גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים

כרך **4** | כסלו תשל"ב - נובמבר 1971 | מס' **6**

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

העורך: י. גילים

דבר המערכת

השורות האלה נכתבות לקראת ראש השנה, ואנו מאחלים לכל קוראינו שנת ברכה ושגשוג.

בחוברת הקודמת (מרץ 1971) מסרנו על התחרות המוקדמת של האולימפיאדה במתמטיקה-תשל"א. מאז התקיימה גם תחרות הגמר עם התוצאות הבאות:-

פרס ראשון: רן דונגי (חולון)

פרסי עידוד: ליאורה גושן (באר-שבע)
יובל פיגנבלט (תל-אביב)
גיל קלעי (ירושלים)

ציון לשבח: כרמל ערמון (חיפה)

אנחנו נותנים למטה את השאלון של תחרות הגמר.

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה - תשל"א

(מכון ויצמן למדע בשיתוף עם תכניות חסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ)

<u>תחרות הגמר</u> <u>י"ג ניסן, תשל"א - 8.4.71</u> <u>13.00 - 10.00</u>

(ענה על כמה שאלות שתרצה. המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה).

1. (10) חשב את הסכום $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{7r+1} + \sqrt{7r+8}}$

2. (12) הוכח כי $\sum_{n=1}^{96} (\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n)$ הוא מספר שלם.

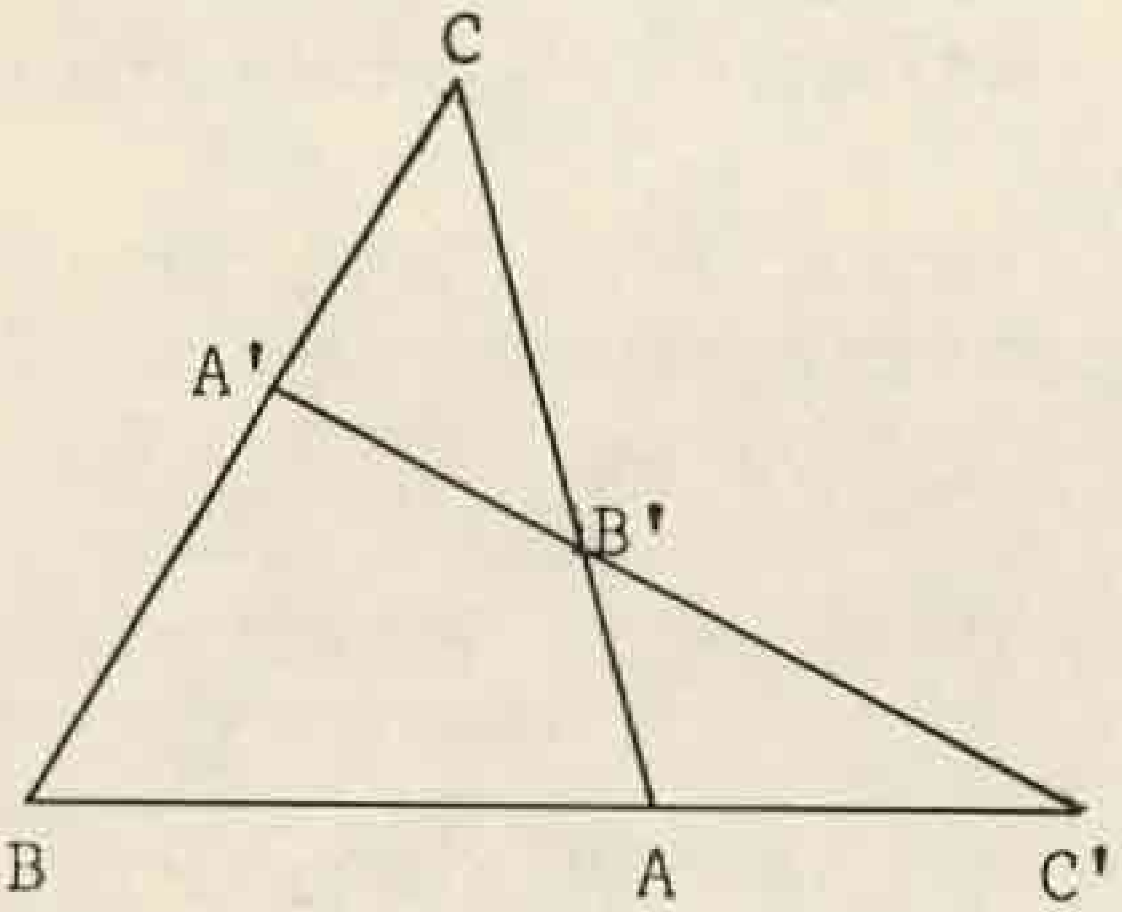
3. (13) מספרי פיבונצ׳י, F_n , מוגדרים ע"י

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2$$

ואילו $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ עבור $n > 2$.

הוכח כי ניתן להציג כל מספר טבעי N (פרט ל- $N=1$) כסכום של מספרי פיבונצ׳י שונים אשר מספרם אינו גדול מ- $\log_2 N$.

4. (13) הישר $A'B'C'$ חותך את צלעות המשולש ABC (או את המשכן) ב- A', B', C' (ראה ציור).



הוכח כי:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

5. (14) נתונה המשוואה $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^{3}x + 1 = 0$, לבדוק עבור אילו ערכים ממשיים של a יתקיימו פתרונות ממשיים.

6. (15) נתונה קבוצה של 101 מספרים טבעיים שונים, אשר כולם קטנים מ- 201. הוכח כי בהכרח נמצאים בקבוצה שני מספרים אשר אחד הוא כפולה של השני.

7. (15) במרובעים $ABCD$, $A'B'C'D'$ נתון:

א) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

ב) הצלעות AB, BC, CD, DA מהוות סדרה חשבונית

ג) הצלעות $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ מהוות סדרה חשבונית

הוכח כי:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

8. (17) המעגל החסום במשולש ABC נוגע בצלע BC בנקודה D , ו- DE הוא קוטר של המעגל. מעגל המגע החיצוני לצידה של BC נוגע ב- BC בנקודה F . הוכח כי A, E, ו- F חלות על קו ישר אחד.

9. (18) הוכח כי עבור כל a, b ממשיים

$$8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4$$

10. (21) עבור כל מספרים טבעיים n, k מגדירים

$$f(n,k) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} r^k$$

חשב $f(5,2)$, $f(5,3)$, $f(5,5)$, $f(4,4)$. חשב גם באופן כללי את הערך של $f(n,k)$ במקרים

(i) $k < n$

(ii) $k = n$

11. (25) במישור מסומנות נקודות הסריג (ז.א. נקודות ששיעוריהן הם מספרים שלמים). מחברים מספר סופי של הנקודות כדי ליצור מצולע (קמור או קעור) אשר אין צלעותיו חותכות זו את זו. יהי a מספר נקודות הסריג החלות על שפת המצולע (כולל קודקודיו), ו-b מספר נקודות הסריג הנמצאות בפנים המצולע.

הוכח כי שטח המצולע הוא:

$$\frac{1}{2}a + b - 1.$$

על בעית שטיינר-להמוס

מ. לויך (חיפה)

א. תולדות הבעיה

זה כמה פעמים הופיעו ב"גליונות" הוכחות למשפט: אם במשולש שני חוצי זויות שוות, המשולש שווה שוקים. (ראה למשל מרץ 1971) משפט זה שנמנעים מלהזכירו בבתי הספר ובספרי הלמוד משום שלעתים קרובות אין המורים או מחברי הספרים מכירים הוכחה למשפט ואשר אמנם אין לו הוכחה "שגרתית", הריהו בודאי המשפט בעל מספר ההוכחות הרב ביותר מבין כל משפטי הלפנימטריה האלמנטרית. מסתבר שיש למשפט גם הסטוריה בלתי שיגרתית והרי קיצורה:

ב-1840 שאל פרופסור להמוס מברלין את יעקב שטיינר, שהיה מגדולי הגיאומטרים של הזמן, במכתב בדבר הוכחה לטענה שאם במשולש שני חוצי זויות שווים המשולש הוא שווה שוקים. שטיינר אמנם מצא הוכחה ופרסם אותה ב-1844 וכך קבלה הטענה המתמיהה בפשטותה את השם רב היומרה: משפט שטיינר-להמוס. ב-1850 פרסם אף להמוס בעצמו הוכחה משלו למשפט. למרות זאת לא היה זה לא שטיינר ולא להמוס שפרסם את ההוכחה לראשונה אלא רוג'ון אשר פרסם את ההוכחה ב-1842 בכתב עת צרפתי כפתרון לבעיה שנתנה באותה שנה באותו עתון. מאז טפלו בבעיה רבים וביניהם מתמטיקאים ידועי שם. בסביבת 1850 הגיעה הבעיה לאנגליה ושם נוספה בין השאר הדרישה שההוכחה לא תהיה בדרך השלילה. מספר ההוכחות שהופיעו עד תחילת המאה הזאת היה רב ביותר, מהן מספר בלתי מבוטל של הוכחות לוקות ואף אחת מהן לא ישירה.

בולמוס ההוכחות הגיע לידי כך שב-1937 פרסם א. הנדרסון בכתב עת אמריקאי מאמר בשם: "מאמר על בעית חוצי הזויות במטרה למנע להבא כל מאמר על בעית חוצי הזויות." במאמר זה תאר "הוכחות" (בלתי נכונות) שונות וצרף עשר הוכחות נכונות.

ב-1940 פרסם מק-ברייד בכתב עת סקוטי מאמר המוקדש לבעיה לרגל מלאת לה מאה שנה ובו סקירה יסודית על הבעיה ועל תולדותיה עד אותו הזמן. הוא מתיחס לכששים הוכחות שונות ועומד על ההוכחות "הישירות" ומסתבר שכל אלה הטוענות ל-"ישירות" (כלומר שלא בדרך השלילה) אינן משיגות את המטרה מאחר שכפי שבצדק טוען מק-ברייד כל הוכחה המסתמכת באופן ישיר על משפט עזר אשר זה

האחרון מוכח בדרך השלילה אינה רשאית להחשב ל-"ישירה". כן הוא מביע השערה שהוכחה ישירה אינה בנמצא ועלולה לא להמצא לעולם. יש יסוד רב להשערה זאת מאחר שמשפטים יסודיים מסוימים של איקלידס מוכחים כולם בדרך השלילה ונראה הדבר שאין להוכיחה מבלי להזדקק לפחות לאחד ממשפטי היסוד הללו.

ב-1961 פרסם ה.ס.מ. קוקסטר הוכחה פשוטה (בדרך השלילה) בספרו **מבוא לגיאומטריה**. באותה שנה פרסם מרטין גרדנר הערכה נלהבת על ספרו של קוקסטר, ובה הביא לדוגמא את ההוכחה הפשוטה של בעית שטיינר-להמוס בתוספת הערה שעד אז היה הוא (גרדנר) מפנה את השואלים הרבים שפנו אליו אל מאמרו של הנדרסון (ראה לעיל)... כתוצאה ממאמרו של גרדנר הופצץ זה האחרון במאות הוכחות... הוא מיין אותן בשקידה רבה וברר מהן את זו שנראתה לו ביותר והיא הופיעה בירחון המתמטי האמריקאי ב-1963 בשמם של המחברים גילברט ומק-דונל. המעגל נסגר כאשר נתברר לאחר הפרסום שההוכחה שנבחרה בקפדנות רבה כל כך זהה עם זו שנתן להמוס בעצמו ב-1850... אך גם לאחר שהמעגל נסגר המשיכו לצוץ הוכחות חדשות לבקרים, בין השאר גם ב-"גליונות". בגליון של מרץ הופיעה הוכחה של י. וו. מלסביץ בטענה שהיא ישירה.

אלה תולדות הבעיה מראשיתה עד ימינו. מי שמעונין בבעית הישירות וכן בהוכחה נוספת "בלתי שגרתית" מוזמן להצטרף לפסקות הבאות.

ב. הוכחת מלסביץ

אין ספק שהטפול של מלסביץ מענין ואוריגינלי. אך הבה ננתח כמה נקודות שבהוכחתו כפי שהיא מובאת בגליון מס' 5:

1. $\dots,\ \Delta\, OMM_1 \cong \Delta\, ONN_1$.
המסקנה נכונה אך מתבססת על משפט החפיפה הרביעי. אך האם ידועה הוכחה ישירה למשפט החפיפה הרביעי?

2. $\dots,\ \sphericalangle EOC = \sphericalangle DOC$. מזה נובע ש- $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$
(בגליונות נפלה טעות דפוס). זה נכון, אבל על סמך מה? הזוית החיצונית במשולש שוה לסכום השתיים שאינן צמודות לה! וזה מתבסס על המשפט I.29 של אייקלידס: זויות מתאימות בין מקבילים שוות. ואיך מוכיחים זאת? אין שום הוכחה ישירה ידועה למשפט אייקלידס הנ"ל.

