מאד. מהמשפט דלעיל נובע כי, עבור שברים סדירים,

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. למעשה נצטמצם בעיקר למקרה המיוחד שכל המספרים a_n $(n=0,1,2....)$ הם לא רק חיוביים אלא גם מספרים טבעיים. בהמשך המאמר נניח איפוא שמדובר רק בשברים מסוג זה, אם גם חלק מהמסקנות תהיינה נכונות גם עבור מקרים יותר כלליים.

יהיה

$$x = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}} \tag{1}$$

במקרה שהשבר מסתיים ב- a_n נכתב גם

$$x = [a_0 ; a_1 , a_2 , ..., a_n] \tag{2}$$

אבל נהיה מעונינים גם במקרה שהשבר אינו מסתיים ואז נכתב

$$x = [a_0 ; a_1 , a_2 , ...] \tag{3}$$

ברור כי במקרה הראשון יהיה x ראציונלי. אפשר גם להוכיח שהתנאי מספיק, דהינו שאם נציג מספר רציונלי ע"י שבר משולב סדיר כזה יהיה השבר בהכרח סופי. אבל ראשית כל נסיק ממשפט 1 כמה מסקנות.

3. <u>תכונות הקירובים</u>

יהיה $x = [a_0 ; a_1 , a_2 , ...]$

ונכתב, כרגיל, $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0 ; a_1 , a_2 , ..., a_n]$

ממשפט 1 נובע כי

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \tag{4}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \tag{5}$$

נגדיר

$$F_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$$

אם נכפיל את (4) ב- q_{n-1} ואת (5) ב- p_{n-1} ונחסר נקבל

$$F_n = -F_{n-1} \tag{6}$$

ולכן, ע"י אינדוקציה,

$$F_n = (-1)^n F_1 \tag{7}$$

אבל

$$\frac{p_o}{q_o} = \frac{a_o}{1} \tag{8}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = a_o + \frac{1}{a_1} = \frac{a_o a_1 + 1}{a_1} \tag{9}$$

ולכן

$$p_o = a_o \; ; \; p_1 = a_o a_1 + 1$$

$$q_o = 1 \; ; \; q_1 = a_1$$

ומכאן

$$F_1 = p_1 q_o - p_o q_1 = 1 \tag{10}$$

מ-(9) ו-(10) נובע כי

$$F_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \tag{11}$$

אנו מסיקים מיד כי ל- p_n, q_n אין גורם משותף, כי הרי כל גורם משותף של q_n, p_n היה צריך לחלק גם את F_n וזה בלתי אפשרי בגלל (11). יוצא מזה שהקירובים $\frac{p_n}{q_n}$ של שבר סדיר יוצאים תמיד בצורה מצומצמת. מ-(11) אנו רואים דרך אגב ש-

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \tag{12}$$

זאת אומרת שהקירובים אינם מתנהגים בצורה מונוטונית, אלא שהם עולים ויורדים לסירוגין.

שוב יהיה

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

(סופי או אינסופי) ו-

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

נוכל לכתב

(13)
$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k + \lambda}}}}$$

כש-

(14)
$$\lambda = \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \dots}}$$

ממשפט 1 נובע ש-

$$x = \frac{(a_k+\lambda)p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k+\lambda)q_{k-1} + q_{k-2}}$$

(15)
$$= \frac{p_k + \lambda p_{k-1}}{q_k + \lambda q_{k-1}}$$

(שוב ממשפט 1)

מ- (15) אנו מסיקים ש-

$$x-\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_k+\lambda p_{k-1}}{q_k+\lambda q_{k-1}}-\frac{p_k}{q_k}$$

$$=\frac{\lambda(p_{k-1}q_k-q_{k-1}p_k)}{q_k(q_k+\lambda q_{k-1})}$$

$$=\frac{-\lambda F_k}{q_k(q_k+\lambda q_{k-1})}$$

$$=\frac{(-1)^k\lambda}{q_k(q_k+\ q_{k-}\ )}\tag{16}$$

מאידך

$$x-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{p_k+\lambda p_{k-1}}{q_k+\lambda q_{k-1}}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

$$=\frac{p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k}{q_{k-1}(q_k+\lambda q_{k-1})}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}(q_k+\lambda q_{k-1})}\tag{17}$$

מ-(16) ו-(17) נובע שהסימן של $x-\frac{p_k}{q_k}$ מתחלף עם כל k ז.א. שהשלבים $\frac{p_k}{q_k}$ הם לסירוגין גדולים מ-x וקטנים ממנו. אבל אפשר להסיק משהו נוסף. לפי ההנחה מדובר כאן במקרה שהמספרים a_k $(k = 0, 1, \ldots\ldots)$ הם כלם מספרים טבעיים יוצא כי

$$a_{k+1}+\cfrac{1}{a_{k+2}+\cfrac{1}{a_{k+3}+\ldots}}>a_{k+1}>1\tag{18}$$

ולכן $0<\lambda<1$. כמו כן אנו רואים ממשפט 1 ש-

$$q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} \tag{19}$$

אם נחזור עכשיו ל- (16) ו-(17) נראה כי

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \Big/ \left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{\lambda q_{k-1}}{q_k}$$

$$< \frac{q_{k-1}}{q_k}$$

(מאחר ש- $1 > \lambda$)

$$< 1$$

בגלל (19)

ומכאן נובע שההפרשים $x-\frac{p_n}{q_n}$ לא רק מחליפים סימן אלא שערכם המוחלט הולך וקטן כש-n גדל. מ-(16) נובע גם ש-

$$\left|x-\frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2} \tag{20}$$

4. <u>פתוח של מספר כלשהו כשבר משולב סדיר</u>

אנחנו רואים מ-(20) כי השלבים של שבר סדיר מהווים קירובים טובים מאד לערך הסופי של השבר, ז.א. למספר המיוצג ע"י השבר. מכאן נובעת בעצם החשיבות המיוחדת של השברים האלה. מעניך איפוא לדעת איך לפתח מספר נתון בצורה זו.

נתחיל בדוגמה אחת:-

$$\frac{127}{12} = 10 + \frac{7}{12} = 10 + \cfrac{1}{\frac{12}{7}}$$

$$= 10 + \cfrac{1}{1+\frac{5}{7}} = 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{7}{5}}}$$

$$= 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{5}}}$$

$$= 10 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$$

אם נתבונן במה שעשינו כאן נראה כי קבענו

החלק השלם של x = $a_o = 10 = \frac{127}{12}$

נסמן, עבור כל x, החלק השלם ממנו ב-$[x]$. יש לנו איפוא

$$a_o = [\frac{127}{12}]$$

באשר להמשך הרי $\frac{127}{12} - a_o = \frac{7}{12}$, וכתבנו $\frac{7}{12}$ בצורה $\frac{1}{\frac{12}{7}}$.

עכשיו יכולנו להמשיך וקבלנו $a_1 = [\frac{12}{7}] = 1$ ההמשך ברור

$$\frac{12}{7} - a_1 = \frac{5}{7} = \frac{1}{\frac{7}{5}}$$

$$a_2 = [\frac{7}{5}] = 1$$

$$\frac{7}{5} - a_2 = \frac{2}{5}$$

וכו׳

כדי לפשט את ההמשך נגדיר סימון נוסף והוא $\{x\} = x-[x]$,

הוא מה שנשאר מ-x כשמחסרים ממנו את חלקו השלם.

