גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים

Title Page of Napier's *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*

כרך 4 | אדר תשל"ב - פברואר 1972 | מס 7

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

העורך: י. גיליס

ד ב ר   ה מ ע ר כ ת

אחרי החוברת הזאת תבוא חוברת מס' 8, ובזאת יגיע כרך 4 לסיומו. לקראת התחלת שנת הלימודים תשל"ג מתכוננת המערכת לפתח בכרך 5, ובהזדמנות זו לשוות לעתון צורה מודרנית יותר. באשר לתוכן, אנו מקווים שנצליח לקיים את הרמה הנוכחית, וגם נשתדל ללא הרף לשפרה.

בין השאר ננסה לגוון יותר את החומר בעתון. הוחלט כבר להוסיף מדור מיוחד על "מדעי מחשב", ונשמח לקבל מקוראינו הצעות נוספות להרחיב את קשת הנושאים.

שאלה היסטורית בהנדסה

אם a,b,c הם צלעות משולש, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, ו- S שטח המשולש, אזי ידועה לכל אחד נוסחת הירון :-

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

לא קשה להוכיח נוסחה זו בעזרת טריגונומטריה, אבל אפשר גם למצא הוכחה הנדסית טהורה, בלי עזרת טריגונומטריה (כפי שעשה גם הירון בזמנו).

נשמח לקבל מהקוראים הוכחות הנדסיות ולפרסמן. נא לסמן את המעטפה "נוסחת הירון".

משפט שטיינר

אבי-ברמן סגלר (חיפה)

1. סקירה הסטורית

בעית אפשרות בניות גיאומטריות בעזרת מחוגה וסרגל העסיקה מתמטיקאים רבים עוד מימי קדם. עם הזמן התעוררה השאלה:-

האם אין כאן בזבוז בשמוש במחוגה וסרגל? האם ניתן לבצע את הבניות האלה, או אולי חלק מהן, בעזרת אחד הכלים בלבד?

המתמטיקאי האיטלקי מסקרוני (L. Mascheroni, 1750-1800) גילה כי כל בניה גיאומטרית שאפשרית במחוגה וסרגל אפשרית גם במחוגה בלבד. ברור שאי אפשר בעזרת מחוגה בלבד להעביר ישר רצוף בין נקודות נתונות. כוונת משפט מסקרוני היא שניתן בעזרת מחוגה בלבד למצא נקודות המפגש של שני מעגלים, נקודות פגישה של ישר עם מעגל, ונקודת פגישה של שני ישרים.

המתמטיקאי האוסטרי שטיינר (J. Steiner 1796-1863) הוכיח כי כל בניה שהיא אפשרית במחוגה וסרגל, אפשרית גם בסרגל בלבד, בתנאי שנתון לנו מעגל כלשהו ומרכזו. גם כאן אין הכוונה שאפשר לבנות קשתות מעגל בעזרת סרגל בלבד, אלא שמדובר באפשרות של בניות אלמנטריות: קביעת נקודות פגישה של שני מעגלים, וכו'.

נוסף על הנ"ל הוכיח שטיינר גם שמעגל ומרכזו מהווים המינימום שאפשר לדרש. אין במשפטי שטיינר ומסקרוני תשובה על השאלה: אילו בניות אפשריות בכלל במחוגה ובסרגל?

2. הוכחת משפט שטיינר

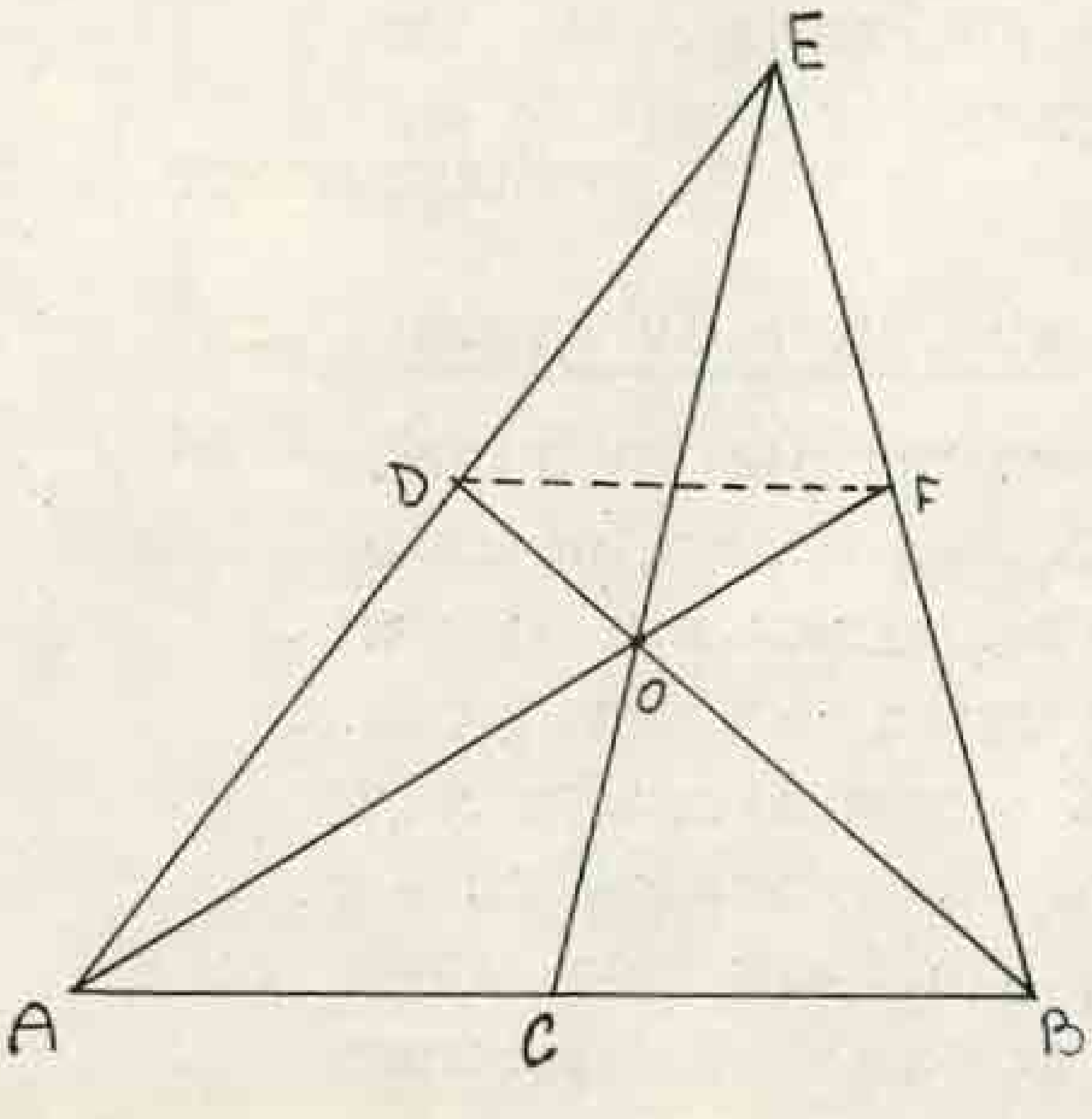
נתחיל בכמה משפטי עזר.

משפט עזר 1:

א. יהיו C אמצע הקטע הישר AB ו-D נקודה כלשהי חיצונית ל- AB. אזי אפשר להעביר בעזרת סרגל בלבד ישר ℓ שיעבור דרך D ויהיה מקביל ל- AB.