3) "...ולכן המשולשים ABE, ABD חופפים." כנראה שוב על סמך משפט החפיפה הרביעי. אבל אז יש להראות שהבסיס גדול מחוצי הזויות וזה לא נעשה. אך גם לאחר מלוי הלקוי הזה עדיין נשארת ההשגה בדומה ל-1).

4) "...המסקנה מידית." אמנם נכון; אך מה האסמכתא? כפי הנראה משפט I.6 של אייקלידס: אם שתי זויות במשולש שוות, המשולש הוא שווה שוקים. ואיך מוכיחים זאת? בדרך השלילה...

ג. משפט חפיפה

נציין כאן משפט חפיפה שמשום מה נעלם מעיני "ציידי המשפטים והבעיות" שאלמלא כך לא היתה מתעוררת בעית שטיינר-להמוס.

משפט: <u>שני משולשים חופפים לפי צלע, הזוית שממולה וחוצה אותה זוית.</u>

הוכחה: בשני המשולשים ABC ו- A'B'C' חוצי הזויות

$AD = A'D'$, $BC = B'C'$; $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'D'$.

נניח $BC \equiv B'C'$. אפשר להניח $90^\circ < \sphericalangle A'D'B' < \sphericalangle ADB$.

(למה אין צורך להניח $? < ADB = < A'D'B$)

AD חותך את A'D' בנקודה E . אזי $DE > D'E$.

A, A', C, E, B נמצאות כולן על המעגל החוסם. המיתר AE נשען על קשת קטנה מזו שעליה נשען A'E ולכן $AE < A'E$. אבל

$$AE = AD + DE > A'D' + D'E = A'E$$

וזאת סתירה ומכאן המשפט.

יהיה עתה נתון המשולש MM'L שבו $MN = M'N'$ חוצי הזויות. הם נחתכים בנקודה K . חוצה הזוית השלישית הוא LK. עתה מספיק להתבונן במשולשים LMN ו- LM'N' כדי להסיק את משפט שטיינר-להמוס.

ההוכחה האחרונה הופיעה בעתון המתמטי באנגליה ב-1969.

ספרות

1. ש. רייך, הוכחה. הגליונות כרך 4 מס' 3. 1971.

2. (י.וו. מלסביץ), חוצי זויות שווים. הגליונות כרך 4 מס' 5. 1971.

3. H. S. M. Coxeter, "Introduction to Geometry", John Wiley, New York, 1961.

4. M. Gardner, Mathematical Games, Scient. American 204 (April 1961) 164-175.

5. G. Gilbert and D. MacDonell, The Steiner-Lehmus Theorem. Amer. Math. Monthly 70 (1963) 79-80.

6. A. Henderson, An essay on the internal bisector problem to end all essays on the internal bisector problem. J. Elisha Mitchel Scient. Soc., (Dec. 1937).

7. M. Lewin, Another proof of the Steiner-Lehmus Theorem. Math. Gazette, 386 (1969) 399-400.

8. J. A. MacBride, The equal internal bisectors Theorem. 1840-1940. A centenary account. The Edinburgh Math. Notes No. 33 (1943) 1-13.

מדור מתקדם - קבוצות, פונקציות ומשפט על חזקות

עמוס ארליך (ירושלים)

ברשימתנו זאת נוכיח כי לכל ארבעה מספרים טבעיים a, v, u ו-b, ו- $a+b = s$, קיים $(s^u-a^u)^v + (s^v-b^v)^u \equiv s^{uv}$.

משפט זה הופיע, בנוסח שונה במקצת, בגליון קודם של "גליונות מתמטיקה" (כרך 4, מס' 5). ושם נתנו לו שתי הוכחות: האחת היא הוכחה בעזרת מושגים מתורת ההסתברות והשניה - בעזרת חשבון הדיפרנצאלי. הוכחתנו תשתמש במושגים מתורת הקבוצות. הוכחה נוספת זאת באה לא על מנת לעשות את המשפט "יותר נכון", אלא על מנת להדגים את השימוש בכמה מושגים מתימטיים פשוטים וחשובים, שעדיין לא זכו ליצוג הראוי בתכניות הלימודים של בתי הספר.

סדר הדברים ברשימתנו יהיה כדלקמן: תחילה נסקור כמה פעולות בקבוצות, אח"כ נדון במושג הפונקציה ובקבוצות של פונקציות. רעיונות נוספים על דבר פונקציות וקבוצות יאורגנו סביב הוכחת המשפט הידוע $(a^u)^v = a^{u \cdot v}$. בהמשך נוכיח את המשפט שבראש הרשימה, ולסיום נציע משפטים נוספים שאפשר להוכיחם בדרך דומה.

א. איחוד קבוצות

אם A ו- B הן שתי קבוצות אז $A \cup B$ היא הקבוצה הבנויה מן האיברים הנמצאים ב- A או ב- B או בשתיהן. לדוגמא, אם $A = \{1,2,3\}$ ו- $B = \{2,4,6,8\}$ אז $A \cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$.

אם בקבוצה A יש α איברים וב- B יש β איברים אז מספר האיברים שבקבוצה $A \cup B$ קטן או שוה ל- $\alpha+\beta$.

ב. חיסור קבוצות

אם הקבוצה B מוכלת בקבוצה A, כלומר, אם כל איבר של B הוא גם איבר של A, אז $A-B$ היא הקבוצה המתקבלת מ-A ע"י סילוק איברי B, לדוגמה: אם $A = \{1,2,3,4,5\}$ ו-$B =\{2,4\}$ אז $A-B = \{1,3,5\}$.

ג. מכפלה קרטזית של קבוצות

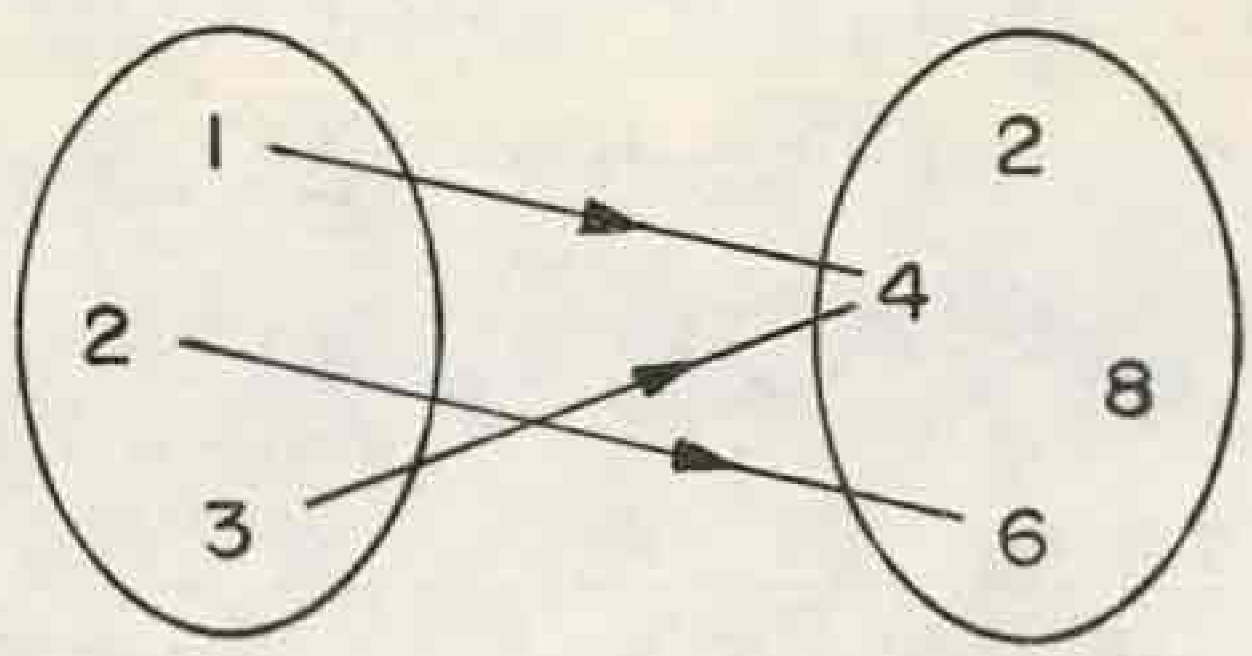
אם A ו- B הן שתי קבוצות אז $A\times B$ היא קבוצת הזוגות עם איבר ראשון מ-A ואיבר שני מ-B.

לדוגמא, אם $A = \{1,2,3\}$ ו- $B = \{4,5\}$ אז
$A\times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$.
לא קשה להווכח כי אם מספר איברי A הוא α ומספר איברי B הוא β אז מספר איברי $A\times B$ (כלומר - מספר הזוגות שבמכפלה הקרטזית) הוא $\alpha\cdot\beta$.

ד. פונקציות

פונקציה בנויה מקבוצה הנקראת "תחום", מקבוצה הנקראת "טוח" ומהתאמה המקשרת לכל איבר של התחום איבר אחד מן הטוח.

לדוגמא:



כאן משורטטת פונקציה שהתחום שלה הוא הקבוצה $A=\{1,2,3\}$, הטוח הוא הקבוצה $B = \{2,4,6,8\}$, וההתאמה מקשרת ל-1 את 4, ל-2 את 6 ול-3 שוב את 4.

הפונקציה ששורטטה כאן תקרא בשורות הקרובות בשם f (לסימון פונקציות מרבים להשתמש באותיות f, F, g, G, p ו- P).

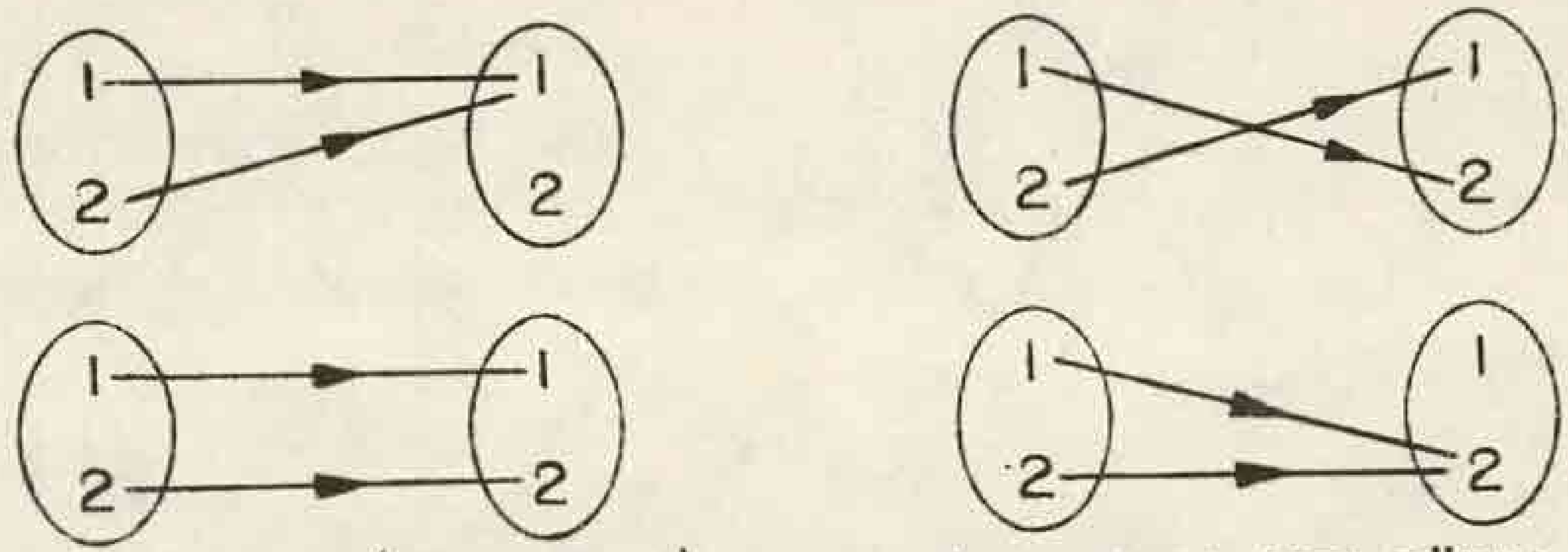
אם x נמצא בתחום של פונקציה f אז איבר-הטוח המותאם לו מסומן $f(x)$ (קרי: f של x) בדוגמתנו $f(1)=4$, $f(2)=6$ ו- $f(3)=4$.

התחום והטוח של f דלעיל יכולים לשמש גם אצל פונקציה אחרת. נסמן ב- g את הפונקציה.