עכשיו נשים לב שבמקרה שלנו היה

$$\{\frac{127}{12}\} = \frac{7}{12}$$

$$\{\frac{12}{7}\} = \frac{5}{7}$$

$$\{\frac{7}{5}\} = \frac{2}{5}$$

וכו׳.

אם נסתכל בסדרת השברים באגפי הימין של המשואות האחרונות האלה נראה כי

1) המונה בכל מקרה קטן מהמכנה.

2) המכנה של כל שבר שווה למונה של השבר במשואה הקודמת.

קל לראות כי שני התנאים האלה יתקיימו תמיד ואנו משאירים לקורא להיווכח מזה בעצמו. בכל אופן נובע משני התנאים שהמכנים הולכים וקטנים ולכן מוכרח התהליך להגיע לסוף אחרי מספר סופי של צעדים. מזה אנו רואים כי הפתוח של מספר רציונלי לשבר משולב סדיר הוא תמיד סופי, כפי שהערנו בסוף §I.

5. מספרים לא רציונליים

ראינו איפוא כי שבר סדיר יהיה סופי אך ורק אם הוא מספר רציונלי, ומכאן שהצגת מספר אי-רציונלי הוא בהכרח ע"י משבר אינסופי. אם α הוא מספר כזה אזי ברור ממה שאמרנו למעלה שנוכל לבנות את השבר לפי השיטה הבאה:

נגדיר

$$a_o = [\alpha] \quad , \quad r_o = \alpha - [\alpha] = \{\alpha\}$$

$$a_1 = [\frac{1}{r_o}] \qquad r_1 = \{\frac{1}{r_o}\}$$

$$a_2 = [\frac{1}{r_1}] \qquad r_2 = \{\frac{1}{r_1}\} ,$$

וכו', ואז

$$\alpha = [a_o; a_1, a_2, \ldots]$$

לדוגמה, ניקח $\alpha = \sqrt{2}$

$$a_o = [\sqrt{2}] = 1 \qquad r_o = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{r_o} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_1 = [\frac{1}{r_o}] = 2$$

$$r_1 = \frac{1}{r_o} - 2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_2 = [\frac{1}{r_1}] = 2$$

למעשה, א״ן צורך כאן להמשיך בחישוב, כי ראינו ש- $r_1 = r_0$.
אבל r_2 מתקבל מ- r_1 בדיוק לפי אותה שיטה ש-r_1 נבע
מ- r_0 ולכן מובטח מראש שנקבל $r_2=r_1$, $r_3=r_2$, וכו׳.
ומכאן ש-

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 2$$

ז.א.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

מעניין לראות את הקירובים ל- $\sqrt{2}$ המתקבלים מהפתוח הזה.

$$\frac{p_0}{q_0} = 1 = \frac{1}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{2\cdot 3+1}{2\cdot 2+1} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{2\cdot 7+3}{2\cdot 5+2} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{2\cdot 17+7}{2\cdot 12+5} = \frac{41}{29}$$

וכו׳

למעשה הקירוב $\frac{p_4}{q_4}$ שווה ל- $1\cdot 4138$ לעומת הערך המדויק
$1\cdot 4142\dots$, אנו רואים שלקבל קירוב בדיוק של $\frac{p_4}{q_4}$ ע״י
שבר עשרוני נצטרך לקחת ארבע ספרות אחרי הנקודה, זאת אומרת
למעשה לקחת מספר רציונלי אם המכנה 10,000. אנו רואים כי
הקירוב שהתקבל מהשבר המשולב איפשר לנו דיוק גדול בלי שיהיה
צורך לקחת מכנה גדול מאוד. עכשיו נוכיח כי התופעה הזאת היא
כללית.

<u>משפט 2</u>: יהיה α מספר כלשהוא ו- $\frac{p_k}{q_k}$ שלב מסדר k (k כלשהו) מהשבר המשולב הסדיר שערכו α. יהיה $\frac{r}{s}$ שבר אחר המקיים

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \tag{21}$$

אזי $s > q_k$.

המשפט הזה מבטא את העובדה שהשלבים $\frac{p_k}{q_k}$ נותנים את הדיוק המירבי שניתן להשיג בלי ללכת למכנים יותר גדולים. למשל שלא ייתכן ש-

$$\left| \sqrt{2} - \frac{r}{s} \right| < \left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right|$$

אלא אם כן $s > 12$; ולא ייתכן $\left|\sqrt{2} - \frac{41}{29}\right| > \left|\sqrt{2} - \frac{\ell}{m}\right|$ אלא אם כן $m > 29$, וכו'.

<u>הוכחת משפט 2</u>: ראינו כבר ש- α נמצא בין $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ ל- $\frac{p_k}{q_k}$ וכי

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \tag{22}$$

אבל מ- (20) ו- (21) נובע שגם $\frac{r}{s}$ נמצא בין $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ ל- $\frac{p_k}{q_k}$,

ולכן

$$\left| \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{r}{s} \right| < \left| \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right|$$

$$\frac{| sp_{k-1} - rq_{k-1} |}{s} < \frac{|p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}|}{q_k}$$

$$= \frac{1}{q_k}$$

ומכאן $$s > q_k \cdot |sp_{k-1} - rq_{k-1}| \qquad (23)$$

אבל $sp_{k-1} - rq_{k-1}$ הוא מספר שלם שאינו אפס [כי אחרת היה $\frac{r}{s} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ וזה היה סותר את (21)]. יוצא מזה ש-
$|sp_{k-1}-rq_{k-1}|>1$. אם נציב את זה מתוך (23) נראה מיד כי $s>q_k$.

ראה המשך המאמר
בחוברת הבאה.

משחק בקוביות

א. מבוא

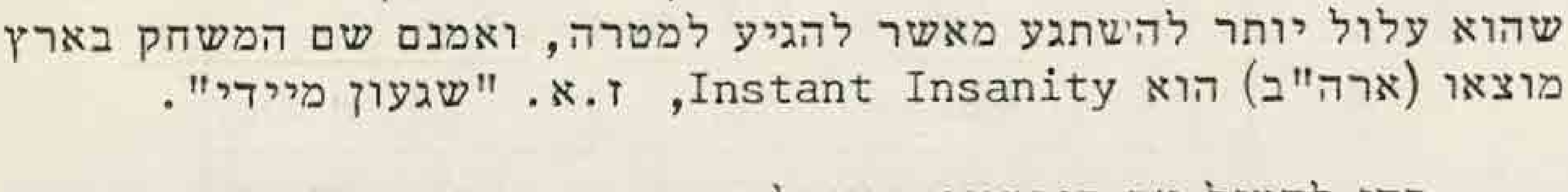
בזמן האחרון הופץ בשוק משחק מענין. הוא מורכב מארבע קוביות, כשכל פיאה של כל קוביה צבועה באחד הצבעים ירוק, כחול, לבן ואדום. המשימה היא לסדר את ארבע הקוביות בשורה, ז.א. בלבנה בגודל 1×1×4 כך שכל ארבע פיאות הלבנה שגדלן 1×4 תכיל כל אחד מארבעת הצבעים. כל מי שינסה לפתר את הבעיה ע"י משחק בלתי מאורגן ישתכנע במהרה שהוא עלול יותר להשתגע מאשר להגיע למטרה, ואמנם שם המשחק בארץ מוצאו (ארה"ב) הוא Instant Insanity, ז.א. "שגעון מיידי".