ב. יהיו נתונים קטע AB וישר ℓ מקביל לו. אזי אפשר למצא בעזרת סרגל בלבד את האמצע של AB.

הערה: בכל ההמשך כשנדבר על בניה, וכו׳ תהיה כוונתנו לבניה בעזרת סרגל בלבד.



הוכחה:

א. נחבר A עם D ונמשיך AD עד E כלשהו. BD , CE נפגשים ב- O ; ו- AO , BE ב- F . אזי $DF \parallel AB$. כי, בגלל משפט צ׳יבה, קיים

$$\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BF}{FE}=1$$

אבל AC = CB ולכן

$$\frac{ED}{DA}=\frac{EF}{FB}$$

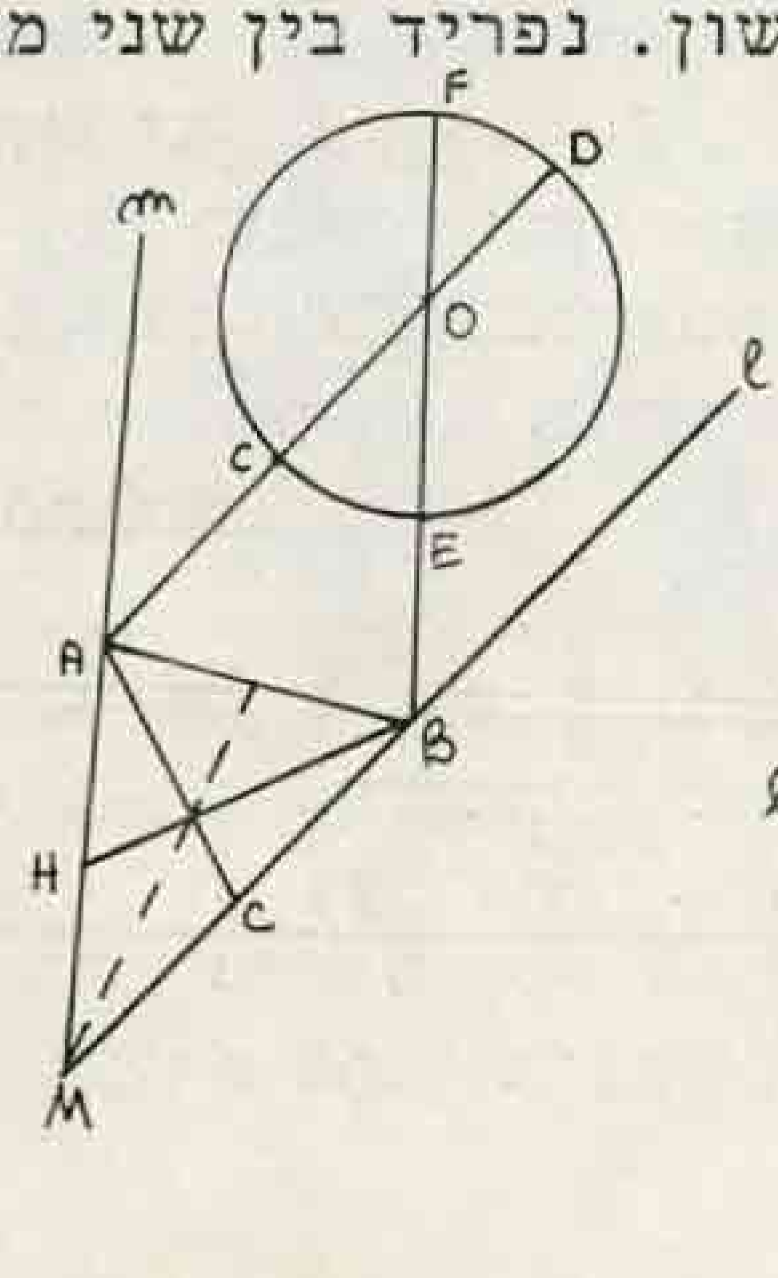
ולכן $DF \parallel AB$

ב. הוכחה כמעט דומה לזו של א) (נשאיר לקורא).

משפט עזר 2:

נתון מעגל ומרכזו O וקטע ישר AB , אפשר למצא את האמצע של AB בעזרת סרגל בלבד, וגם להעביר מקביל ל- AB דרך כל נקודה חיצונית שהיא.

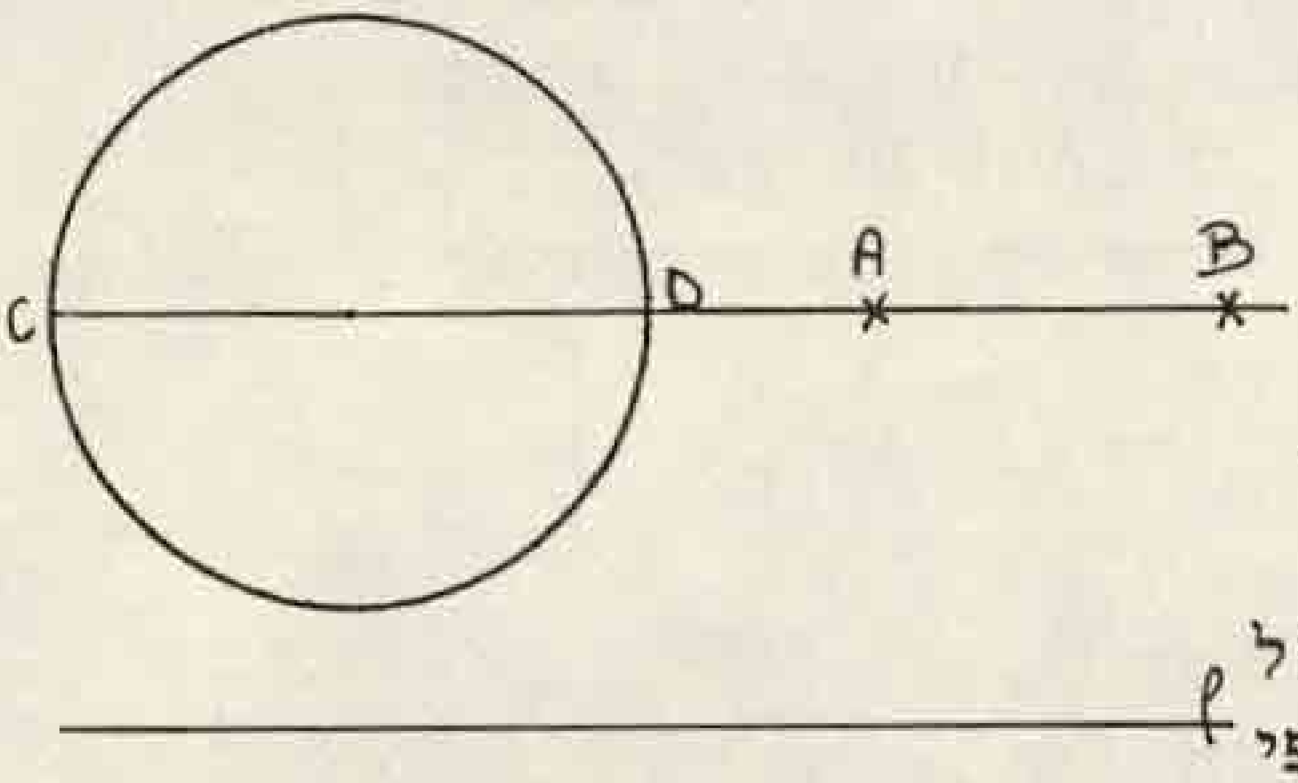
הערה: ממשפט עזר 1 רואים כי החלק השני נובע מיד מהחלק הראשון, ולכן מספיק להוכיח את הראשון. נפריד בין שני מקרים:-



א. O אינו נמצא על הישר AB . נחבר A,O ויהיו C,D נקודות המפגש של AO עם המעגל. כמו כן יהיו E,F נקודות המפגש של BO עם המעגל. O הוא אמצע CD ולכן אפשר,

לפי משפט עזר 1, להעביר מקביל ℓ ל-CD דרך B , וכמו כן נוכל

להעביר מקביל m ל- EF דרך A , יהיה M נקודת המפגש של ℓ ,m . מאחר ש- $\ell \parallel CD$ נובע ממשפט עזר 1 שאנו יכולים למצא את האמצע, G , של MB , ובדרך דומה את האמצע H של MA . נחבר AG ו- BH ויהיה K נקודת המפגש של AG , BH . קל להוכיח כי MK חוצה את AB .