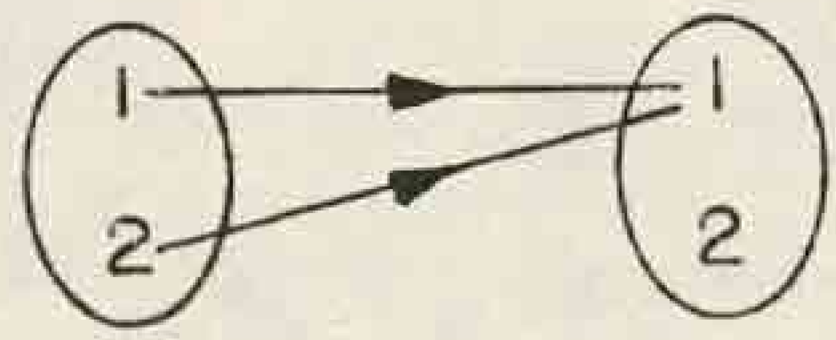
פונקציה זאת שונה מ-f שהרי $f(3)=4$ ואילו $g(3)=8$.
את קבוצת כל הפונקציות מהתחום A אל הטוח B נסמן $\{A\to B\}$.

ה. מספר האיברים בקבוצה $\{A \to B\}$

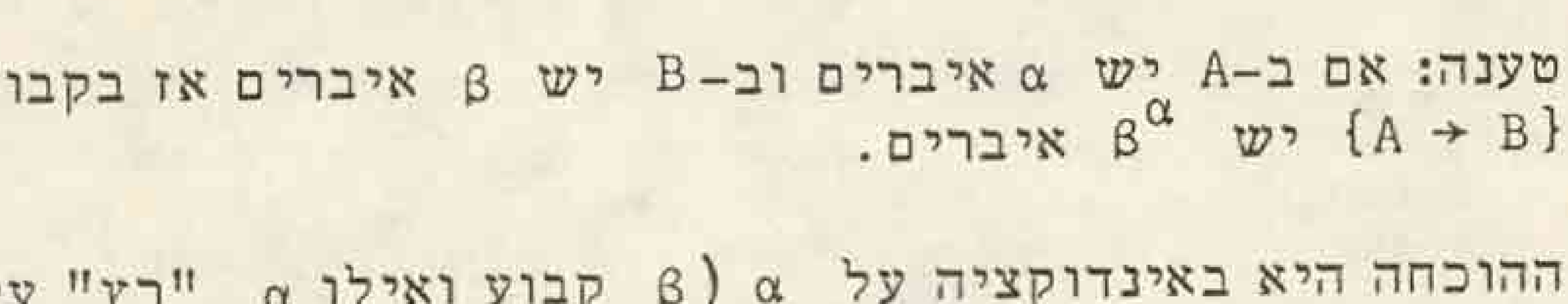
יהיו $A=\{1,2\}$ ו- $B=\{1,2\}$. הקבוצה $\{A \to B\}$ תכיל, אפוא, את הפונקציות הבאות:



ובס"ה יהיו בקבוצתנו 4 איברים (4 פונקציות).
אם נחליף את A בקבוצה $A'=\{1,2,3\}$ "תתפצל" כל אחת מהפונקצות דלעיל לשתי פונקציות שונות. לדוגמא, מהפונקציה



נקבל את הפונקציות



ומכאן ש- $\{A' \to B\}$ מכילה 8 איברים.

טענה: אם ב-A יש α איברים וב-B יש β איברים אז בקבוצה $\{A \to B\}$ יש β^{α} איברים.

ההוכחה היא באינדוקציה על α (β קבוע ואילו α "רץ" על שורת המספרים הטבעיים). השלב המכריע שבהוכחה נרמז בדוגמא שלעיל.

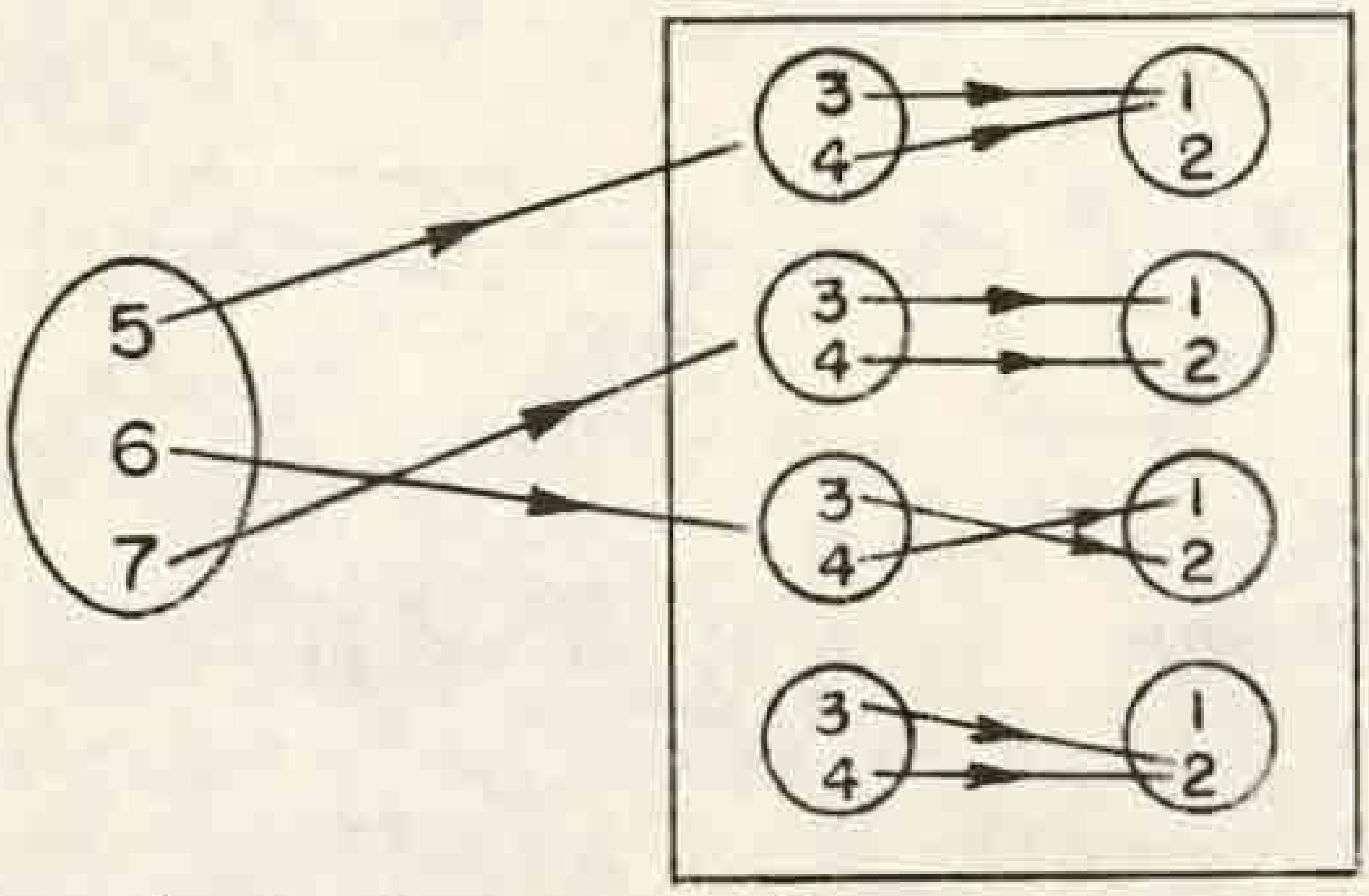
הערה: טענתנו מנוסחת בספרי קומבינטוריקה ישנים בצורה "מספר האפשרויות לשים α עצמים ב- β מגירות הוא β^{α}".

ו. $a^{u \cdot v} = (a^u)^v$

תהי A קבוצה בת a איברים, M בת u איברים ו- N בת v איברים. $\{M \to A\}$ היא קבוצה בת a^u איברים. קבוצת פונקציות זאת יכולה לשמש טוח לפונקציה חדשה שתחומה הוא הקבוצה N .

לדוגמא, אם $A = \{1,2\}$, $M = \{3,4\}$ ו- $N = \{5,6,7\}$.

אז

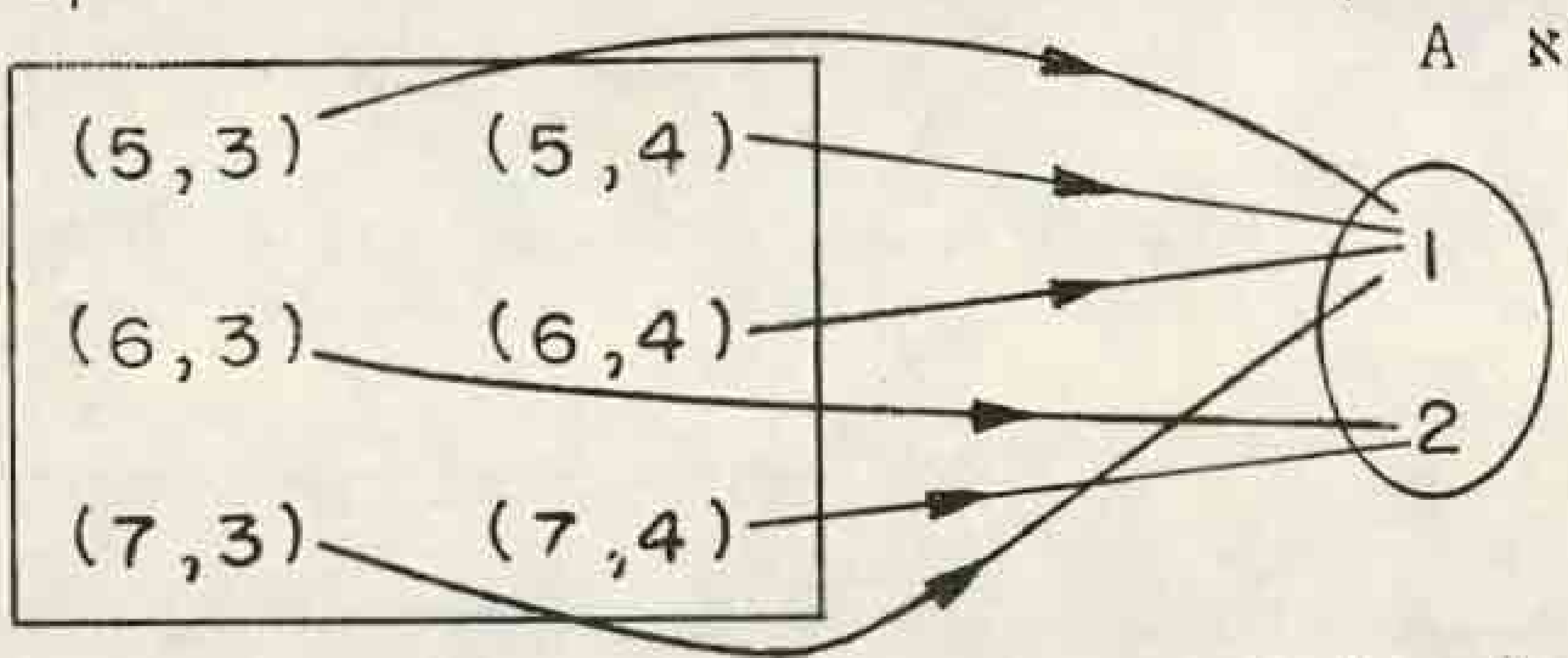


היא פונקציה שתחומה N והטוח שלה הוא $\{M \to A\}$.
קבוצת <u>כל</u> הפונקציות מטיפוס זה היא הקבוצה

$$\{N \to \{M \to A\}\}$$

ומספר איבריה הוא $(a^u)^v$.

נתבונן כעת בקבוצה $N\times M$ ונשתמש בה כבתחום לפונקציה שהטוח שלה הוא A



קבוצת כל הפונקציות מטיפוס זה היא הקבוצה

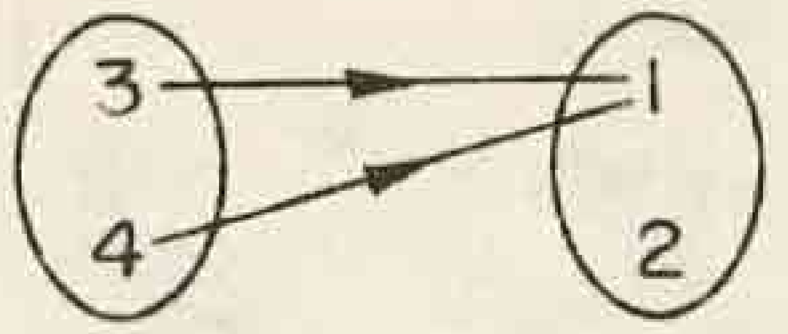
$$\{N \times M \to A\}$$

ומספר איבריה $a^{v\cdot u}$

אם נסדר את איברי הקבוצות $\{N \to \{M \to A\}\}$ ו- $\{N \times M \to A\}$ בזוגות, באופן שלכל איבר מהקבוצה האחד יהיה בן זוג יחיד בקבוצה האחרת, נוכיח בזאת כי לשתי הקבוצות מספר איברים שווה, כלומר - $(a^u)^v = a^{v\cdot u}$.