כדי להציל את קוראינו מהגורל המר הזה חפשנו פתרונות פחות אכזריים, ואמנם מצאנו אחד כזה, פרי מחשבתו של ב.ל. שוורץ (B.L. Schwartz). את הפתרון הזה נציג כאן.

ב. הבעיה

נוכל להציג באופן סכימטי קוביות ע"י הדיאגרמות שבציור. הקורא יבין מיד בעצמו איך צריכים לקפל דיאגרמה כזאת כדי לקבל קוביה. את הצבעים ירוק, כחול, לבן ואדום נסמן באותיות R,W,B,G בהתאמה.

בצורתו הרגילה של המשחק צבועות ארבע הקוביות כמו בדיאגרמה:



קוביה I קוביה II קוביה III קוביה IV

לשם הפשטות נשתמש בבטוי "פיאה" של המבנה כשכוונתנו לאחת הפיאות הארוכות ($4 \times 1 \times 1$) , ו"קצה" כשאנו מתכוונים לפיאות הקטנות ($1 \times 1 \times 1$). ובכך אנו חותרים לסידור של הקוביות אשר בכל פיאה יופיעו B, G, W, R כל אחד בדיוק פעם אחת.

ג. פתרון

אם נחשוב לרגע על זוג פיאות מנוגדות נראה שכל קוביה צריכה לתרום צבע אחד לכל אחת מהזוג וכי היא יכולה לעשות את זה מבלי להשפיע על תרומתה לזוג השני של פיאות מנוגדות. למשל, נניח שהעמדנו את קוביה מס׳ 1 כך שהיא תורמת (B , G) לזוג אחד של פיאות מנוגדות ו- (R , R) לזוג השני. אזי על ידי סיבוב הקוביה נוכל לשנות את ה- (R , R) ל- (B , W) בלי להפריע ל-(B , G) שבזוג הראשון. נוסף על כך אפשר לתת ל- (B , G) להחליף את מקומותיהם זה עם זה, בלי להפריע לזוג השני.

הבעיה היא איפוא לקבוע, לגבי שלושת הזוגות של צבעים מנוגדים בכל קופיה, איזה שני זוגות יופיעו בפיאות של המבנה, ואיזה צריך להישאר בקצוות (או מוסתר בין הקוביות). נסתכל בטבלה הבאה: -

זוג צבעים	(3)	(2)	(1)
קוביה I	GB	BW	RR
קוביה II	BG	WG	RW
קוביה III	BW	RG	RW
קוביה IV	GG	BW	RG

כדי להרכיב זוג אחד של פיאות במבנה ננסה לבחור מתוך הטבלה זוג צבעים, אחד מכל קוביה, ונסתכל ב"מכפלתם הסימבולית". למשל אם ניקח (1) מ- I, (3) מ-II, (2) מ-III, ו-(3) מ- IV נקבל RR•BG•RG•GG אשר "מכפלתם הסימבולית" היא BG^4R^3, אבל אנחנו רוצים שבזוג של פיאות מנוגדות של המבנה יופיע כל צבע בדיוק פעמיים, אחת בכל אחד מאיברי הזוג; ולכן תנאי הכרחי שעל הבחירה לקיים הוא שה"מכפלה" תהיה $B^2G^2R^2W^2$. למען הפשטות נסמן בחירת זוג צבעים מספר β מקוביה מס׳ α ע"י [α , β]. הבחירה דלעיל תסומן לפי זה ע"י

$$\{ [1,1] , [2,3] , [3,2] , [4,3] \}$$

ומכפלתה היא BG^4R^3 .

עלינו איפוא, לחפש בחירות שיתנו את המכפלה הנכונה ונראה מיד שמספר האפשרויות מוגבל למדי. כי נניח שבחרנו [4,3] . אזי יש לנו כבר G^2 ואסור איפוא לקחת מאף אחד של הקוביות זוג צבעים המכיל את G . מכאן שהאפשרות היחידה מקוביה II היא RW , ז.א. [2,1] . כדי להשלים את המבנה נצטרך איפוא לקחת זוג מ-I וזוג מ-III אשר מכפלתם B^2RW . אבל (1) ב-I כולל כבר R^2 ואילו (3) ב-I כולל G כגורם. נשאר אם כך רק [1,2] התורם BW, ואי אפשר להשלים את המבנה בדרך זו מאחר שאין ב-III BR . ראינו איפוא כי אין בחירה כשרה הכולל [4,3] ולכן נוכל למחוק את הזוג הזה מהטבלה. משיקול דומה נוכל לראות שאפשר למחוק את [1,1] .

ראינו שאפשר לקחת מ-I רק את (2) או (3), ומ-IV רק את (1) או (2). נבדוק איפוא את ארבע האפשרויות: -

א) [1,2] ו- [4,1]

שני האיברים האלה נותנים BGRW ולכן יש לחפש אחד מ-II ואחד מ-II ואחד מ-III אשר מכפלתם תהיה גם כן BGRW. קל לראות שקיימת כאן בדיוק אפשרות אחת והיא [2,3] , ו- [3,1] . יש לנו כאן איפוא בחירה שלמה אפשרית

(א) { [1,2] , [2,3] , [3,1] , [4,1] }

ב) [1,2] ו- [4,2]

יש כבר B^2W^2 ולכן עלינו להרכיב מתוך II ו-III את המכפלה G^2R^2 , ואין זה אפשרי.

ג) [1,3] ו- [4,1]

הפעם אנו מתחילים ב- B^2GR ודרוש לנו איפוא GRW^2. זה מתקבל מ- [2,2] ו- [3,1] ומכאן המבנה

(ב) { [1,3] , [2,2] , [3,1] , [4,1] }

ד) [1,3] ו- [4,2]