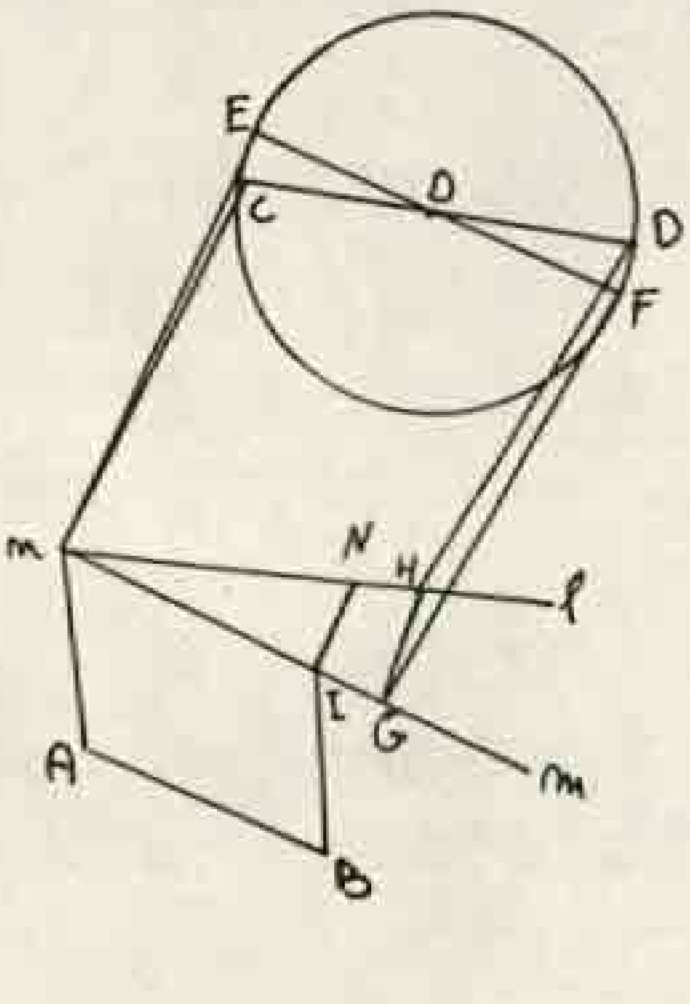
ב. <u>O נמצא על הישר AB</u>

במקרה זה נניח שהישר AB פוגש את המעגל ב- C,D. אזי O הוא האמצע של CD ולכן, שוב לפי משפט עזר 1, נוכל לבנות מקביל ℓ ל- CD . מאחר ש- ℓ מקביל ל- AB נוכל לנצל אותו, לפי משפט עזר 1, למצא את האמצע של AB .

<u>משפט עזר 3</u>:

יהיו נתונים מעגל ומרכזו O, ישר ℓ, וקטע AB (לא על ℓ). אזי אפשר למצא שתי נקודות M,N על ℓ כך ש- $MN=AB$.

<u>הוכחה</u>:



את הנקודה M נקבע באופן שרירותי על ℓ . אפשר להעביר לפי משפט עזר 2 מקביל m ל- AB דרך M . נעביר דרך O מקביל CD ל- ℓ ומקביל EF ל- m . נעביר את הישרים CM ו- EM . דרך F ו- D נעביר ישרים מקבילים ל- EM ול- CM בהתאמה אשר יחתכו את m ואת ℓ בנקודות G ו- H בהתאמה.

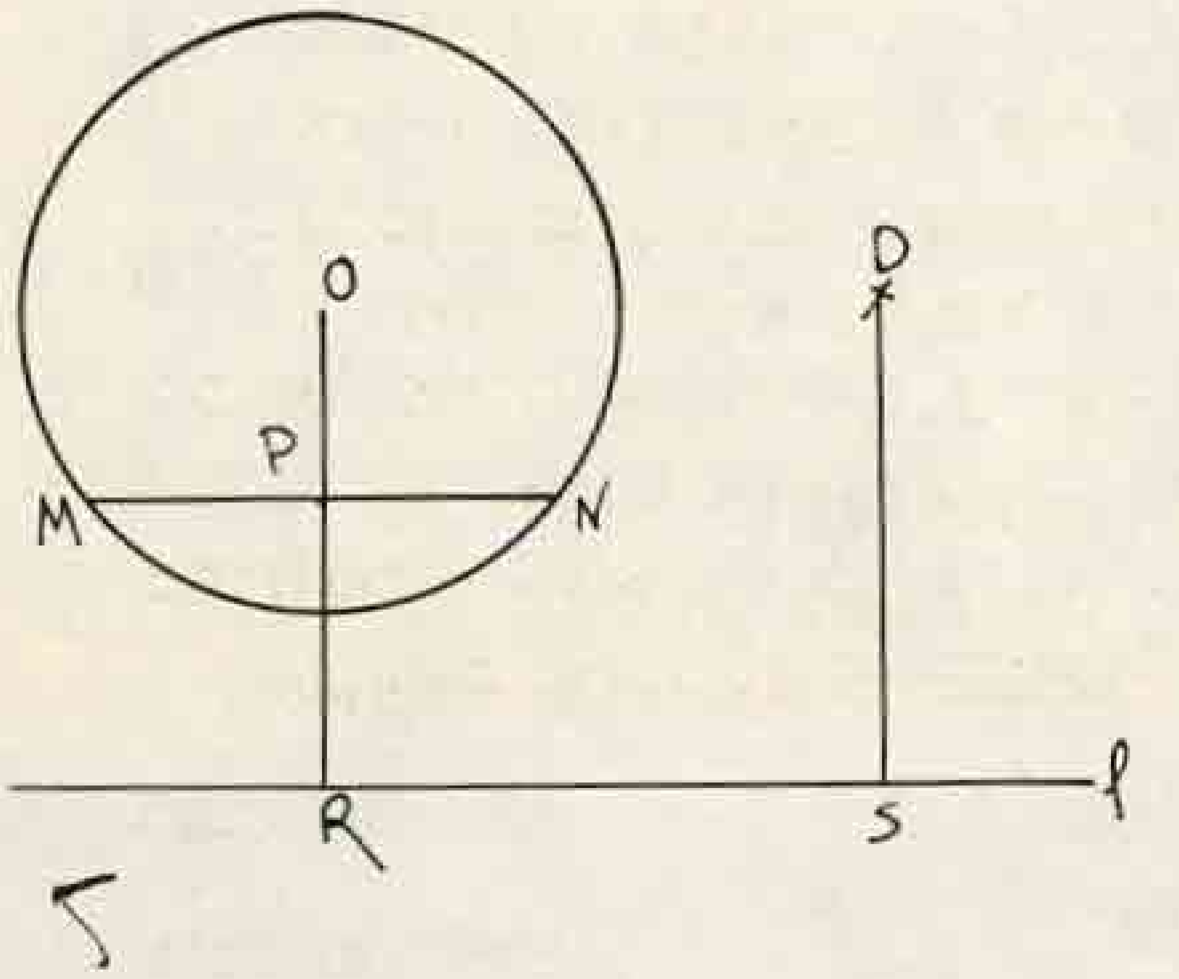
נחבר את A עם M ונעביר דרך B מקביל ל- AM אשר יחתוך את m ב- I . המקביל דרך I ל- GH חותך את ℓ ב- N .
<u>MN הוא בעל אורך שווה ל-AB</u> .