ובכך, נצא תחילה מפונקציה F השיכת לקבוצה $\{N \to \{M \to A\}\}$ ונראה שהיא יוצרת גם התאמה מהתחום $N \times M$ אל הטוח A .
יהיו n איבר של N ו-m איבר של M
n היא בתחום של F לכן $F(n)$ היא בטווח, כלומר - $F(n)$ היא פונקציה מהתחום M אל הטוח A . m נמצא, אפוא בתחום של $F(n)$ ולכן $F(n)(m)$ היא בטוח, שהוא A .

לדוגמא: אם F היא הפונקציה שבשרטוט הראשון אשר בסעיף זה
אז $F(5)$ היא הפונקציה



ו- $F(5)(3)$ הוא המספר 1.

בהינתן פונקציה F כלשהי מתוך $\{N \to \{M \to A\}\}$ נוכל ליצור פונקציה G מתוך $\{N \times M \to A\}$ ע"י זה שנרשום את $N\times M$ משמאל, את A מימין, ולכל זוג (n,m) נקשר את $F(n)(m)$ שב- A.

נחזור לדוגמתנו: אם F היא הפונקציה שבשרטוט הראשון אז בת זוגה G היא זו שבשרטוט השני.

אפשר להראות (תרגיל לקורא!) כי קשר זה שבין F ו-G הוא דו-סטרי, כלומר - בהנתן G אפשר למצוא את בן זוגו F. הקשר שבין בני הזוג ניתן ע"י התכונה:

לכל m מתוך M ולכל n מתוך N, $G(n,m) = F(n)(m)$.

ז. הוראת המשפט שבראש הרשימה

כל האמור עד כאן מצוי, במפוזר ובנוסחים שונים, בספרים רבים. בסעיף זה נעבור אל דבר החידוש שברשימתנו, והוא הוראת המשפט שבראש המאמר.

תהיינה M, N ו-S קבוצות בנות u, v ו- s איברים, ונפרק את S לשתי קבוצות A ו- B שבאחת a איברים ובשניה b (ואין להן איבר משותף).

נתבונן בפונקציה f כלשהי מן התחום M אל הטוח A. אם נוסיף לטוח גם את איברי B (בלי שיותאמו לשום איבר מהתחום M), נקבל פונקציה g מהתחום M אל הטוח S, בעלת התכונה:

לכל m, $g(m)$ בקבוצה A.

אם נתעלם מזה של- f ול-g טוחים שונים, ונשים לב רק לזה שלשתיהן אותו תחום ואותה התאמה, נוכל לזהות את f עם g.

באופן זה תהפוך $\{M \to A\}$ להיות חלק מהקבוצה $\{M \to S\}$. ע"י חיסור קבוצות נקבל את הקבוצה $\{M \to S\} - \{M \to A\}$, שהיא קבוצת כל הפונקציות g בעלות התכונה:

קים לפחות m אחד אשר $g(m)$ בקבוצה B. קבוצה זאת היא בעלת $s^u - a^u$ איברים.

הקבוצה $\{N \to (\{M \to S\} - \{M \to A\})\}$ תהיה, אפוא, בת $(s^u - a^u)^v$ איברים. נקרא לקבוצת פונקציות זאת בשם X.

בסעיף הקודם סידרנו את איברי הקבוצות $\{N \to \{M \to S\}\}$ ו- $\{N\times M \to S\}$ בזוגות באופן שלכל פונקציה מן הקבוצה האחת יש בן זוג יחיד בקבוצה השניה. X היא קבוצה חלקית ל- $\{N \to \{M \to S\}\}$. לכך יש לכל איבר שלה בן זוג בקבוצה $\{N\times M \to S\}$. לקבוצת בני-זוג אלה נקרא X^*. גם ב- X^* יהיו, איפוא $(s^u - a^u)^v$ איברים.

נחזור אל X. הפונקציה F נמצאת בקבוצה X אם, ורק אם, לכל n שב- N, $F(n)$ הוא בקבוצה $\{M \to S\} - \{M \to A\}$; כלומר - אם לכל n קים לפחות m אחד אשר $F(n)(m)$ בקבוצה B.

מכאן נובע שפונקציה G נמצאת ב-X^* אם ורק אם היא בעלת התכונה:

לכל n קים m אשר $G(n,m)$ בקבוצה B.

אם נחליף את תפקידי M ו- N זה בזה, ונחליף זה בזה גם את תפקידי A ו- B. נקבל את הקבוצה $\{M \to (\{N \to S\} - \{N \to B\})\}$ שתיקרא Y, ובה $(s^v - b^v)^u$ איברים.

הקבוצה המקבילה ל- Y ב- $\{N\times M \to S\}$ תסומן Y^*. מספר איברי Y^* הוא כמספר איברי Y.

פונקציה G נמצאת ב- Y^* אם ורק אם היא בעלת התכונה:

לכל m קים n אשר $G(n,m)$ בקבוצה A.

להשלמתה של הוכחת משפטנו עלינו להראות כי קבוצת האיחוד X^* Y^* היא הקבוצה $\{N\times M \to S\}$ שמספר איבריה $s^{v\cdot u}$.

ובכן, אם G אינה ב- X^* עליה להיות בעלת התכונה:-

קים n אשר לכל m, $G(n,m)$ בקבוצה A.

אם G אינה ב- Y^* עליה להיות בעלת התכונה:-

קים m אשר לכל n, $G(n,m)$ בקבוצה B.

אך שום פונקציה אינה יכולה להיות בעלת שתי תכונות אלו בעת ובעונה אחת, ומכאן שכל פונקציה מתוך $\{N{\times}M \to S\}$ שיכת או ל- X^* או ל- Y^* או לשתיהן. בזאת נשלמה ההוכחה.

ח. משפט "חזק" יותר

אחרי שהוכחנו כי $(s^u-a^u)^v + (s^v-b^v)^u \geqslant s^{uv}$ עולה השאלה <u>בכמה</u> גדול אגף שמאל מאגף ימין. תשובה מידית: במספר הפונקציות השיכות הן ל-X^* והן ל- Y^* (המשותפות לשתיהן). נגש, איפוא, לבנות פונקציות כאלה.

יהיו $N = \{1,2,3, \ldots,v\}$ ו- $M = \{1,2,3, \ldots, u\}$.
נסדר טבלה דומה ללוח הכפל, שבשוליה השמאליים כתובים איברי N. בשוליה העליונים כתובים איברי M , ובגוף הטבלה מופיעים איברי $N{\times}M$ המתאימים.

לדוגמא: אם $v=4$ ו- $u=5$ אז הטבלה היא

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)

לחלק מן הזוגות שבטבלה נצמיד תויות שכתוב עליהן "A" או "B". דבר זה ייעשה בדרך הבאה:

הזוג $(1,1)$ לא יקבל כל תוית. שאר הזוגות שבשורה העליונה, פרט לזוג $(1,i)$ כלשהו, יקבלו תויות "A" ; ושאר הזוגות שבעמוד השמאלי, פרט לזוג $(j,1)$ אחד, יקבלו תויות "B". הזוג $(1,i)$ יקבל תוית "B" וזוג אחר (k,i) הנמצא באותו עמוד יקבל "A". הזוג $(j,1)$ יקבל תוית "A", וזוג פנוי אחר בשורה שלו יקבל תוית "B".

טבלת התויות תראה, למשל, כדלקמן:

```
-AAAB
B---A
AB---
B----
```

וכך קבלנו שבכל שורה קים זוג בעל תוית "B" ובכל עמוד קים זוג בעל תוית "A".

(הערה: סידור תויות כמתואר כאן אפשרי בכל מקרה בו u ו-v גדולים מ-1, ולפחות אחד מהם גדול מ-2, אך המסקנות אליהן נגיע בסוף נכונות גם עבור u ו-v אחרים).

לכל זוג בעל תוית "A" נתאים איבר מתוך A, לכל זוג בעל תוית "B" נתאים איבר מתוך "B", ולזוגות חסרי תויות נתאים איברים מ- S (בלי להבחין בין איברי A ואיברי B). באופן זה נקבל פונקציה מ- NxM אל S השייכת הן ל-X^* והן ל-Y^*.

יתר על כן, מכיון שיש לנו u זוגות בעלי תויות "A", v זוגות בעלי תויות "B" ו- $u\cdot v-u-v$ חסרי תויות, נוכל לבנות $a^u\cdot b^v\cdot s^{u\cdot v-u-v}$ פונקציות כאלה.

יתר על כן, אם במקום i ו- j שבחרנו לעיל נבחר i ו-j אחרים נקבל פונקציות אחרות. בחירת שני המספרים i ו-j יכולה להיעשות ב- $(v-1)\cdot(u-1)$ אופנים שונים, וכך יהיו לנו $(u-1)(v-1)a^u\cdot b^v\cdot s^{uv-u-v}$ פונקציות המשותפות ל- X^* ול- Y^*.

ולכן $s^{u\cdot v}+(u-1)(v-1)a^ub^vs^{uv-u-v} > (s^u-a^u)^v+(s^v-b^v)^u$.

אם נחלק את שני האגפים ב- $s^{u\cdot v}$, ונסמן $p=\frac{a}{s}$ ו- $q=\frac{b}{s}$ נקבל את המשפט: אם $p+q=1$ ו- p ו- q חיוביים אז

$$(1-p^u)^v+(1-q^v)^u > 1+(u-1)(v-1)\cdot p^u\cdot q^v$$

הערה: בסעיף זה לא מיצינו את כל האפשרויות לחזק את המשפט.

ט הגדלת מספר המשתנים

בדרך דומה לזו בה הוכחנו את המשפט שבראש הסעיף, אפשר להוכיח משפטים במספר גדול יותר של משתנים. לדוגמא:

לכל שבעה טבעיים w, u, v, s, a, b ו- c;
אם a, b ו- c קטנים מ- s וסכומם 2s, אז

$$(s^{uv}-a^{uv})^w+(s^{wv}-b^{wv})^u+(s^{wu}-c^{wu})^v > s^{wuv}.$$

משפטי קיום

לפעמים במתמטיקה אנו נתקלים בצורך להוכיח שמשהו קיים. למשל ידוע לנו כי אין מספר z , אפילו מרוכב, המקיים $2^z=0$. מאידך אפשר להוכיח כי לכל משואה בצורת $a_0z^n + a_1z^{n-1} \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ קיים פתרון. ישנם שני סוגי משפטי קיום. הראשון מוכיח כי משהו נמצא, אבל בלי להציג אותו או להראות לנו איך לחשב אותו, והשני המוכיח את קיומו של משהו ע"י זה שהוא מציג אותו בפנינו, או נותן לפחות שיטה לחשב אותו. לכמה מטרות, בכלל הסיפוק האינטלקטואלי, עדיפה הוכחה מהסוג השני. את כל המושגים האלה ננסה להבהיר ע"י שתי דוגמאות.

הדוגמה הראשונה פשוטה מאד, והיא קיום פתרון למשואה $x^3-8=0$. אפשר להגיד כי הפונקציה $f(x) = x^3-8$ חיובית עבור x גדול וחיובי, $f(0) < 0$, ו- $f(x)$ רציפה. מכאן שקיים איזה x חיובי כך ש- $f(x) = 0$. החסרון של ההוכחה הזאת הוא בכך שאיננה מאפשרת לדעת מה ערך הפתרון. מאידך אפשר לאשר בקלות כי $f(2)=0$ ולכן $x = 2$ הוא פתרון. ההוכחה הטריביאלית השניה גם מציגה את הפתרון.

ועכשיו נעבור לדוגמה פחות טריביאלית. אם נסתכל בקבוצה (19,1,7,4,12,6,2,3,9,5) נראה כי אפשר ללקט ממנה קבוצה "יורדת" כמו (19,7,6,2) או קבוצות "עולות" כמו (1,4,6,9) או (1,2,3,5). המשפט הכללי אומר:-

מכל קבוצת מספרים שונים בעלת יותר מ-n^2 איברים (n מספר טבעי כלשהו) אפשר ללקט קבוצה מונוטונית (עולה או יורדת) בעלת יותר מ-n איברים. למשפט הזה נציג שתי הוכחות.

<u>הוכחה ראשונה</u>: תהיה הקבוצה $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_k)$ כש-$k>n^2$. לכל איבר a_i ניחס שני מספרים טבעיים p_i, q_i. הראשון הוא האורך של הקבוצה העולה המירבית שאפשר ליצר החל מ- a_i, ו- q_i הוא אורך הקבוצה היורדת המירבית. למשל, בדוגמה למעלה, $p_1 = 1$ מאחר שאין קבוצה עולה המתחילה מ-19 פרט ל-19 עצמו. מאידך $q_1 = 4$ מאחר שאפשר ליצר (19,7,6,2), ואילו אין קבוצה יורדת מ-19 עם יותר מ-4 איברים. כמו כך $p_2 = 4$ אבל $q_2 = 1$ (למה?). כמו כך רואים כי $p_3=3$ [(7,6,2) או (7,4,3) וכו']. ואילו $q_3=2$ [(7,9) או (7,5)] . עכשיו נראה כי עבור $i \neq j$ לא יתכן שגם $p_i = p_j$ ו- $q_i = q_j$, כי נניח ש-$i < j$ ו- $a_i < a_j$.