יש B^2GW ולכן דרוש עוד BWR^2 . זה מתקבל מ-[2,1] , ו- [3,2] והבחירה היא

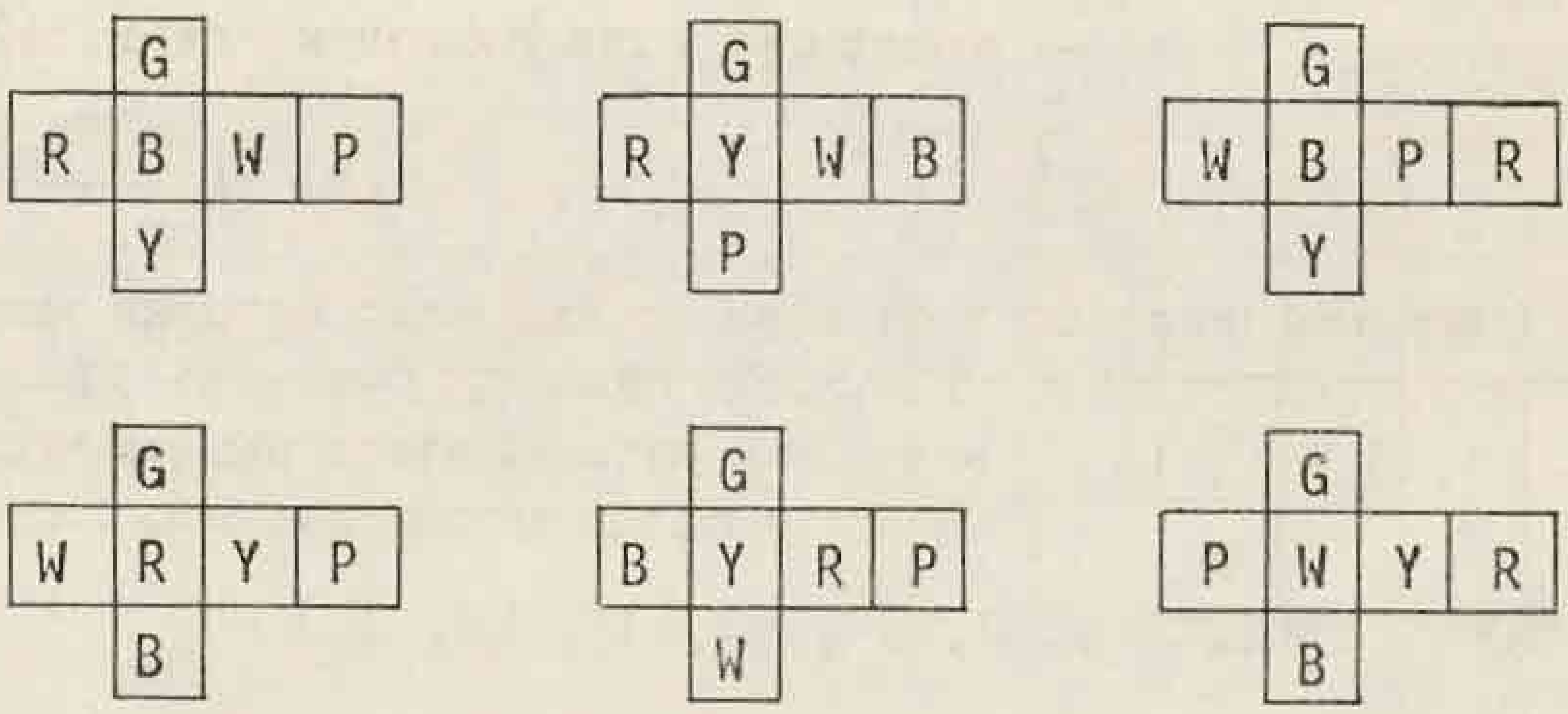
(ג) { [1,3] , [2,1] , [3,2] , [4,2] }

אלה הבחירות האפשריות ואנחנו רוצים בחירה אחת עבור זוג אחד של פיאות מנוגדות ושניה עבור הזוג השני. אי אפשר לקחת לשם זה את (ב) ו-(ג) כי אז היה זוג הצבעים (3) בקוביה I צריך להופיע בבת אחת

בשני זוגות של פיאות מנוגדות. כמו כן אין לצרף (א) עם (ב) כי זה היה מטיל תפקיד כפול דומה על זוג (1) בקוביה (3). מאידך, קל לראות שבין שתי הבחירות (א) ו-(ג) אין סתירה מסוג זה, ואלה נותנים איפוא פתרון לבעיה. וכפי שראינו פתרון זה הוא היחידי עבור קוביות צבועות כמו בדיאגרמה.

ד. בעיה נוספת

במאמר מעניין על נושא זה מאת ט.א. בראון (T.A. Brown), הוא מציג בעיה של שש קוביות וששה צבעים לפי הדיאגרמה הבאה: -



הבעיה היא לסדר את שש הקוביות במבנה של $6 \times 1 \times 1$ כך שבכל "פיאה ארוכה" יופיע כל צבע בדיוק פעם אחת.

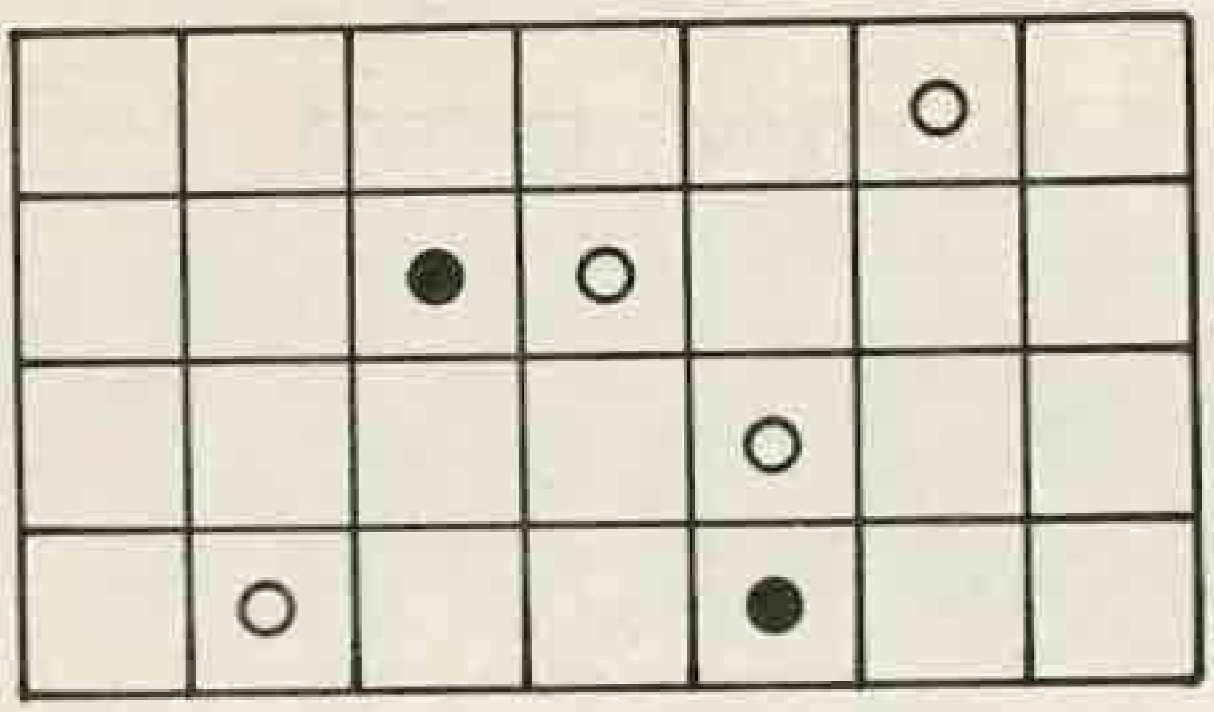
נשאיר לקורא לנסות את כוחו בבעיה זו.

משחק מתמטי

בחוברת קודמת (כרך 4, מס׳ 2) הצגנו את הבעיה הזאת.

ב ע י ה

יש לנו לוח בעל m.n משבצות (בציור $\begin{matrix} m=4 \\ n=7 \end{matrix}$). בכל שורה נמצאות שתי דסקיות - אחת שחורה והשניה לבנה. שני אנשים משחקים לפי תור - אחד בדיסקיות הלבנות והשני בשחורות. במהלך אחד מותר למשחק להזיז את אחת הדסקיות השייכות לו, לפי בחירתו, ימינה או שמאלה באותה שורה בתנאי שלא יתנגש בקצה הלוח או בדסקית של היריב. למשל, במקרה שבציור יכול השחקן ה"לבן" להזיז את הדסקית בשורה הראשונה מקום אחד ימינה או עד שלושה מקומות שמאלה, את הדסקית בשורה שניה רק ימינה וכו׳. אסור לו, כמובן, להזיז יותרמדסקית אחת והוא חייב להזיז את אחת הדסקיות לפחות במקום אחד. ברגע שאחד השחקנים אינ׳ יכול להזיז אף דיסקית הריהו הפסיד את המשחק
מצא אסטרטגיה של משחק שתבטיח נצחון.



קבלנו פתרון מחיים אברבוך (תל-אביב).