כי: $MG = EF = 2R = MH = CD$ וגם:

$$\frac{MI}{2R} = \frac{MI}{MG} = \frac{AB}{MG} = \frac{MN}{MH} = \frac{MN}{2R} \Rightarrow MN = AB$$

<u>משפט עזר 4:</u>

נתונים מעגל ומרכזו O, ישר ℓ ונקודה D. אפשר לבנות ישר דרך D מאונך ל- ℓ.



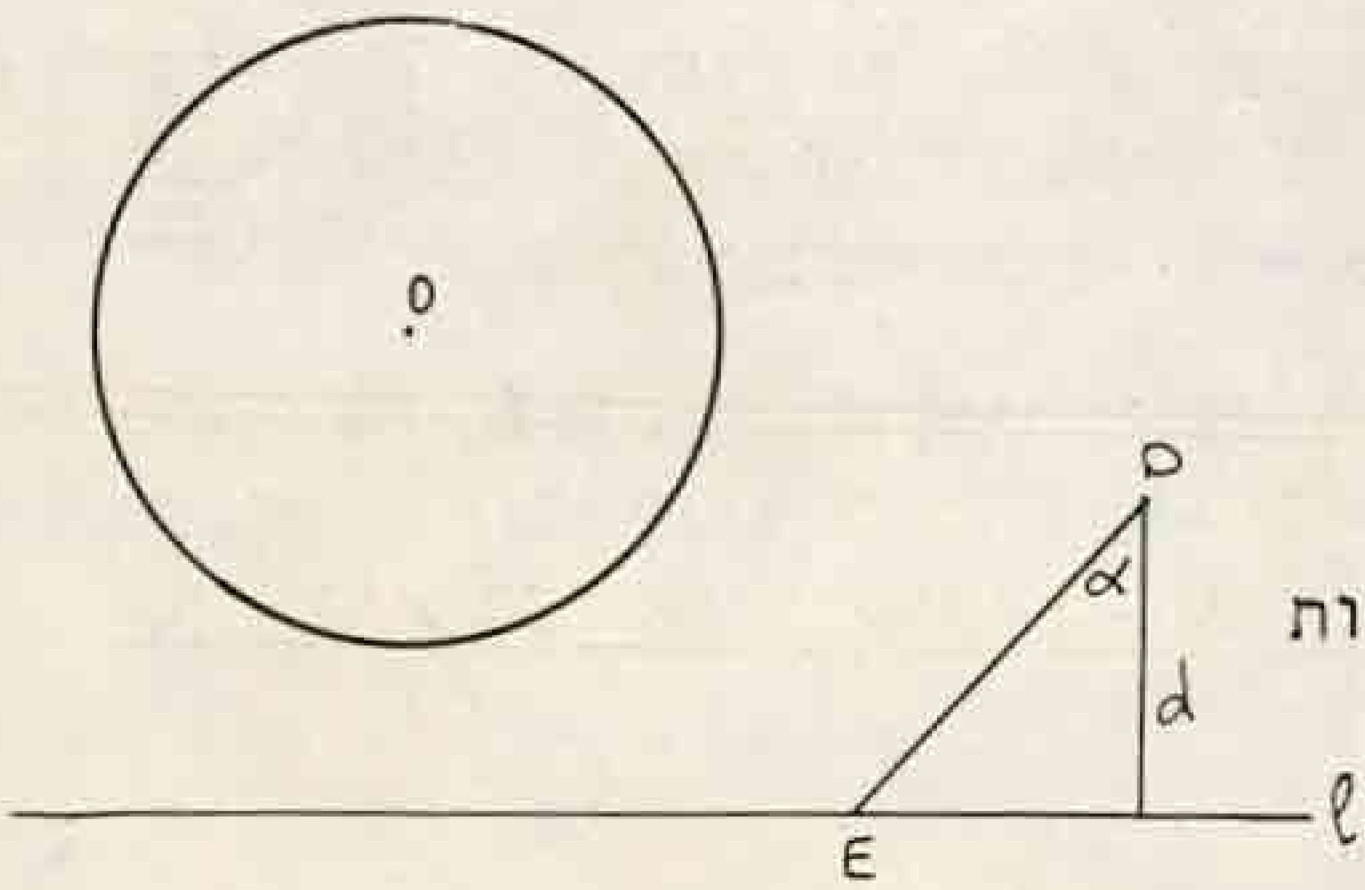
<u>הוכחה:</u>

דרך נקודה על המעגל מעבירים מקביל MN ל- ℓ.. ללא הגבלת כלליות אפשר להניח ש-MN אינו עובר דרך המרכז.
(אחרת בוחרים נקודה אחרת M_1 שונה M_N). אפשר למצוא לפי משפט עזר 2 את אמצע MN,
נגיד P. OP יפגוש את ℓ ב- R.
נעביר דרך D מקביל ל-OP
אשר יפגוש את ℓ ב-S. ℓ OS
כי $MN \perp OP$ (ישר היוצא מהמרכז 1 עובר דרך אמצע מיתר) לכן $\ell \parallel OP$ לכן גם $\ell \parallel DS$.

<u>הערה</u>: אם ℓ עובר דרך המרכז מעבירים מקביל ל- ℓ ומסמנים אותו ℓ_1. מעבירים אנך ל-ℓ_1 אשר יהיה ממילא אנך ל- ℓ, לפי השיטה הקודמת.