יש קבוצה עולה מ-a_j בעלות אורך p_j . אם נצרף לה את a_i משמאל נקבל קבוצה עולה מ-a_i בעלת אורך p_j+1 ולכן $p_i \ge p_j+1$ ז.א. $p_i > p_j$. כמו כן אם $i < j$ ו-$a_i > a_j$ רואים כי $q_j > q_i$. יוצא כי אין שני זוגות (p_i,q_i), (p_j,q_j) זהים. אבל אם אין קבוצה מונוטונית ארוכה מ-n הרי אז יהיו $p_i \le n$, $q_i \le n$ $(i=1,2,\dots,k)$, ולכן מספר הזוגות השונים האפשריים לא יעלה על n^2. אם $k > n^2$ מקבלים סתירה, וזאת ההוכחה. הוכחה זו, אם כי היא יפה, אינה מציגה את הקבוצות המונוטוניות הארוכות.

<u>הוכחה שניה</u>: לכל קבוצת מספרים שונים נגדיר "פעולה S ", והיא לקחת את האיבר השמאלי, האיבר הראשון מימין לו שהוא קטן ממנו, וכו׳, כל עוד אפשרי הדבר. למשל, בקבוצה דלעיל, פעולה S היתה לוקחת (19, 1) . נקרא לקבוצה שנבחרה ככה S_1 , נמחוק את איבריה מהקבוצה המקורית, ונפעיל את פעולה S על השאר. הפעם נקבל (7,4,2). נקרא לקבוצה השניה הזאת S_2, ונמחוק גם את איבריה. נמשיך ונקבל, במקרה המיוחד דלעיל, $S_3 = (12,6,3)$, $S_4 = (9,5)$. במקרה הכללי ממשיכים עד שממצים את כל הקבוצה. יהיו הקבוצות החלקיות שנוצרו בשיטה זו S_1, S_2, S_3, ..., S_t. אם אחת הקבוצות היורדות האלה ארוכה מ- n , הרי פתרנו את הבעיה. אחרת הכרחי ש-$t > n$; כי הרי t קבוצות, אשר באף אחת מהן אין יותר מ- n איברים, ממצות את הקבוצה המקורית שהיו בה יותר מ-n^2 איברים. עכשיו נראה שנוכל תמיד למצא קבוצה עולה בעלת t איברים ע"י בחירת איבר מתאים מכל S_i $(1 \le i \le t)$. במקרה שלנו יש $S_1 = (19,1)$, $S_2 = (7,4,2)$, $S_3 = (12,6,3)$, $S_4 = (9,5)$ ונוכל לקחת (1,2,3,5). באופן כללי יהיו כל איברי S_2 גדולים מהאיבר האחרון של S_1, כי אחרת היה אפשר להאריך את S_1 , ובאופן כללי יהיו כל איברי S_{p+1} גדולים מהאיבר האחרון של S_p . אם ניקח את האיבר האחרון של כל S_p $(1 \le p \le t)$ נקבל קבוצה עולה בעלת t איברים.

ההוכחה השניה עדיפה על הראשונה בזה שאין היא רק מוכיחה את קיומה של הקבוצה המבוקשת, אלא גם נותנת שיטה אופרטיבית כדי למצא אותה.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:-

1. לכתב בצורה ברורה (או להדפיס)
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו, ולהחזירו למערכת, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ-31.12.71.
4. לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

*451 (2) הוכח כי נמצאים לפחות שני בני אדם בעולם בעלי אותו מספר ידידים.

*452 (2) בסדרה $t_1, t_2, \ldots$ קיים $t_{n+2}=\frac{t_{n+1}}{t_n}$, $(n=1,2,\ldots)$, ו- P_n הוא מכפלת n האיברים הראשונים של הסדרה.
נתון כי $P_{40} = P_{80} = 8$, חשב t_1, t_2.

453 (3) D הוא נקודה פנימית כלשהי במשולש ABC ו- d_a, d_b, d_c הם המרחקים מ- D לצלעות a,b,c של המשולש בהתאמה. h_a, h_b, h_c הם הגבהים מ- a,b,c בהתאמה. הוכח כי

$$27d_ad_bd_c \le h_ah_bh_c$$

(הוצע ע"י אבי סיגלר)

454 (3) לבנות משולש כשנתונים מרכזי המעגל החוסם, המעגל החסום, ואחד המעגלים החסומים מבחוץ (הוצע ע"י סרג'יו הרט).

455 (3) נתונים במרחב שני ישרים b,a ונקודה P כש-a מקביל למישור (Pb), ו- b למישור (Pa). הוכח כי a מקביל ל- b. (הוצע ע"י ד"ר א. כרוך).

456 (3) נתונים שני ישרים במרחב, ניצבים זה לזה, כשהמרחק הקטן ביניהם הוא n. הנקודה A נעה על אחד הישרים ו- B על השני כך שהמרחק AB נשאר קבוע, $(m > n)$. אם M הוא האמצע של הקטע AB, למצא את המקום ההנדסי של M.
(הוצע ע"י ד"ר א. כרוך).

457 (2) נתונים n מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ואנו מסמנים ב- A_R
את הסכום של כל הממוצעים החשבוניים שאפשר ליצר מקבוצות
של R מבין n המספרים. לחשב את $\sum_{k=1}^{n} A_k$
(הוצע ע"י אריה ליזרוביץ)

458 (3) נתון כי הפונקציה הרציפה f מקיימת

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

עבור כל x,y. למצא את $f(x)$ (הוצע ע"י אריה ליזורביץ)

459 (3) הוכח כי אם α הוא פתרון של המשואה

$$x^4 + kx^3 - 6x^2 - kx + 1 = 0$$

אזי יהיו $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, -\frac{1}{\alpha}$ גם כן פתרונות.

460 (4) אם a,b,c הם צלעות משולש, ו- r הרדיוס של המעגל
החסום בו אזי

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \le \frac{3}{4r^2}$$

461 (4) במשולש ABC, $\measuredangle A$ הוא זוית ישרה, $BC = a$, ו- h הוא
הגובה מ- A ל- BC. היתר BC מחולק ל-$(2n+1)$ חלקים
שווים ע"י הנקודות $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$. הוכח כי

$$tg\ (\measuredangle P_n A P_{n+1}) = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{h}{a}$$

462 (5) במשולש ABC מסמנים ב- a,b,c את הצלעות BC, CA, AB
בהתאמה, r הוא הרדיוס של המעגל החסום במשולש, ו- R
הרדיוס של המעגל החוסם אותו. הוכח כי

(i) $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

(ii) $$(ab)^{\cos C} + (bc)^{\cos A} + (ca)^{\cos B} \le 2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) - \frac{r}{R}$$

*463 (3) הוכח כי אין למצא מספרים חיוביים, שונים זה מזה, המקיימים

$$x^3 + y^3 = z^3 + w^3$$

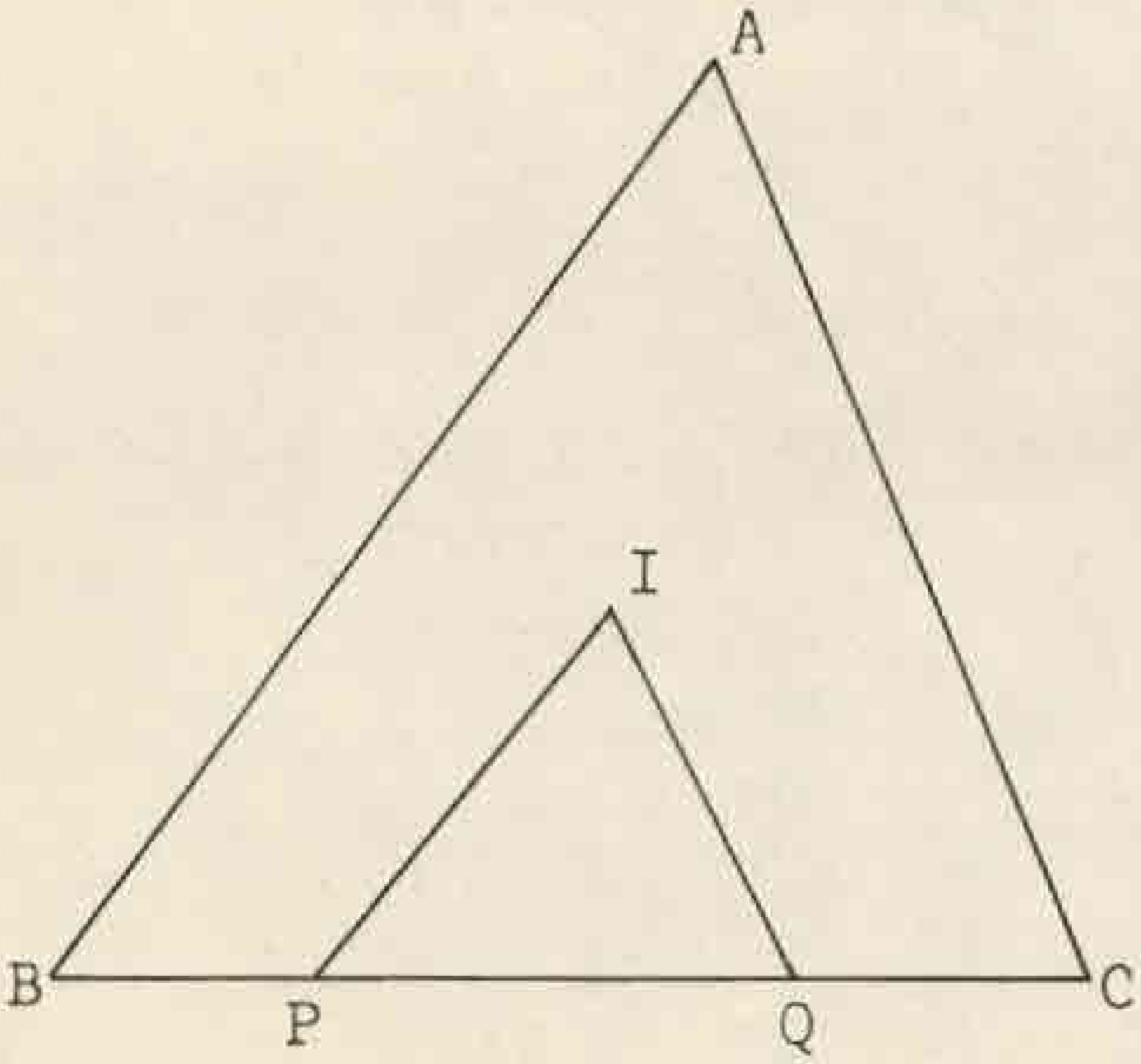
$$x + y = z + w$$

464 (5) הוכח כי אפשר לכסות כל עקומה שאורכה 1 ע"י מלבן בעל שטח $1/4$.

465 (4) לחשב $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{i+j}$

פתרון הבעיות 421-435

.421 אילו היה קיים פתרון אזי היה $x^3 \equiv 5 \pmod 9$. אבל מאחר שלכל x יש אחת הצורות $3m$, $3m \pm 1$, אנו רואים כי $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$.



.422 יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש ABC, ו-r רדיוס המעגל. עבור כל קטע PQ של היקף המשולש יהיה $S_{IPQ} = \frac{1}{2}r \cdot PQ$. לכן אם נחלק את ההיקף ל-4 חלקים שווים ונחבר את נקודות החלוקה עם I, נקבל את הפתרון.

שני פותרים הציעו רעיון מקורי לחלק את העוגה ע"י מישורים אופקיים ל-4 פרוסות זהות. הפותרים האלה קבלו זכוי מלא עבור פתרונם, שהיה נכון, אם כי לא הפתרון הצפוי.

.423 בכל בסיס שהוא קיים $\frac{90}{30}=3$ $< \frac{93}{29}$ וגם $5=\frac{(10)0}{20} > \frac{93}{29}$ ולכן במקרה שלנו, יהיה $4=\frac{93}{29}$. יהיה r הבסיס.
אזי $9r + 3 = 4(2r+9)$, ו- $r = 33$.