פ ת ר ו ן

כפי שנראה אין זה משחק מזל כי אם משחק אשר נקבעות בו התוצאה מראש. הזוכה הוא זה שמצמצם את הרוחים שבין הכלים (מבחינת מספר משבצות) עד ל- 0.

מכאן ואילך על כל תזוזה של שחקן ב׳ ישחק שחקן א׳ כך שהרוח בין המשבצות יצטמצם שוב לאפס. ישנם מצבים מסוימים שבאם אחד השחקנים מגיע אליהם הוא זוכה במשחק. המצבים הזוכים במקרה של 3 טורים. 077, 167, 066, 055, 044, 033, 145, 022, 123, 011, 099, 189, 088.

מעל ל- 10 נעשה המשחק מסובך יותר.
האסטרטגיה לנצחון הוא הפיכת מספר המשבצות שמהוות את הרוחים למספרים לפי השיטה הבינרית ובדיקת מספר הספרות 1 בכל טור. באם הוא זוגי זהו מצב נצחון.

לדוגמה: בציור שלנו המספרים הם 3,0,3,2 דהינו

3 = 11		
0 = 00		
3 = 11		
2 = 10		
32		ס"ה

במקרה זה לא יכול המשחק הראשון להבטיח לעצמו נצחון. מאידך אילו היה המצב 1,0,4,5 אז יש

1 =	1	
0 =	0	
4 =	100	
5 =	101	
	202	ס"ה

ובמקרה זה יש אפשרות עבור המשחק הראשון להבטיח נצחון.
המשחק אינו איפוא אלא משחק "נים" הידוע. אמנם קיימת כאן האפשרות הנוספת שאחד המשחקים יתרחק מהשני, אבל אפשר תמיד לשני להפר את התחבולה הזאת ע"י זה שהוא יתקרב אליו באותה מידה ויחזיר את המרחק לערכו הקודם.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1. לכתב בצורה ברורה (או להדפיס).
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו, יחד עם הפתרונות לא יאוחר מ- 31.1.1971.
4. לציין על המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגריים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לאותה בעיה. השאלות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט׳ ו- י׳ לבד (אין פירוש הדבר שהן קלות).

421*(2) הוכח כי אין למצא מספרים שלמים x,y המקיימים $x^3 - 117y^3 = 5$.

422*(4) נתונה עוגה בצורת משולש עם צפוי של קרם מסביב לשפה ורוצים לחלק אותה בין ארבעה אנשים כך שכל אחד מהם יקבל מנה הוגנת של עוגו וגם של קרם. היאך היית מבצע את החלוקה?

423*(3) הוכח שקיימת בדיוק שיטת ספירה אחת אשר המספר המסומן בה ע"י 93 הוא מכפלה מדויקת של המספר המסומן ע"י 29, ולקבע את שיטת הספירה הזאת.

424*(3) לחשב את הסכום

$$1^2r + 2^2r^2 + 3^2r^3 + \dots + n^2r^n$$

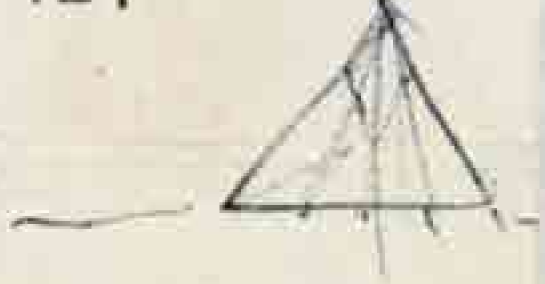
425*(3) N הוא מספר טבעי גדול מ-9, ובפתוחו העשרוני כל הספרות שוות זו לזו. הוכח כי N לא יוכל להיות רבוע משוכלל.

426*(2) מה יותר גדול, $\sqrt[22]{22!}$ או $\sqrt[23]{23!}$?

427 (3) לקבע את m כך שפתרונות המשואה

$$x^4 - (2m+3)x^2 + m^2x0$$

יהיו ממשיים ויהוו סדרה חשבונית.



428 (3) צלעות משולש אחד הן $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ וכל משולש שני הן $\sqrt{q^2+r^2}$, $\sqrt{r^2+p^2}$, $\sqrt{p^2+q^2}$. נתון גם ש-

, $a>p$ ‏ושׁ- $q^2r^2 + r^2p^2 + p^2q^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$
$b>q$. לאיזה מבין שני המשולשים יש שטח יותר גדול.

429 (3) לחשב את הסכום $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)! + k!}$ (הוצע ע"י אברהם גולדשטיין).

430 (4) E,D,C,B,A הם קדקדי מחומש משוכלל, ו- P נקודה כלשהי על הקשת הקטנה AB של המעגל החוסם את המחומש. הוכח כי

$$PE + PC = PA + PB + PD$$

431 (3) אם γ,β,α הם פתרונות המשואה $x^3+px+q = 0$, מצא את המשואה אשר פתרונותיה הם $\alpha+\beta\gamma$, $\beta+\gamma\alpha$, $\gamma+\alpha\beta$.

432 (4) הקדקד A של משולש ABC הוא נקודה קבועה של מעגל מסוים, ואילו הצלע BC היא מיתר משתנה של המעגל העובר דרך נקודה קבועה P . גובהי המשולש נפגשים ב- H . מצא את המקום של H .

433 (4) לשרטט, בקווים כלליים, את העקום המוגדר ע"י

$$y^4 + xy^2 + x^2 = 1$$

*434 (4) עבור $x,y,z,$ $a,b,c,$ מגדירים

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \ , \ p = (a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{\frac{1}{4}}$$

אם נתון ש-

$$\frac{a^2x^2}{a^2-r^2} + \frac{b^2y^2}{b^2-r^2} + \frac{c^2z^2}{c^2-r^2} = 0$$

אזי הוכח ש-

$$\frac{x^2}{b^2c^2-p^4} + \frac{y^2}{c^2a^2-p^4} + \frac{z^2}{a^2b^2-p^4} = 0$$

435 (5) נתונים n ווקטורים במישור, כלם מתחילים מהראשית ולכלם ערך מוחלט 1. נתון גם כי אי אפשר להעביר קו ישר דרך הראשית כך שכל n הווקטורים יימצאו מצד אחד ממנו. הוכח כי הערך המוחלט של הווקטור השקול אינו גדול מ- $(n-2)$.

פתרון הבעיות 391 - 405

391. מאחר שכל אחד מ-1970 המשפטים סותר את כל המשפטים האחרים ברשימה יהיה לכל היותר משפט אמיתי אחד. משתי האפשרויות - שיש משפט אמיתי אחד או שאין אף משפט אמיתי - רק הראשונה, הנכללת במשפט ה-1969 אינה סותרת את עצמה והיא הנכונה.