<u>משפט עזר 5:</u>

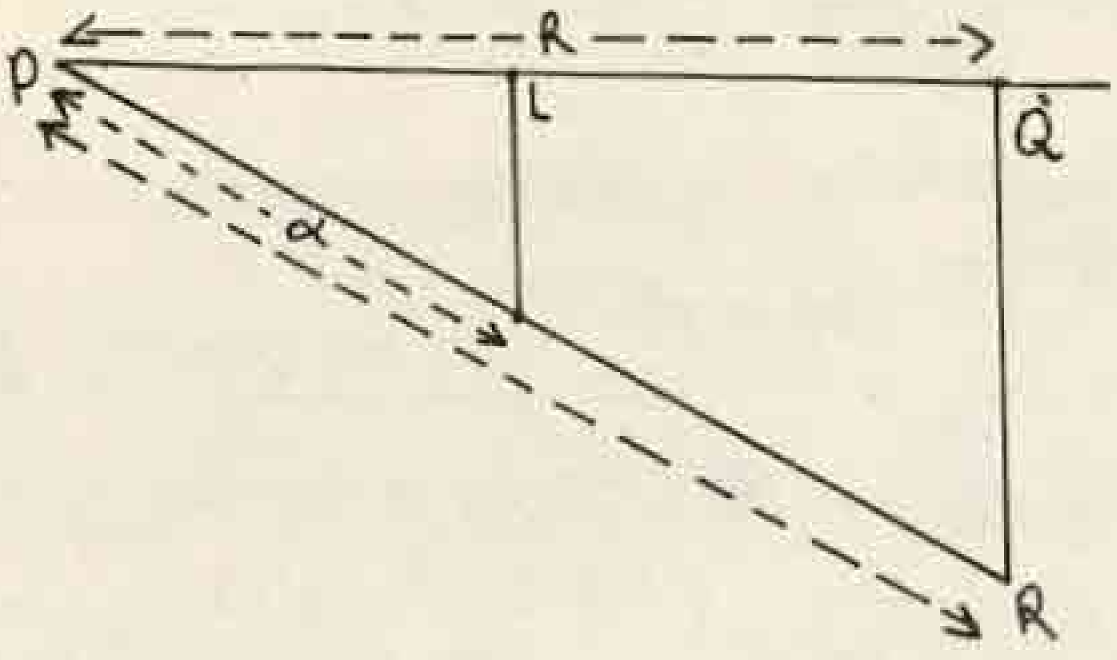
נתונים מעגל ומרכזו O, ישר ℓ, ונקודה D במרחק נתון d מ- ℓ. אם $a > d$ אפשר למצא נקודה E על ℓ כך ש- $DE = a$



<u>הוכחה:</u>

יהיה R הרדיוס של המעגל.
נוריד כפי שעשינו במשפט עזר 4 אנך מ- D ל- ℓ אשר יפגוש את ℓ ב- F.
כצעד ראשון נראה איך לבנות קטע x המקיים $\frac{x}{R} = \frac{d}{a}$.

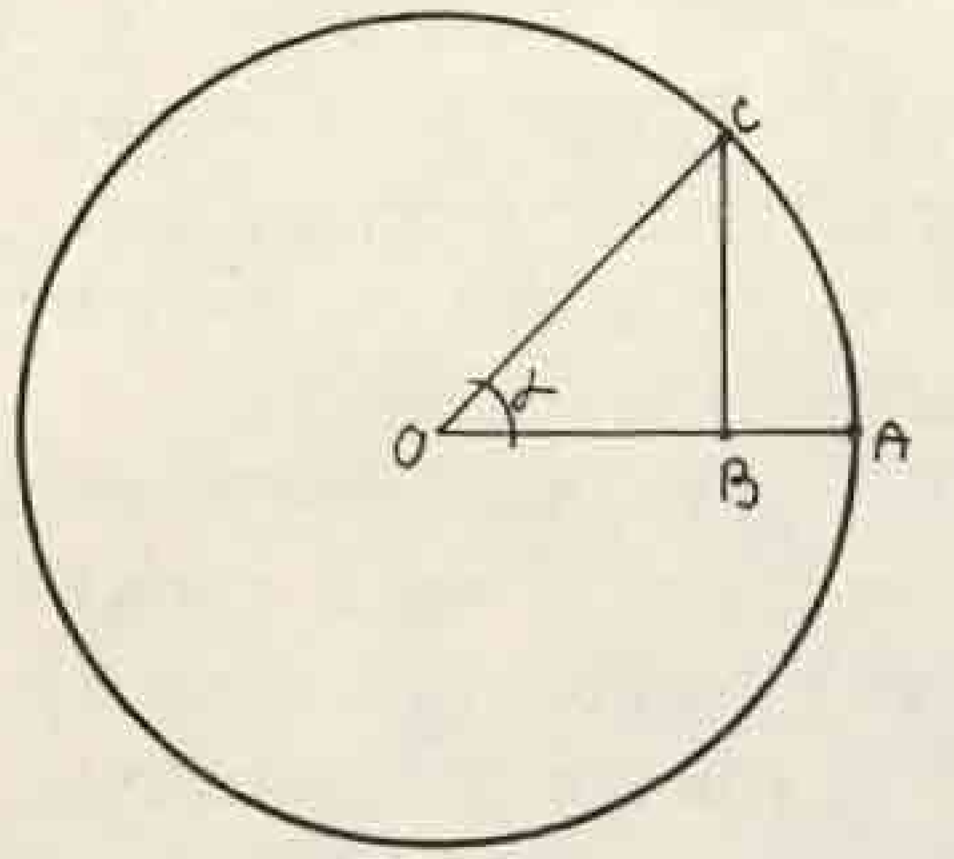
על ישר כלשהו m מנקודה P מקצים (פעולה אפשרית לפי משפט עזר 3) קטע שאורכה R ($PQ = R$).



על ישר אחר העובר דרך P מקצים שני קטעים; PR שאורכו a , ו- PS שאורכו d .
נחבר את R עם Q, ונעביר דרך S מקביל ל- QR . מקביל זה פוגש את PQ ב- L.
PL הוא ה-x המבוקש כי:

$$\frac{PL}{R} = \frac{PS}{PR} = \frac{d}{a}$$

עכשיו נעבור לבניה עצמה:



במעגל הנתון מעבירים רדיוס OA. נקצה על רדיוס זה קטע OB השווה באורכו ל- x. מ- B נעלה אנך ל-OA אשר יפגוש את המעגל ב-C.

נבנה y המקיים $\frac{BC}{R} = \frac{y}{a}$ כפי שבנינו קודם.

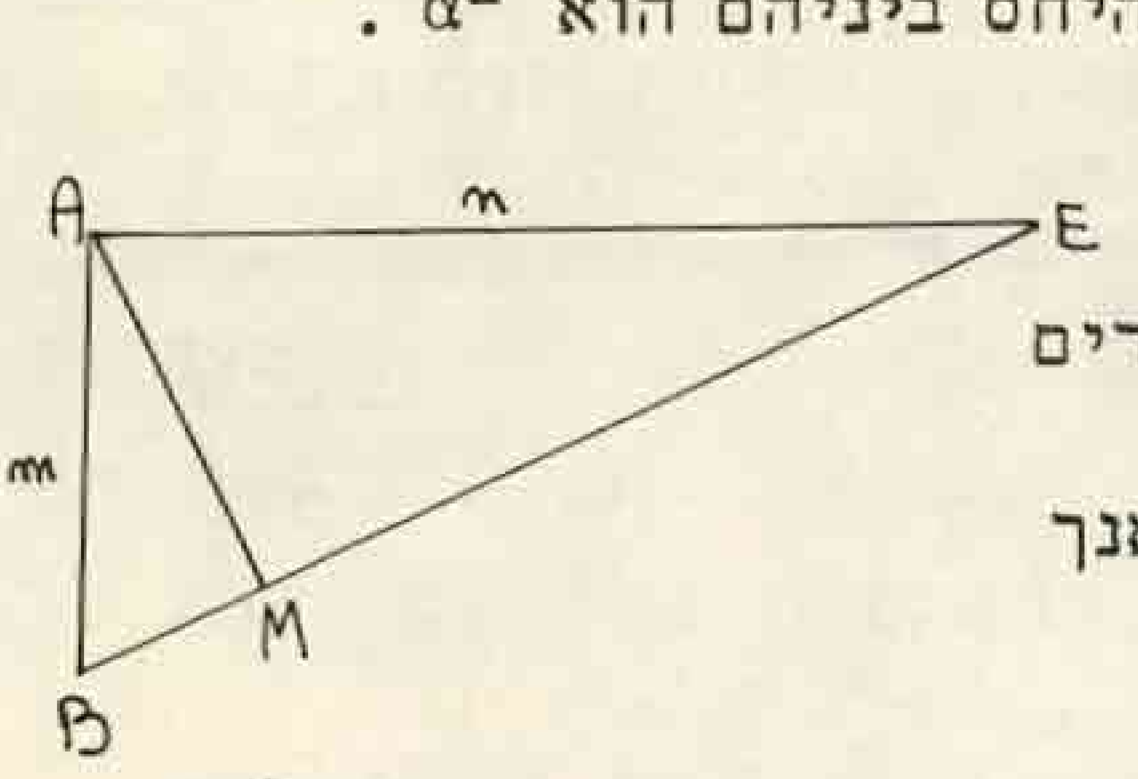
ה- y הוא הקטע EF שעלינו לבנות. וזה משום ש-

$\frac{OB}{OC} = \frac{d}{a} = \cos\alpha$ אזי גם $\frac{CB}{OC} = \frac{EF}{ED} = \sin\alpha$.