.424 יהיה
$$S = 1^2r + 2^2r^2 + \dots + n^2r^n$$
$$rS = 1^2r^2 + 2^2r^3 \dots + (n-1)^2r^n + n^2r^{n+1}$$

ולכן
$$(1-r)S = r + 3r^2 + 5r^3 + \dots + (2n-1)\, r^n - n^2r^{n+1}$$

$$r(1-r)S = r^2 + 3r^3 + \dots + (2n-3)r^n + (2n-1)r^{n+1} - n^2r^{n+2}$$

ולכן

$$(1-r)^2S= r+2r^2+2r^3+...+2r^n-(n^2+2n-1)r^{n+1} + n^2r^{n+z}$$

$$= -r \{\frac{2(1-r^n)}{1-r}-1\} - (n^2+2n-1)r^{n+1} + n^2r^{n+2}$$

ומכאן

$$S=\frac{n^2r^{n+2} - (n^2+2n-1)r^{n+1}-r}{(1-r)^2} + \frac{2r(1-r^n)}{(1-r)^3}$$

.425 לכל מספר x יש הצורה $x = 50m \pm \ell$, $0 \le \ell \le 25$
ואז $x^2 = 2500m^2 \pm 100m\ell + \ell^2 \equiv \ell^2 (\mathrm{mod}\ 100)$

מכאן ששתי הספרות האחרונות של x^2 זהות עם אלה של ℓ^2. אם נבדק את 26 האפשרויות עבור ℓ^2 נראה כי האפשרות היחידה ששתי הספרות האחרונות יהיו שוות היא $\ell = 12$, ו-x^2 נגמר ב-44. מכאן שאם כל הספרות של x^2 זהות, חייבת x^2 להיות מהצורה 44 ... 44. אבל אז x זוגי, נגיד $x = 2y$, ונקבל $y^2 = 11 \ldots 11$, דבר שראינו כבר שהוא בלתי אפשרי.

.426

$$\left[\frac{(23!)^{\frac{1}{23}}}{(22!)^{\frac{1}{22}}}\right]^{22\cdot 23} = \frac{(23!)^{22}}{(22!)^{23}} = \frac{23^{22}}{22!} > 1$$

ולכן

$$.(23!)^{\frac{1}{23}} > (22!)^{\frac{1}{22}}$$

.427 נפלה כאן שגיאת דפוס והמשואה היתה צריכה להיות

$$x^4 - (2m+3)x^2 + m^2 = 0$$

יהיו השרשים $3d$, d, $-d$, $-3d$ ואז

$$10d^2 = 2m + 3 \ , \ 9d^4 = m^2$$

ומכאן

$$m = \pm 3d^2 = \pm \frac{3}{10} (2m+3)$$

ולכן $m = \frac{9}{4}$ או $m = -\frac{9}{16}$

היו פותרים שניסו לפתר את המשואה $x^4 - (2m+3)x + m\ x = 0$,
ומאחר שניתן היה לפרש את הנוסח המשובש גם בצורה זו הוענק
לפותרים אלה זכוי מלא.

.428 עבור משולש עם צלעות h, k, ℓ אנו יודעים מנוסחת הירון
שהשטח הוא

$$\frac{1}{4}\sqrt{2(k^2\ell^2+\ell^2h^2+h^2k^2)-(h^4+k^4+\ell^4)}$$

במקרה של המשולש הראשון בבעיה לפנינו, יהיה השטח

$$\frac{1}{4}\{2[(b^2+c^2)(c^2+a^2)+(a^2+b^2)(b^2+c^2)+(c^2+a^2)(a^2+b^2)]-$$

$$-[(b^2+c^2)^2+(c^2+a^2)^2+(a^2+b^2)^2]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}$$

בדרך דומה יהיה שטח המשולש השני $\frac{1}{2\sqrt{2}}(q^2r^2+r^2p^2+p^2q^2)^{\frac{1}{2}}$
ולכן שני המשולשים שווים.

.429

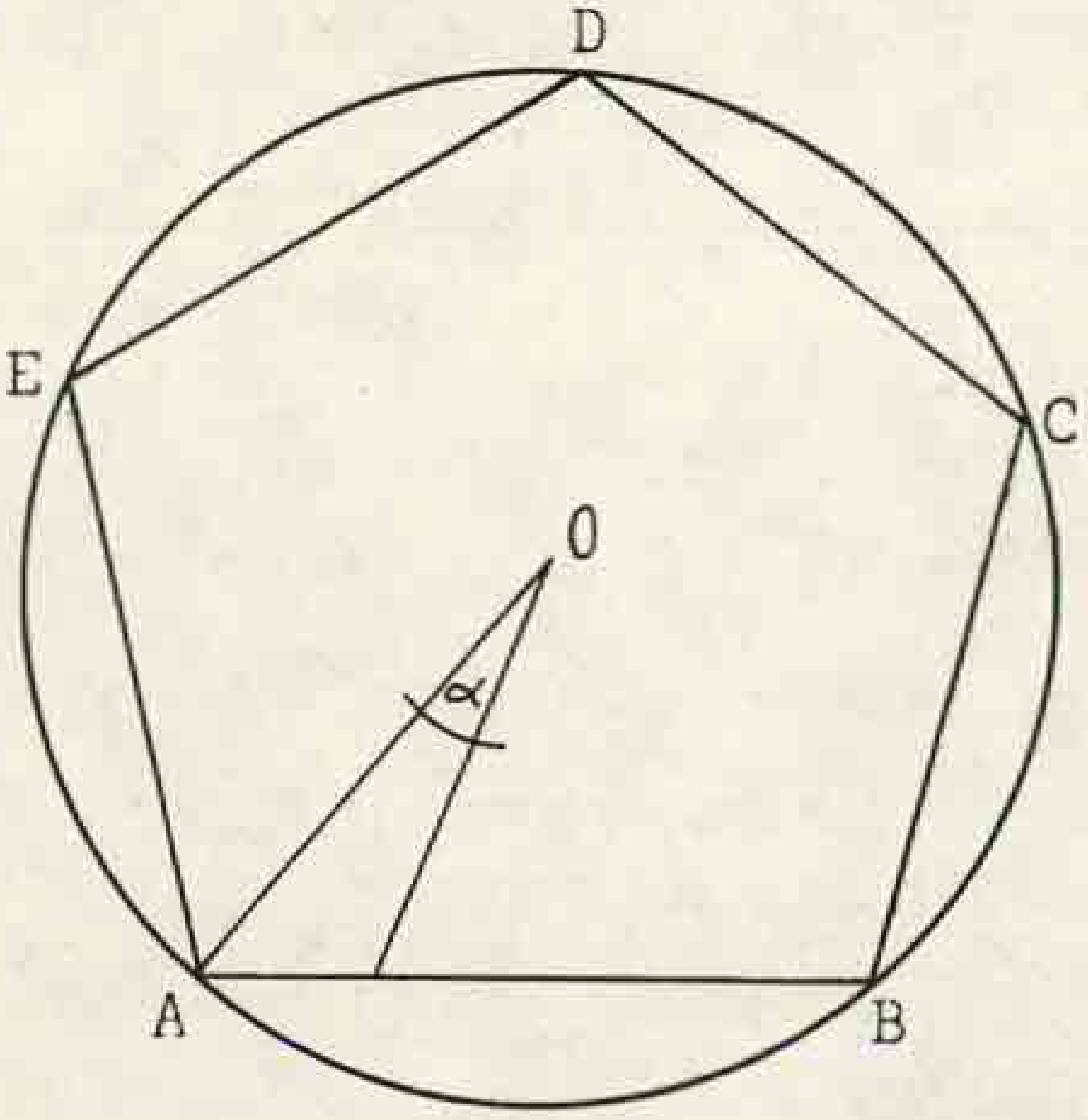
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!+k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)![k+1]}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

430. יהיה O מרכז המעגל, ו- $\sphericalangle AOP=\alpha$.
יהיה a רדיוס המעגל, אזי



$$PA = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$PE = 2a \sin \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$PD = 2a \sin \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$PC = 2a \sin \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$PB = 2a \sin \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{4\pi}{5}\right)$$

ועלינו להוכיח איפוא כי

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{5}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$$

אבל

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{5}\right) - \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{5}\right) \cos \frac{\pi}{5} - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{5}\right) \cos \frac{\pi}{5}$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} + 2\cos \frac{\pi}{5} \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} + 2\cos \frac{\pi}{5} \; 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{10}$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 - 4\cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{10} \right\}$$

ונשאר להוכיח כי $\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$. נכתב $c = \cos \frac{\pi}{5}$.

מאחר ש- $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$

יוצא ש- $4c^3 - 3c = -(2c^2-1)$

ז.א. $4c^3+2c^2-3c-1 =0$, דהינו $(c+1)(4c^2-2c-1) =0$.

אבל ברור כי $c>0$ ולכן c הוא השורש החיובי של
$4c^2-2c-1 = 0$,

$$\cos\frac{\pi}{5} = c = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

מכאן נובע גם ש-

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

כפי שניתן בקלות לאשר. המסקנה מידית.

431. א. <u>פתרון ישיר</u>: מהמשואה נובע כי

$$S_1 = \alpha+\beta+\gamma = 0$$
$$S_2 = \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta = p$$
$$S_3 = \alpha\beta\gamma = -q$$

ולכן
$$\Sigma_1 = (\alpha+\beta\gamma)+(\beta+\gamma\alpha)+(\gamma+\alpha\beta) = S_1 + S_2 = p$$

ואילו
$$\Sigma_2 = (\beta+\gamma\alpha)(\gamma+\alpha\beta)+(\gamma+\alpha\beta)(\alpha+\beta\gamma)+(\alpha+\beta\gamma)(\beta+\gamma\alpha)$$
$$= [\beta\gamma+\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\alpha^2\beta\gamma]+[\gamma\alpha+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\alpha\beta^2\gamma]+$$
$$+[\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma^2]$$
$$= S_2 + S_3(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha(\beta^2+\gamma^2) + \beta(\gamma^2+\alpha^2) + \gamma(\alpha^2+\beta^2)$$
$$= p + \alpha(\beta^2+\gamma^2) + \beta(\gamma^2+\alpha^2) + \gamma(\alpha^2+\beta^2)$$

אבל
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) = 3\alpha\beta\gamma+\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)$$

ולכן
$$\alpha(\beta^2+\gamma^2) + \beta(\gamma^2+\alpha^2) + \gamma(\alpha^2+\beta^2) = S_1S_2 - 3S_3 = 3q$$

ז.א. $\Sigma_2 = p + 3q$

ובסוף
$$\Sigma_3 = (\alpha+\beta\gamma)(\beta+\gamma\alpha)(\gamma+\alpha\beta) = (\alpha+\beta\gamma)\{\beta\gamma+\alpha(\beta^2+\gamma^2) + \alpha^2\beta\gamma\}$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^3\beta^2) +\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

$$= S_3 + [S_2^2 - 2S_1S_3] + S_3(S_1^2 - 2S_2) + S_3^2$$

$$= -q + p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 -q$$

המשואה היא אפוא

$$y^3 - py^2 + (p+3q)y - [(p+q)^2-q]=0$$

ב. <u>פתרון שני:</u> עבור $x=\alpha$

$$y = \alpha + \beta\gamma = \alpha - \frac{q}{\alpha}$$

ז.א. שנוכל לכתב $y = x - \frac{q}{x}$. אם נחלץ את x מתוך היחס האחרון הזה והמשואה המקורית נקבל את התשובה הקודמת.

432. יהיה המעגל $x^2+y^2=a^2$, A הנקודה $(-a,0)$, ו- P הנקודה (h,k). יהיו השעורים של B,C בהתאמה $(a\cos\beta, a\sin\beta)$, $(a\cos\gamma, a\sin\gamma)$. המשואה של AB היא

$$-x\sin\frac{\beta}{2} + y\cos\frac{\beta}{2} = a\sin\frac{\beta}{2}$$

ולכן משואת הניצב מ- C ל- AB היא

$$\cos\frac{\beta}{2}(x-a\cos\gamma) + \sin\frac{\beta}{2}(y-a\sin\gamma) =0$$

ז.א.

$$x\cos\frac{\beta}{2} + y\sin\frac{\beta}{2} = a\cos\left(\frac{\beta}{2}-\gamma\right)$$

כמו כן המשואה של הניצב מ- B ל- AC תהיה

$$x\cos\frac{\gamma}{2} + \gamma\sin\frac{\gamma}{2} = a\cos\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)$$

כדי למצוא את H נפתור את זוג המשואות האלה, ונקבל

$$x= a(\cos \beta + \cos \gamma - 1), \quad y= a(\sin \beta + \sin\gamma)$$

מאידך משואת BC היא

$$x \cos \frac{\beta+\gamma}{2} + y \sin \frac{\beta+\gamma}{2} = a \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$$

ולכן התנאי שהוא עובר דרך P הוא

$$(*) \quad h \cos \frac{\beta+\gamma}{2} + k \sin \frac{\beta+\gamma}{2} = a \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$$

הבעיה היא איפוא למצא את מקום הנקודה

$$x = a(\cos \beta + \cos \gamma - 1)$$

$$y = a(\sin \beta + \sin \gamma)$$

כש- β,γ מקיימים את התנאי (*)

אבל אז

$$(x+a)^2+y^2=a^2[(\cos \beta+\cos \gamma)^2+(\sin \beta+\sin \gamma)^2]$$

$$= 2a^2 [1 + \cos(\beta-\gamma)]$$

$$= 4a^2 \cos^2 \frac{\beta-\gamma}{2}$$

ז.א.

$$\cos \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

אבל

$$y = 2a \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$$

ומכאן

$$\sin \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{y}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}$$

-ו

$$\cos \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{x + a}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}$$

אם נציב את אלה בתנאי (*), נקבל

$$\frac{h(x+a) + ky}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

דהינו $(x+a)^2 + y^2 = 2h(x+a) + 2ky$

שזה משואה של מעגל.