392. לפי משפט דה-מואבר

$$\cos 5\theta = \binom{5}{0} \cos^5\theta - \binom{5}{2} \cos^3\theta \sin^2\theta + \binom{5}{4} \cos\theta \sin^4\theta$$

עבור $\theta = \frac{\pi}{10}$ נקבל

$$\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 10\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos \frac{\pi}{10} \sin^4 \frac{\pi}{10} = 0$$

מאחר ש- $\cos^5 \frac{\pi}{10} \neq 0$ נוכל לחלק בו ונקבל

$$1 - 10 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \operatorname{tg}^4 \left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$$

393. אם נכתב (ξ,η,ζ) במקום $(x, 2y, 4z)$ נקבל

$$\xi + \eta + \zeta = 12$$
$$\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 44$$
$$\xi\eta\zeta = 48$$

יוצא ש- (ξ ,η ,ζ) הם שרשי המשואה

$$t^3 - 12t^2 + 44t - 48 = 0$$

ז.א. $(t-2)(t-4)(t-6) = 0$

יש לנו איפוא כי $(x. 2y, 4z)$ הם $2,4,6$ באיזה סדר שהוא ולכן הפתרונות הם

x =	2	2	4	4	6	6
y =	2	3	1	3	1	2
z =	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

.394 א. $1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 3(n-2) + \dots + n\cdot 1 =$

$$\sum_{u=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{u=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

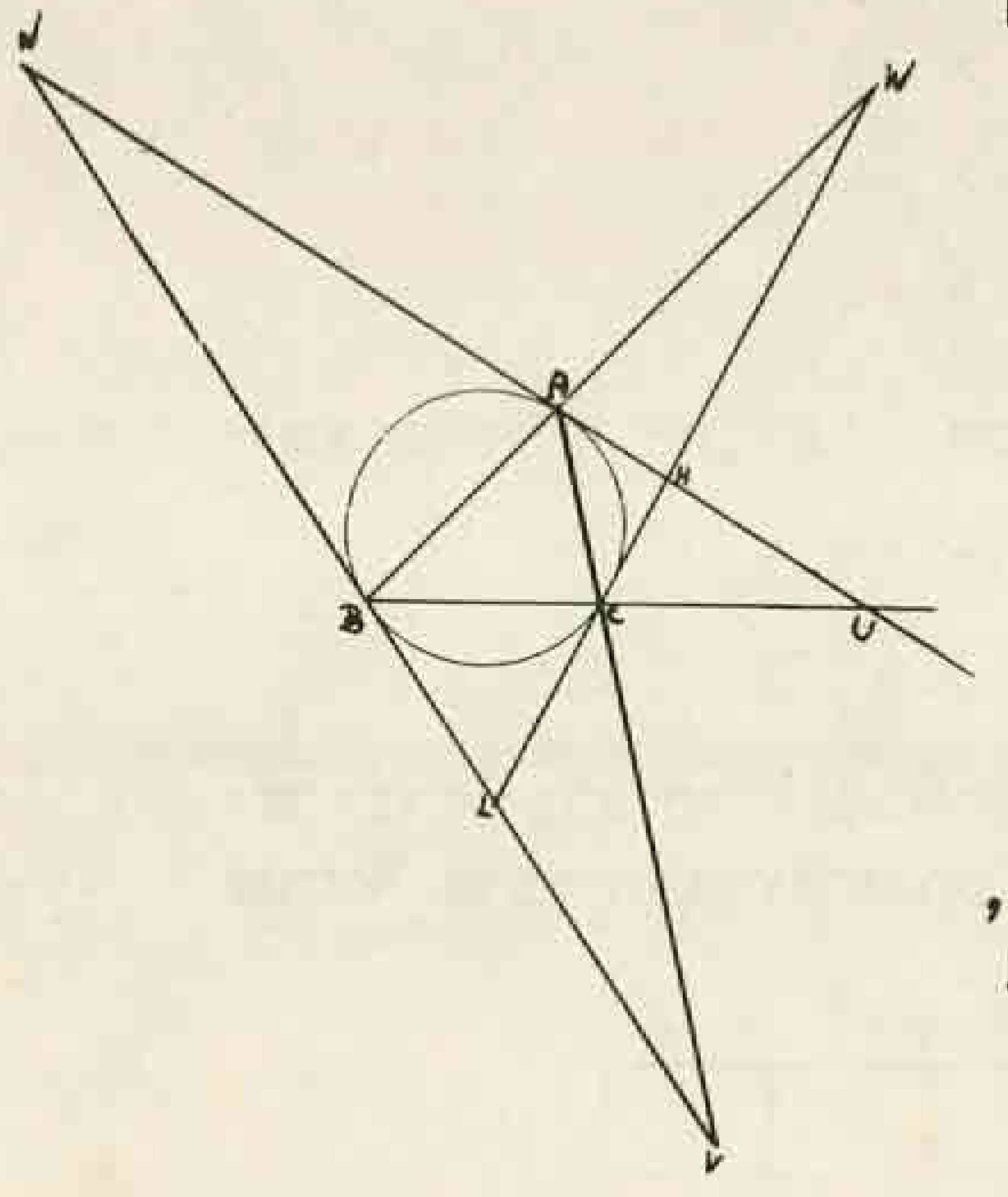
ב. לפי חלק א׳ ומשפט הממוצעים

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \sum_{u=1}^{n} k(n-k+1) > n[(n!)^2]^{\frac{1}{n}}$$

$$n! < \left(\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{6}}\right)^n < \left(\frac{\frac{(n+1)+(n+2)}{2}}{\sqrt{6}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+\frac{3}{2}}{\sqrt{6}}\right)^n < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$$

.395 תהי L נקודת החתוך של המשיק ב-B עם המשיק ב-C ; M נקודת החתוך של המשיק ב- A עם המשיק ב-C; ו- N נקודת החתוך של המשיק ב-A עם המשיק ב-B .



אזי $AN = NB$

$LB = LC$

$MA = MC$

לכן לפי משפט ציבא נפגשים AL , AM ו- CN בנקודה אחת, ולכן, לפי משפט דזרג נמצאות u, v , w על ישר אחד.

.396 בשאלה זו נפלה טעות דפוס - צריך היה להיות נתון $\cos 4\theta \neq 0$.

קל להוכיח באינדוקציה נוסחה עבור A_n

$$A_n = A_1 \frac{\cos n\theta}{\cos \theta}$$

$$A_{n+2} - 2A_{n+1}\cos\theta + A_n = A_1\left[\frac{\cos(n+2)\theta}{\cos\theta} - 2\cos(n+1)\theta + \frac{\cos n\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{A_1}{\cos\theta}\left[\cos(n+2)\theta - 2\cos(n+1)\theta\cos\theta + \cos n\theta\right]$$

$$= \frac{A_1}{\cos\theta}[\cos(n+1)\theta\cos\theta - \sin(n+1)\sin\theta - 2\cos(n+1)\cos\theta$$

$$+ \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin(n+1)\theta\sin\theta] = 0$$

.397 $\quad \operatorname{tg} nx_n = \frac{1}{x_n}$ וכיון ש- x_n חיובי הרי $0 < nx_n < \frac{\pi}{2}$.

אפשר לראות שהסדרה $\{nx_n\}$ היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י 2π . לכן סדרה זו מתכנסת.

$\lim_{n\to\infty}\{nx_n\}$ סופי

אולם $\quad nx_n = \frac{n}{\operatorname{tg} nx_n}$

וכדי שהמנה תהיה סופית עבור $n\to\infty$ חייב $\operatorname{tg} nx_n \to \infty$

כלומר $nx_n \to \frac{\pi}{2}$.