<u>משפט עזר 6:</u>

נתונים מעגל ומרכזו, ושני קטעים CD,AB כך ש- $\frac{AB}{CD} = \alpha$
אזי אפשר לבנות שני קטעים אשר היחס ביניהם הוא α^2 .

<u>בניה:</u>



על ישר m מקצים את AB . מעבירים אנך n מ- A ל-AB ומקצים AE השווה ל- CD . מעבירים מ- A אנך ל- BE . אזי $\alpha^2 = \frac{BM}{ME}$.

כי:
$$AB^2 = BM \cdot BE$$
$$AE^2 = ME \cdot BE$$
$$\frac{AB^2}{AE^2} = \alpha^2 = \frac{BM}{ME}$$

<u>משפט עזר 7:</u>

נתונים מעגל ומרכזו O , ושלשה קטעים a,b,c היכולים להיות צלעות של משולש. אזי אפשר לבנות משולש זה בעזרת סרגל בלבד.

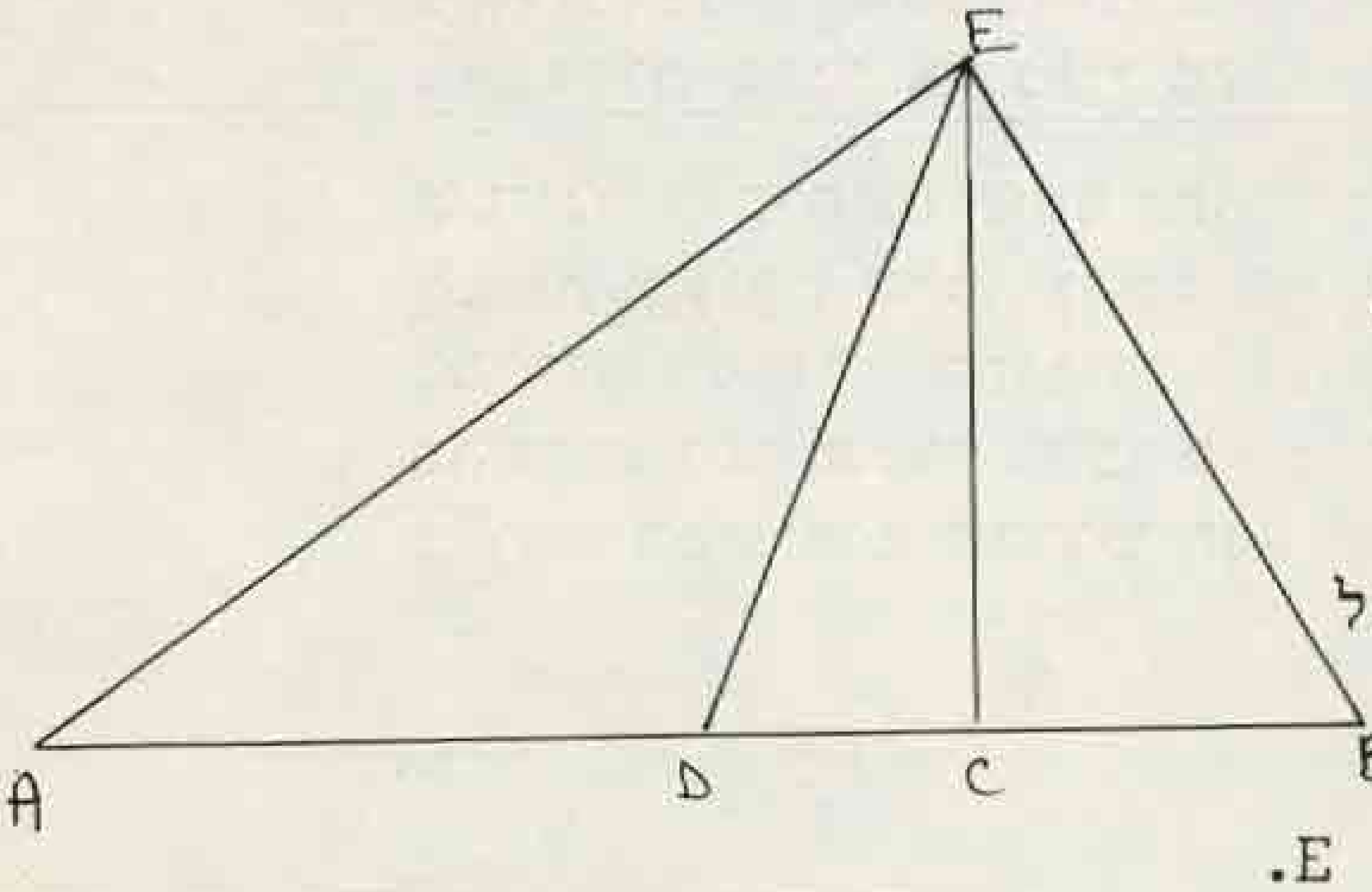
<u>בניה:</u> נבנה את הזוית α שבין b ו- c.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2+c^2a^2}}{\sqrt{2bc}}$$

את $\sqrt{b^2+c^2}$ אפשר לבנות בצורה פשוטה על ידי הקצאת b והעברת אנך ל- b באורך c .

את $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$ בונים בהסתמך במשפט עזר 5 כאשר $c = \sqrt{b^2+c^2}$ ו- $d = \sqrt{a^2}$.



את $\sqrt{2bc}$ אפשר לבנות כך:

יהי AC קטע באורך 2b ו-AB בקטע שאורכו 2b+c.

נחצה אותו על ידי הנקודה D .
נעלה מ- C אנך ומ- D נקצה על אנך זה את הקטע $\frac{2b+c}{2}$ (לפי משפט עזר 5) עד לנקודה E.
המשולש AEB הוא ישר זוית כי בו התיכון שווה למחצית הצלע ממול ולכן

$$EC^2 = 2b \cdot c$$ (משפט הגובה)

$$EC = \sqrt{2bc}$$

לפנינו היחס שערכו $\sqrt{\cos\alpha}$. עלינו לחשב את $\cos\alpha$.נשתמש במשפט עזר 6 ונמצא אותו.

לכן מצאנו את$\cos\alpha$. הבניה למשפט עזר 7 היא זאת.
בנינו שני קטעים המתיחסים ביחס $\cos\alpha$. יהיו הקטעים האלה m ו- n . נשתמש במשפט עזר 5 ונמצא את $\cos\alpha$

כאשר את תפקידו של d משחקת m ושל a , n. מקבלים את הקטע $\sqrt{n^2-m^2}$ עקב הבניה אחרונה.על ישר הקטע m מקצים את b ועל ישר הקטע n מקצים את c . קבלנו משולש המוגדר על ידי b,a ו- c .