433. מהמשואה נובע כי $x = \frac{1}{2}(-y \pm \sqrt{4 - 3y^4})$

ולכן עבור x ממשי, דרוש ש- $y^4 < \frac{4}{3}$, ז.א.

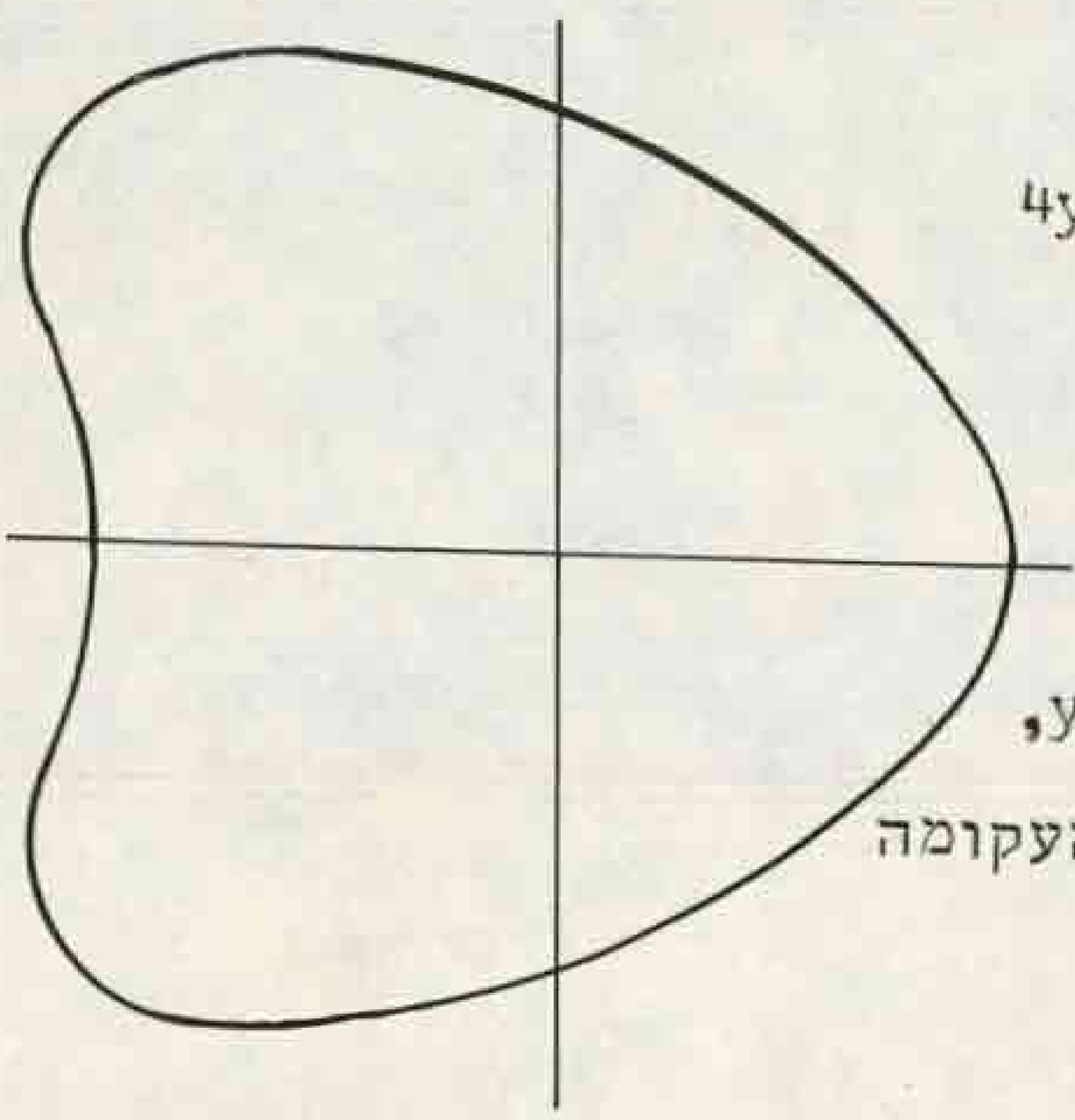
$|y| < (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}$. כמו כן

$$y^2 = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{4 - 3x^2})$$

ולכן $|x| < (\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$. עבור x חיובי קיים

$$x^2 = 1 - xy^2 - y^2 < 1$$

ולכן העקומה חסומה במלבן $-(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}} < x < 1$, $|y| < (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}$.



אם נגזור נקבל

$$4y^3\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

ז.א.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2+2x}{2y(2y^2+x)}$$

נקבל $\frac{dy}{dx}=0$ כש- $y^2+2x=0$,

ואם נציב תנאי זה במשואת העקומה

נקבל $x^2 = \frac{1}{3}$.

אבל $x=-\frac{1}{2}y^2\le 0$ ולכן הפתרון היחידי הוא $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$y=\pm(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}$. הנגזרת ההפוכה $\frac{dx}{dy}$ תתאפס כש-$2y(2y^2+x)=0$.

עכשיו $y=0$ גורר $x=\pm 1$, ואילו הצבת $2y^2+x=0$ במשואת

העקומה תגרור $x=-(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$, $y=\pm 3^{-\frac{1}{4}}$.

.434

$$F=a^2x^2(b^2-r^2)(c^2-r^2)+b^2y^2(c^2-r^2)(a^2-r^2)+c^2z^2(a^2-r^2)(b^2-r^2)$$

$$=a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)-r^2[a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2]+$$
$$+r^4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$$

$$=r^2\{a^2b^2c^2-a^2x^2(b^2+c^2)-b^2y^2(c^2+a^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+r^2p^4\}$$

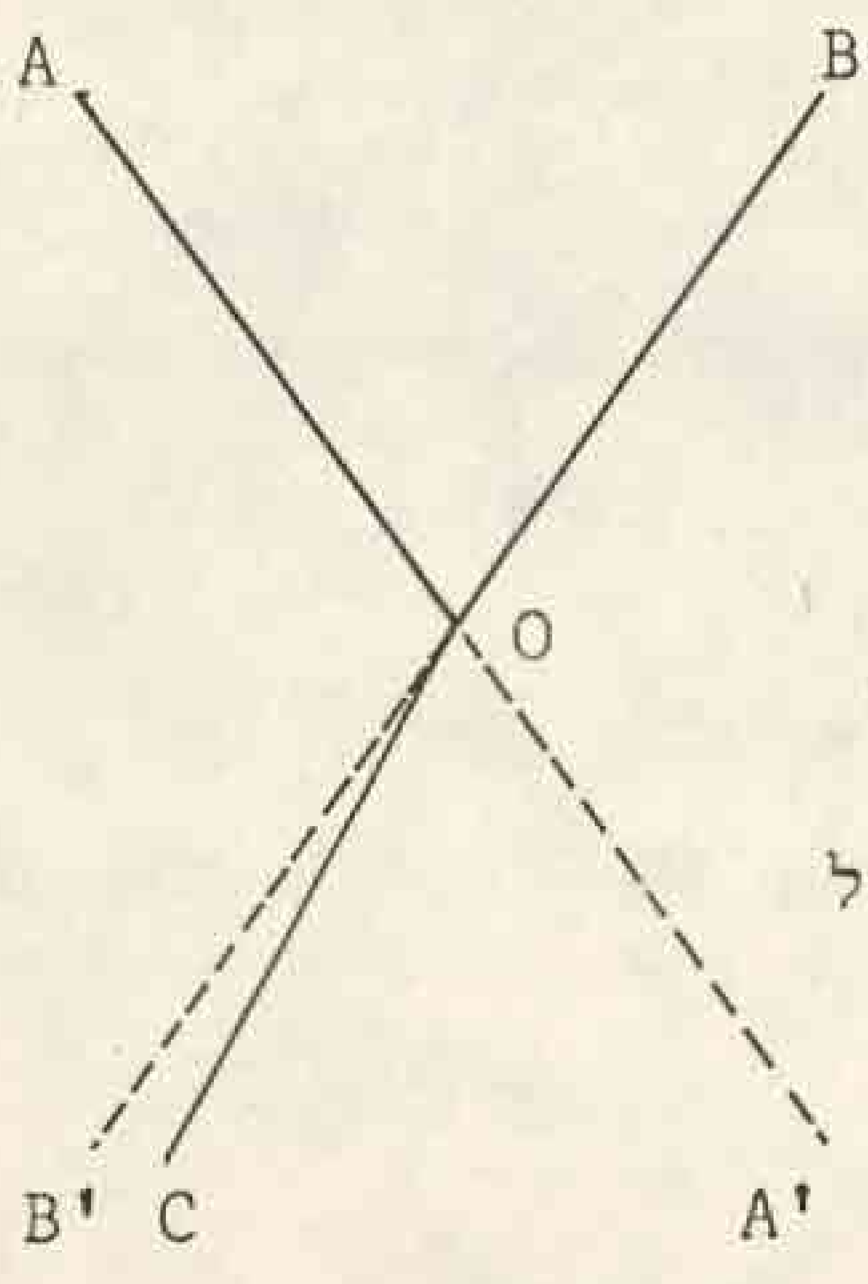
ואילו

$$G=x^2(c^2a^2-p^4)(a^2b^2-p^4)+y^2(a^2b^2-p^4)(b^2c^2-p^4)+$$
$$+z^2(b^2c^2-p^4)(c^2a^2-p^4)$$

$$=x^2[a^4b^2c^2-a^2p^4(b^2+c^2)+p^8]+y^2[a^2b^4c^2-b^2p^4(c^2+a^2)+p^8]$$
$$+z^2[a^2b^2c^4-c^2p^4(a^2+b^2)+p^8]$$

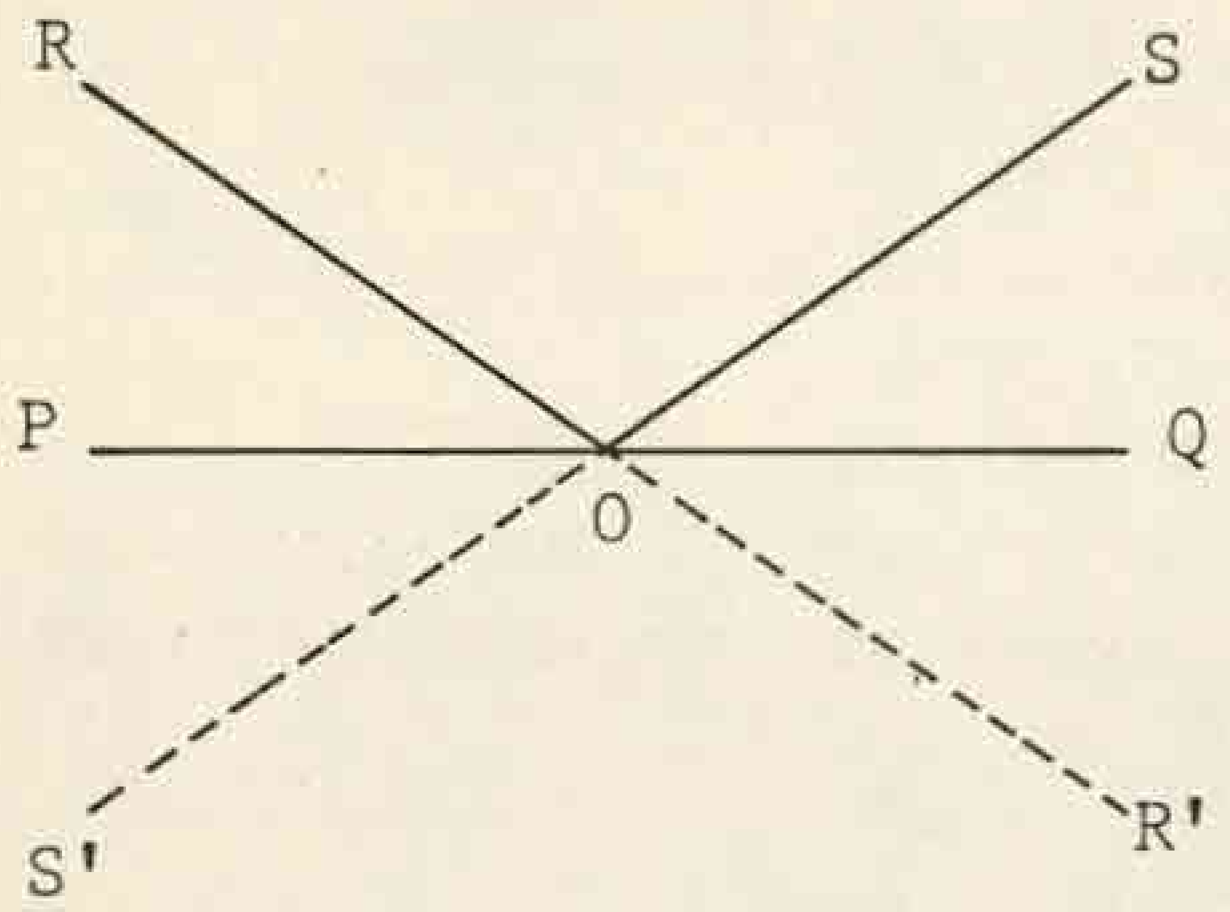
$$=p^4\{a^2b^2c^2-a^2x^2(b^2+c^2)-b^2y^2(c^2+a^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+r^2p^4\}$$

$$=p^4F/r^2$$



.435 עבור $n=3$ ההוכחה פשוטה. כי מתנאי הבעיה נובע שאם OB,OA הם שנים מהוקטורים יצטרך השלישי להימצא בסקטור A'OB' .