.398 עבור כל x ממשי יהיה

$$a_r x^2 + 2b_r x + c_r > 0 \qquad (r = 1,2,\ldots,n)$$

ולכן יהיה גם

$$\left(\sum_{r=1}^{n} a_r\right)x^2 + 2\left(\sum_{r=1}^{n} b_r\right)x + \sum_{r=1}^{n} c_r > 0$$

עבור כל x ממשי. מכאן שלנוסחה הרבועית האחרונה אין שרשים ממשיים, ולכן $\left(\sum_{r=1}^{n} b_r\right)^2 < \sum_{r=1}^{n} a_r \sum_{r=1}^{n} c_r$

.399 ע"י השואת שטח הפנים של הסרט

$$\frac{\pi}{4}(10^2 - d^2) = 2500\cdot 0.01$$

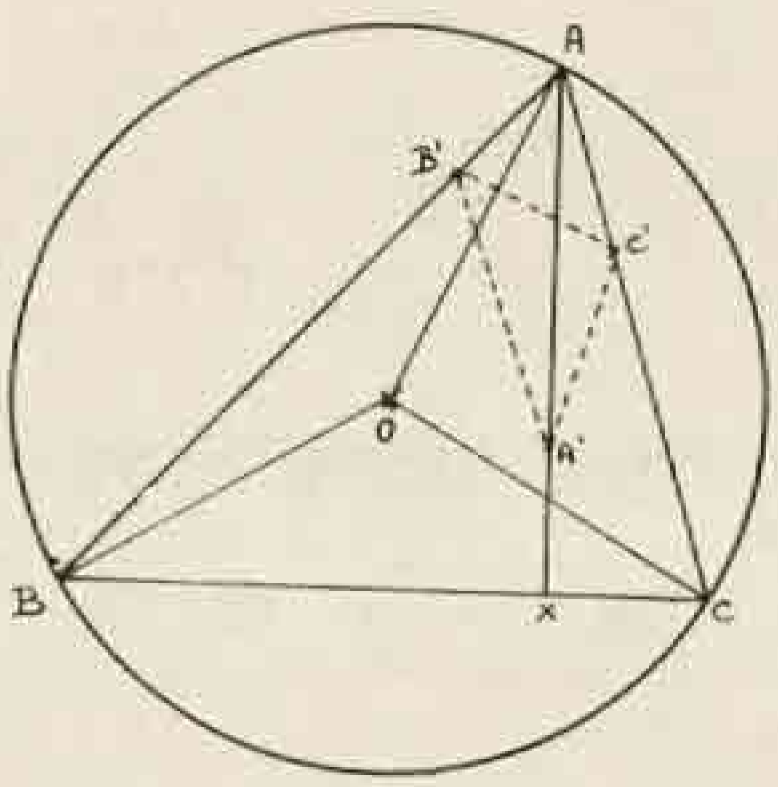
מכאן $\quad d = 8.26\ \text{cm}$

.400 יהי $y = x^5+x-10$. זוהי פונקציה מונוטונית עולה $y(1)=-8$
$y(2)= 23$ לכן קיים שורש חיובי אחד בין $x=1$ ו- $x=2$.
מאחר שהפונקציה היא מונוטונית עבור $-\infty<x<\infty$ זהו השורש
היחידי.

נניח עתה שקיים פתרון רציונלי $x=\frac{a}{b}$ (a,b מצומצמים). אזי

$$a^5 + ab^4 - 10b^5 = 0$$

שני האברים הראשונים מכילים את a כגורם ולכן גם $10b^5$
חייב להכילו כגורם. לכן a יכול להיות רק 5, 2, 1. שני
האיברים האחרונים מכילים את b כגורם ולכן b הוא גם גורם
של a^5 . וזה יתכן רק אם $b=1$. אולם $x=1$, $x=2$ ו-$x=5$
אינם פתרונות של המשואה הנתונה ולכן לא קיים פתרון רציונלי.



.401 נקח נקודה 'C כלשהי על AB
ונצייר 'C'B ניצב ל- AO
שיפגוש את AC ב- 'B.
מ-'C נקח ניצב ל- OB ומ- 'B
ניצב ל- OC שיפגשו ב- 'A.
הישר 'AA פוגש את BC ב- X.
קובעים Z,Y על AC , AB
בהתאמה ע"י זה ש- XY
ניצב ל- OC ו-ZX ל- OB .
נשאיר לקורא להוכיח שבמקרה
זה יהיה גם YZ ניצב ל- OA.

.402
$$4\sin x \sin y \sin z = \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) - \sin(x+y+z)$$

$$4\cos x \cos y \cos z = \cos(x+y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z)$$

לפי הנתון

$$\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} =$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

ולפי הנוסחאות הרשומות לעיל

$$\sin\frac{3\alpha-\beta-\gamma}{4} + \sin\frac{3\beta-\alpha-\gamma}{4} + \sin\frac{3\gamma-\alpha-\beta}{4} - \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} + \cos\frac{3\alpha-\beta-\gamma}{4} + \cos\frac{3\beta-\alpha-\gamma}{4} + \cos\frac{3\gamma-\alpha-\beta}{4}$$

נשתמש ב- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ונקבל

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\beta - \frac{\pi}{4}) + \sin(\gamma - \frac{\pi}{4}) - \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) + \cos(\gamma - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} - \frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}$$

מכאן $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$

.403 גם בשאלה זאת חל שבוש. המשואה צריכה להיות

$$x^4 - 7x^3 + px^2 - x + \lambda = 0$$

ואז $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 7$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = p$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \gamma\delta\alpha + \gamma\delta\beta = 1$$

ז.א. $\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = 1$

ע"מ ש- $\alpha\beta = \gamma\delta$ חייב להתקיים $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{\alpha\beta}$

כלומר $\alpha\beta = \frac{1}{7}$

וכיון ש- $\alpha\beta\gamma\delta = \lambda$ הרי $\lambda = \frac{1}{49}$

.404 נסמן $a = \cos\theta$. אזי

$$2c = 2a^2 - 2\frac{1}{3}a^3\cos 3\theta + \frac{2}{5}a^5\cos 5\theta + \dots =$$

$$a(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - \frac{a^3}{3}(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}) + \frac{a^5}{5}(e^{5i\theta}+e^{-5i\theta})$$

$$+ \ldots + = [ae^{i\theta} - \frac{(ae^{i\theta})^3}{3} + \frac{(ae^{i\theta})^5}{5} \ldots]$$

$$+ [ae^{-i\theta} - \frac{(ae^{-i\theta})^3}{3} + \frac{(ae^{-i\theta})^5}{5} \ldots]$$

$$= \operatorname{arctg} ae^{i\theta} + \operatorname{arctg} ae^{-i\theta}$$

אולם מאחר ש-

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

יוצא כי

$$2c = \operatorname{arctg} \frac{a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{1 - a^2}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{2a\cos\theta}{1 - a^2}$$