ס י כ ו ם:

בזאת סימנו את הוכחת משפט שטיינר משום שנבנו הבניות האל-מנטריות הבאות:

1. נקודות הפגישה בין ישר ומעגל: משפט עזר 3 הראה שאפשר למצוא נקודות פגישה אלה כאשר המרכז של המעגל על הישר ואילו משפט עזר 5 הראה שאפשר למצוא נקודות אלה כאשר המרכז של המעגל מחוץ לישר.

2. נקודות הפגישה בין שני מעגלים: משפט עזר 7 הראה שנקודות אלה ניתנות למציאה בתנאי שמרכזי המעגלים נתונים וכן הרדיוסים שלהם.

3. נקודת פגישה בין שני ישרים הוא בניה טריביאלית. לכן כל נקודת בניה האפשרית בעזרת מחוגה וסרגל, אפשרית באמצעות סרגל אם נתון מעגל ומרכזו.

שטיינר הוכיח גם שאם נתון רק מעגל ללא המרכז אין אפשרות לבנות בעזרת סרגל בלבד את הבניות האלמנטריות האפשריות במחוגה לסרגל. ההוכחה לטענה האחרונה של שטיינר חורגת מהתחום האלמנטרי ולכן לא נוכל להביאה כאן.
כלומר המינימום הדרוש הוא מעגל ומרכזו ולא פחות מזה.

הכללה למשפט של YOUNG - מדור מתקדם

מבוא

בזמנו הציע יונג את הבעיה הבאה: נניח שאנו רוצים לסדר כל המספרים הטבעיים מ-1 עד mn ב- m שורות של n מספרים כל אחת, כך שבכל עמודה (מלמעלה למטה) ובכל שורה (משמאל לימין) תיווצר סדרה מונוטונית עולה. בכמה אפנים אפשר לבצע את המשימה?

יונג פתר את הבעיה והוכיח כי מספר האופנים הוא

$$(mn)!\frac{1!2!3!\ \ldots\ (m-1)!}{n!\ (n+1)!\ \ldots\ (n+m-1)!} \tag{1}$$

במאמר זה אנו מכלילים את הבעיה. נתונים m מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_m$ כך ש- $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \ldots \geqslant a_m$ ו- $\sum_{i=1}^{m} a_i = S$
עכשיו אנו רוצים לסדר את המספרים הטבעיים מ-1 עד S בעמודות, כך שבעמודה הראשונה יופיעו a_1 מספרים, בשניה a_2 מספרים, וכו' ושבכל עמודה ובכל שורה תיווצר סדרה מונוטונית עולה. נסמן ב- $F(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ את מספר הדרכים שניתן לבצע סידור כזה והבעיה היא לחשב את $F(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. רואים כי הבעיה של יונג מתיחסת למקרה הפרטי $F(n,n,n,\ldots,n)$. נוכיח כי, באופן כללי,

$$F(a_1,a_2,\ldots,a_m) = \frac{S!}{\sum_{i=1}^{m}(a_i+m-i)!} \cdot \prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i) \tag{2}$$

ולא קשה לראות כי הנוסחה (2) מקבלת את הצורה הפשוטה יחסית (1) כש- $a_1=a_2\ \ldots\ =a_m=n$.

<u>הוכחה:</u>

ההוכחה היא ע"י אינדוקציה לגבי כל ה- a_i, ומתבססת על שני משפטי עזר : -

<u>משפט עזר 1:</u>

$$F(a_1,a_2,\ldots,a_m) = F(a_1-1, a_2,\ldots,a_m) + F(a_1,a_2-1,a_3,\ldots,a_m)+\ldots+F(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m-1) \tag{3}$$

ההוכחה מידית כי הרי בכל סדור של S=mn המספרים מוכרח המספר S בעצמו להופיע בתחתית עמודה ובקצה הימני של שורה. לכן נקבל ע"י מחיקתו מערכת המתאימה למה שיתקבל ע"י קצור אחד העמודות ב-1.

<u>משפט עזר 2:</u>

יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_m$ מספרים כלשהם. אזי

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \{1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} (1 + \frac{1}{A_j - A_k}) \} = \frac{m(m-1)}{2} \tag{4}$$

<u>הערות:</u>

מאחר שהוכחת משפט עזר זה מסובכת במקצת, נדחה אותה לסעיף הבא. בינתיים נעיר כי המשפט כשלעצמו מפתיע, מאחר שקשה היה לנחש שערכה של הנוסחה המסורבלת ב-(4) יהיה תלוי ב-m ולא במספרים A_i. כדי לפשט את הטיפול בנוסחאות כאלה נשתמש במונחים הבאים.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_m$ מספרים כלשהם, אזי נכתב

$$\sum_i X_i = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$$\sum_i^{(j)} X_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} X_i$$

ז.א., במקרה השני, כשהסכום הוא על כל הערכים של i מ-1 עד m <u>פרט ל- i=j</u>.
נשתמש גם בסמונים דומים, $\prod_i$, $\prod_i^{(j)}$ עבור מכפלות. עכשיו נוכל לכתב את המשואה (4) בצורה:-

$$\sum_k A_k \{1 - \prod_j^{(k)} (1 + \frac{1}{A_j - A_k}) \} = \frac{1}{2} m(m-1) \tag{4'}$$

עכשיו ניגש להוכחת המשפט העיקרי. ברור שהוא נכון במקרה
$a_1=a_2\dots=a_m=1$. לכן מספיק להוכיח כי הנוסחה ב-(2) מקיימת גם
היא את היחס (3). אבל זה יהיה נכון אם

$$\frac{S!}{\prod(a_i+m-i)!}\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i)$$

$$(5)\quad =\frac{(S-1)!}{\prod_i(a_i+m-i)!}\cdot\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i)\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

אנו משאירים לקורא לאשר כי (5) אמנם מבטא בדיוק את העובדה ש-(3) מקיים את היחס (2).

אבל (5) שווה ערך עם

$$(6)\qquad S=\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

כדי להוכיח את (6) נציב ב-(4) $A_k=a_k+m-k$, ונקבל

$$\sum_k(a_k+m-k)\left\{1-\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]\right\}=\frac{1}{2}m(m-1)$$

ולכן

$$\sum_k(a_k+m-k)\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

$$=\sum_k(a_k+m-k)-\frac{1}{2}m(m-1)$$

$$=S+\sum_{k=1}^{m}(m-k)-\frac{1}{2}m(m-1)$$

$$=S$$

מ.ש.ל.

נשאר איפוא רק להוכיח את הנוסחה (4), ז.א. משפט עזר 2.