עכשיו ניקח n כלשהו, וניקח הקבוצה החלקית המירבית של וקטורים הנמצאים בצד אחד של קו ישר דרך האפס.



קיים איפוא קו POQ וקבוצה חלקית K של הוקטורים, נגיד בעלת m איברים, מצד אחד של POQ. ידוע כי $m<n$ וגם שאין למצא קבוצה חלקית של $m+1$ וקטורים אשר כלם בצד אחד של קו דרך האפס. יהיו OR, OS הוקטורים הקצוניים של K , ברור עכשיו כי כל שאר הוקטורים שאינם שייכים ל- K נמצאים בסקטור R'OS' . ניקח אחד מהם, והשקול V של הוקטור הזה עם OR ו- OS הוא פחות מ- 1 (כמו במקרה $n=3$). נשארו $n-3$ וקטורים נוספים, כלם באורך יחידה ולכן השקול שלהם עם V יהיה לא יותר מ- $1+(n-3)$, דהינו $n-2$.

אי-שויון אלגברי ויישומו הגיאומטרי

א. סיגלר (חיפה)

במאמר זה נוכיח אי-שויון אלגברי (משפט 1) ובעזרתו נוכיח אי-שויון הנדסי (משפט 2).

<u>משפט 1</u>: עבור כל α,β,γ חיוביים, קיים

$$\frac{\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)}+\frac{\gamma\alpha}{(1+\gamma)(1+\alpha)(1+\gamma+\gamma\alpha)}+\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\alpha\beta)}\leq\frac{1}{4}$$

<u>הוכחה</u>

<u>טענת עזר</u>: אם a,b,c הם חיוביים ו- $abc=1$, אזי

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1$$

כי

$$1-\left(\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2+a)(2+b)(2+c)}\{(2+a)(2+b)(2+c)-(2+b)(2+c)$$

$$-(2+c)(2+a)-(2+a)(2+b)\}$$

$$= \frac{1}{(2+a)(2+b)(2+c)} \{(bc+ca+ab) + abc - 4\}$$

אבל, לפי משפט הממוצעים

$$bc+ca+ab \geq 3(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$abc = 1 \qquad \text{-ו}$$

ומכאן טענת העזר.

עכשיו ניגש להוכחת עצם המשפט. לפי משפט הממוצעים, קיים

$$1+\beta \geq 2\sqrt{\beta}$$

$$1+\gamma \geq 2\sqrt{\gamma}$$

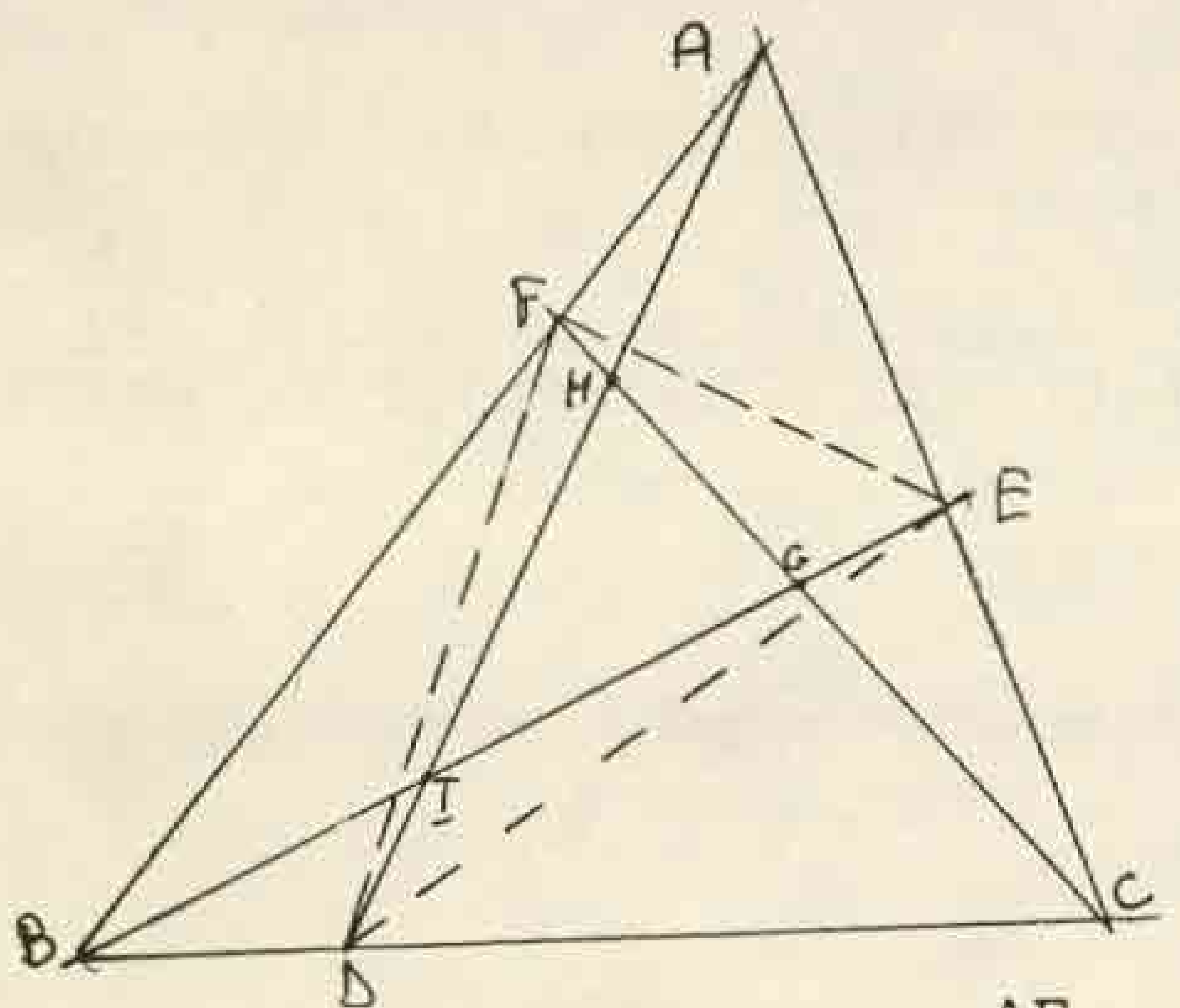
$$1+\beta\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma}$$

ולכן

$$\frac{4\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)} \leq \frac{\sqrt{\beta\gamma}(1+\beta)(1+\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)(2\sqrt{\beta\gamma}+\beta)}$$

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}}$$

אי-שויון דומה קיים עבור שני האיברים האחרים, והמשפט נובע איפוא מטענת העזר אם נכתב $a= \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$, $b= \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $c= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.



<u>משפט 2</u>: יהיו D,E,F נקודות כלשהן על הצלעות BC,CA,AB בהתאמה של משולש ABC. הישרים BE,CF נפגשים ב- G ; AD, CF ב- H ; ו- AD,BE ב- I , קיים
$S_{DEF} - S_{GHI} < \frac{1}{4} S_{ABC}$.

<u>טענת עזר</u>: נגדיר $\frac{BD}{DC}=\alpha$, $\frac{CE}{EA}=\beta$, $\frac{AF}{FB}=\gamma$. קיים

$$(1) \qquad \frac{S_{FGE}}{S_{ABC}} = \frac{\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)}$$

<u>הוכחת טענת העזר</u>:

נכתב $\Delta = S_{ABC}$, ברור כי

$$S_{FGE} = \Delta - (S_{AFE} + S_{BCE} - S_{BFG}) \tag{2}$$

עכשיו $\frac{AF}{AB} = \frac{\gamma}{\gamma+1}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{\beta+1}$ (למה?)

ולכן $S_{AFE} = \frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)} \cdot \Delta$ (שוב למה?) (3)

כמו כן $S_{BCE} = \frac{CE}{AC} \cdot \Delta$

$$= \frac{\beta}{\beta+1} \cdot \Delta \tag{4}$$

קצת יותר קשה לחשב את S_{BFG} . נעיר תחילה כי

$$\frac{S_{BFG}}{S_{BFC}} = \frac{FG}{FC}$$

אבל, לפי משפט מנלאוס במשולש AFC , קיים

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

דהינו $(\gamma+1) \cdot \frac{FG}{GC} \cdot \beta = 1$

ולכן $\frac{FG}{GC} = \frac{1}{\beta(\gamma+1)}$

ומכאן ש-

$$\frac{S_{BFG}}{S_{BFC}} = \frac{FG}{FC} = \frac{1}{\beta(\gamma+1)+1} \quad \text{(למה?)}$$

אבל

$$S_{BFC} = \frac{BF}{AB} \cdot \Delta$$

$$= \frac{\Delta}{\gamma+1}$$

ולכן

$$S_{BFG} = \frac{1}{(\gamma+1)(\beta\gamma+\beta+1)}\Delta \tag{5}$$

מכל זה נובע כי

$$\frac{S_{FGE}}{\Delta} = 1-\frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)}-\frac{\beta}{\beta+1}-\frac{1}{(\gamma+1)(1+\beta+\beta\gamma)}$$

$$= \frac{\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)}$$

<u>הוכחת המשפט</u>: הוכחנו כבר כי

$$S_{FGE} = \frac{\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)} \tag{6}$$

תוצאה דומה נכונה גם עבור S_{DHF} ו- S_{EID}

ולכן

$$S_{DEF} - S_{GHI} = S_{FGE} + S_{DHF} + S_{EID}$$

$$= \left[\frac{\beta\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta+\beta\gamma)} + \frac{\gamma\alpha}{(1+\gamma)(1+\alpha)(1+\gamma+\gamma\alpha)} + \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\alpha\beta)}\right] \cdot \Delta$$

$$\leq \frac{1}{4}\Delta$$

לפי משפט 1.

<u>משפט 3</u>: אם $\alpha\beta\gamma=1$, אזי $S_{DEF} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$.

הוכחה. במקרה זה יעברו הישרים CF, BE, AD דרך נקודה אחת (לפי משפט צ׳יבה הפוך) ולכן $S_{GHI}=0$.

רשימת פותרי הבעיות 421-435

אברבוך חיים	י"א	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(12)
אברהם אליעזר	י"א	בי"ס מקיף ע"ש שרת, נצרת-עילית	(1)
איזק שמואל	י"א	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(22)
אקנר ראובן	י"א	כל ישראל חברים, תל-אביב	(28)
בוים חנוך	י"ב	אחד העם, פתח-תקוה	(4)
גביש דן	י"א	הריאלי העברי, חיפה	(5)
גורדון גבריאל			(13)
גלזמן דני	י"א	תיכון דרום, חולון	(18)
גרינפלד זיו	י'	כצנלסון, כפר-סבא	(5)
דגן ישי		צה"ל	(31)
דונגי רן	י'	תיכון ע"ש קוגל, חולון	(50)
ונדל עמרי	י"א	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(29)
זגר אליהו	י"ב	אחד-העם, פתח תקוה	(18)
חזן דוד	י"ב	עירוני א' "חשמונאים", בת-ים	(8)
יסקולבה אורי	י"א	רמות, בת-ים	(6)
לוינשטיין צבי	י"א	עירוני ה', תל-אביב	(1)
ליזרוביץ אריה	י"ב	גמנסיה ריאלית, ראשון לציון	(42)
מנבר עודי	י"ב	תיכון קרית חיים, קרית-חיים	(37)
מרדיקס ח.		שדה בקר	(50)
סולל אבנר	י"א	תיכון עירוני א', תל-אביב	(5)
עופר יוסף	י'	ישיבה נתיב מאיר, ירושלים	(14)
עליס עמירם	י"ב	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(35)
ענבל צבי		צה"ל	(15)
פרידמן	י"ב	קרית נוער, ירושלים	(18)
צוקרמן נחמן	י"ב	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(18)
קלעי גיל	י'	גמנסיה רחביה, ירושלים	(22)
קנטור יהודה		צה"ל	(28)
שיינינגר אורי		צה"ל	(35)
שמאי משה	י"ב	"השרון", רמת השרון	(4)
ששון אדמון	י"ב	גמנסיה ריאלית, ראשון לציון	(30)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 4-23357-4

מחיר חוברת בודדת -.1 ל"י

מחיר חתימה ל-4 חוברות 3.50 ל"י