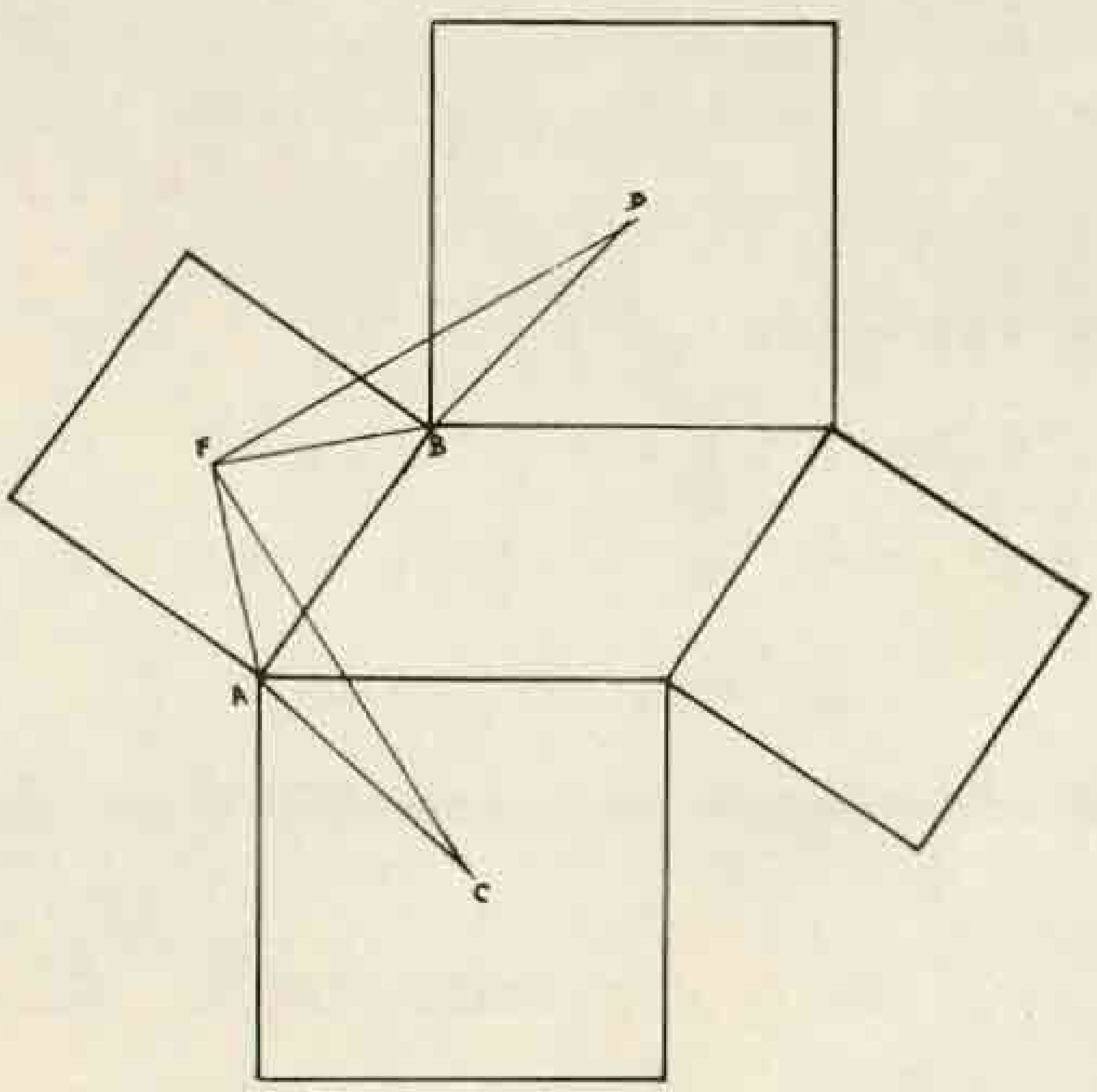
$$= \operatorname{arctg} \frac{2a^2}{1-a^2}$$

מכאן ש-

$$\operatorname{tg}(2c) = \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 2 \operatorname{ctg}^2\theta$$

.405



1. $EB = EA$
2. $BD = AC$
3. $\sphericalangle EBD = \sphericalangle CAE$

וזאת מכיון ש-

$$45^\circ = \sphericalangle HBE = \sphericalangle EAB$$

$$= \sphericalangle DBJ = \sphericalangle CAF$$

וכן $\sphericalangle JBH = \sphericalangle BAF$
(בין קוים מאונכים)

מכאן $\Delta EBD \cong \Delta EAC$

ולכן $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$

מכאן

$$\sphericalangle DEC = \sphericalangle BED + \sphericalangle BEC = \sphericalangle AEC + \sphericalangle BEC$$

$$= \sphericalangle BEA = 90^\circ$$

כלומר מרכזי הרבועים יוצרים מלבן. מההחפיפה מתקבל גם
$EC = ED$ לכן זהו רבוע.

רשימת פותרי הבעיות 391 - 405

אברבוך חיים	י"א	תיכון עירוני ט׳, ת"א	(7)
אברהם אוריאל	י"א	"אחד העם", פתח-תקוה	(3)
אהרנשטין חנה	י"ב	תיכון חרדי לבנות, ר"ג	(4)
בירקנטל יואל	י"א	תיכון עירוני ה׳, ת"א	(3)
בלסברג ישראל	י"ג	ישיבת הדרום, רחובות	(6)
גביש דן	י"א	בית הספר הריאלי, חיפה	(3)
גריזים יורם	י"א	"כל ישראל חברים", ת"א	(11)
דונגי רן	ט׳	תיכון "קוגל", חולון	(38)
האוזר אבי	י׳	בית הספר הריאלי, חיפה	(6)
ויניצקי אברהם	י"ב	"אהל שם", רמת-גן	(18)
וינרב מירון	י"ב	תיכון עירוני א׳, ת"א	(31)
חיימי-כהן רזואל	י"א	תיכון עירוני א׳, ת"א	(17)
כרמי משה	י"ב	תיכון עירוני א׳, ת"א	(38)
ליבנה רון	י׳	"אהל שם", רמת-גן	(21)
לין אבי		קרית מוצקין	(39)
ליניאל נתן	י"ב	בית הספר הריאלי, חיפה	(36)
מושקוביץ חיים	י"ב	תיכון עירוני דתי, רחובות	(16)
מזרחי סולי		נצרת עילית	(5)
מנבר עודי	י"א	תיכון קרית חיים	(22)
מרון דן	י"א	תיכון עירוני א׳, ת"א	(13)
מתיוביץ אהוד	י׳	בית הספר הריאלי, חיפה	(11)
סמואל גד	י"א	בית הספר הריאלי, חיפה	(9)
עופר אבי	ט׳	"כל ישראל חברים", ת"א	(8)
עיני אברהם	י"ב	"אוהל שם", רמת-גן	(40)
עליס עמירם	י"ב	תיכון עירוני ה׳, ת"א	(14)
עמיקם ארי		צהלה, ת"א	(39)
פיגנבלט יובל	י"א	תיכון עירוני ד׳, ת"א	(21)
פלח יואל	י"ב	"מרום ציון", ירושלים	(15)
פסקר שלמה	י"ב	תיכון עירוני א׳, ת"א	(33)
פרידמן יעקב		רמת-גן	(42)
פרמינגר ענב	י׳	"כל ישראל חברים", ת"א	(7)
קרמר אברהם	י"ב	"אחד העם", פתח-תקוה	(9)
רוזנבך טל-אורה	י"ב	תיכון עירוני ה׳, ת"א	(6)
רוכמן אהרון	י"ב	בית הספר הריאלי, חיפה	(33)
רוף שלמה	י"ב	בסמ"ת, חיפה	(5)
שדה אילן	י"א	תיכון עירוני ד׳, ת"א	(16)
שוחט חיים		צה"ל	(33)
שיינין אליעזר	י"ב	"מרום ציון", ירושלים	(5)
שייניננגר אורי		צה"ל	(25)
שניצר שרגא	י"ב	אורט, נתניה	(5)
שפיר עמוס		ירושלים	(26)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע רחובות

השבון בבנק הדאר מס' 4-23357-4

מחיר חוברת בודדת -.1 ל"י

מחיר חתימה ל-4 חוברות 3.50 ל"י

בע"מ רח' לילינבלום 11 תל-אביב 58600