<u>הוכחת משפט עזר 2:</u>

נגדיר

$$f(x) = x\prod_i [1+\frac{1}{A_i-x}]$$

אזי קל לראות כי

$$f(x) = x-m + \frac{Q(x)}{\prod_i (A_i-x)}$$

כש- $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $m-1$. נוכל אם כן להשתמש בעיקרון של שברים חלקיים, ונקבל

$$f(x) = x-m + \sum_k \frac{c_k}{A_k-x} \tag{7}$$

כשיש עוד לקבע את המקדמים c_k. נכפיל את (7) ב- (A_j-x), ונקבל

$$x(A_j-x+1)\prod_i^{(j)} [1+\frac{1}{A_i-x}] = (A_j-x)(x-m)+c_j+(A_j-x)\sum_i^{(j)} \frac{c_i}{A_i-x}$$

נציב כאן $x=A_j$, ו-

$$A_j \prod_i^{(j)} [1+\frac{1}{A_i-A_j}] = c_j$$

ולכן, מ- (7)

$$x\prod_i [1+\frac{1}{A_i-x}] = \tag{8}$$

$$= x-m + \sum_k \frac{A_k}{A_k-x} \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}]$$

נפתח את שני אגפי (8) לפי חזקות יורדות של x :-

$$(9)\qquad x \prod_i \left[1-\frac{1}{x}-\frac{A_i}{x^2}-\frac{A_i^{\,2}}{x^2}\ \ldots.\right] =$$

$$= x-m-\sum_k \frac{A_k}{x}\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\left(1+\frac{A_k}{x}+\frac{A_k^2}{x^2}\ldots\right)$$

ז.א.

$$(10)\qquad x\left\{1-\frac{m}{x}+\frac{\frac{1}{2}m(m-1)-\Sigma A_k}{x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)+\Sigma A_i^{\,2}-(m-1)\,\Sigma A_i}{x^3}\ldots\right\}$$

$$= x-m-\sum_k A_k\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\left(\frac{1}{x}+\frac{A_k}{x^2}+\frac{A_k^{\,2}}{x^3}+\ldots\right)$$

נשווה את מקדמי $\frac{1}{x}$ משני האגפים:-

$$\frac{1}{2}m(m-1)-\Sigma A_k$$

$$= -\sum_k A_k\cdot\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]$$

ז.א.

$$(11)\qquad \Sigma A_k\left\{1-\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\right\}=\frac{1}{2}m(m-1)$$

<u>הערות נוספות:</u>

א. אם נוסיף קבוע λ לכל A_i נקבל

$$(11')\qquad \sum_k (A_k+\lambda)\left\{1-\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{}{A_i-A_k}\right]\right\}=\frac{1}{2}m(m-1)$$

נחסר עכשיו (11) מ-(11') ונחלק ב-λ. נקבל

$$\sum_k \{ 1- \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}] \} = 0$$

ז.א.

$$\sum_k \prod_i^{(k)} [1+\frac{1}{A_i-A_k}] = m$$

ב. אם נשווה את מקדמי $\frac{1}{x^2}$ ב- (10) נקבל

$$\sum_k A_k^2 \{1- \prod_i^{(k)}[1+\frac{1}{A_i-A_k}] =(m-1)\sum_i A_i -\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$

<u>ביבליוגרפיה:</u>

1) עבודת גמר של מר רפאל אליעזר שהוגשה לטכניון.

2) A. YOUNG, on Quant. Substit. Analysis, Proc. London Math. Soc. II, 28 (1928) 255.

חלוקות

בכמה דרכים ניתן להציג את המספר 7 בסכום של 3 מספרים טבעיים? יש לנו

$$7 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$$

ולכן התשובה היא 4.

בכמה דרכים אפשר להציג 7 כסכום של מספרים טבעיים (במספר כלשהו) אשר הגדול ביניהם הוא 3? רואים כי

$$7 = 3+3+1 = 3+2+2 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1$$

וגם כאן התשובה היא 4.

האם זהות זו בין שתי התשובות מקרית? ננסה דוגמה שניה. נפרק את 10 ל-4 מספרים טבעיים:-

$$10 = 7+1+1+1 = 6+2+1+1 = 5+2+2+1 = 5+3+1+1 = 4+4+1+1$$

$$= 4+3+2+1 = 4+2+2+2 = 3+3+3+1 = 3+3+2+2$$

דהינו 8 דרכים. מאידך גיסא אם ננסה לפרק את 10 למחוברים טבעיים אשר הגדול ביניהם הוא 4, נקבל

$$10 = 4+4+2 = 4+4+1+1 = 4+3+3 = 4+3+2+1 = 4+3+1+1+1$$

$$= 4+2+2+2 = 4+2+2+1+1 = 4+2+1+1+1+1 = 4+1+1+1+1+1+1$$

שוב 8 הצגות.

באופן כללי נסמן ב- $P_{n,m}$ מספר הדרכים בהן אפשר להציג את המספר הטבעי n כסכום של m מספרים טבעיים, ואילו $Q_{n,m}$ הוא מספר הדרכים להציג n כסכום של מספרים טבעיים אשר הגדול ביניהם הוא m. ראינו זה עכשיו כי $P_{7,3} = Q_{7,3}$ ו- $P_{10,4} = Q_{10,4}$.
עכשיו נראה כי אלה רק מקרים מיוחדים של משפט כללי.

<u>משפט:</u> עבור כל n,m טבעיים, $P_{n,m} = Q_{n,m}$.

<u>הוכחה:</u> נתחיל שוב בדוגמה m=3,n=7. את החלוקות השונות של 7 ל-3 מספרים טבעיים נוכל להציג ע"י דיאגרמות:-

```
x x x x x      x x x x      x x x      x x x
x              x x          x x x      x x
x              x            x          x x
  5+1+1          4+2+1        3+3+1      3+2+2
```

אנו רואים כי אפשר להתאים לכל חלוקה כזאת דיאגרמה מתאימה. עכשיו נגדיר את הדיאגרמה <u>הצמודה</u> לדיאגרמה נתונה, והיא זו שמתקבלת ע"י סבוב ב- 90° מעלות. למשל הדיאגרמה של 5+1+1 הופכת ל-

```
x x x
x
x
x
x
```

והיא 3+1+1+1+1 . כמו כן 4+2+1 הופך ל-

```
x x x
x x
x
x
```

דהינו 3+2+1+1 . ברור כי תהליך זה מזווג לכל חלוקה משולשת של 7 חלוקה אחרת אשר המחובר הכי גדול בה הוא 3. מאחר והתאמה זו היא חד-חד ערכית, יוצא כי מספר החלוקות מהסוג הראשון שווה למספר החלוקות מהסוג השני. גם ברור כי שיטת ההוכחה כללית, וכוחה יפה לגבי כל m,n , ומכאן המשפט.

המשפט הבא מתייחס לחלוקת מספר טבעי לחלקים טבעיים <u>שונים</u>, יהיה A_n מספר החלוקות של n למספר זוגי של מספרים טבעיים שונים ואילו B_n הוא מספר החלוקות למספר בלתי זוגי של מספרים טבעיים שונים. נוכיח את המשפט הבא:-

<u>משפט:</u> עבור $n = \frac{k(3k\pm1)}{2}$ קיים $A_n = B_n + (-1)^k$

עבור n אחר קיים $A_n = B_n$

<u>הערה:</u> לדוגמא, רואים כי

$$\frac{1\cdot(3-1)}{2} = 1$$

$$\frac{1\cdot(3+1)}{2} = 2$$

ולכן

$$A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = -1$$

אבל

$$\frac{2(3\cdot 2-1)}{2} = 5$$

$$\frac{2(3\cdot 2+1)}{2} = 7$$

ולכן $A_5 - B_5 = A_7 - B_7 = +1$.

מאידך גיסא אין מספר טבעי k כך ש- $3=\frac{k(3k\pm 1)}{2}$, ולכן $A_3 = B_3$.

<u>הוכחה:</u>

כדי לפשט את הסימון נקרא במהלך הוכחת המשפט הזה <u>חלוקה זוגית</u> של n , כל חלוקה של המספר הטבעי n למספר זוגי של מספרים טבעיים שונים אחד מהשני; ובדרך דומה נדבר על חלוקה בלתי זוגית.

כמו בהוכחת המשפט הראשון, נשתמש גם כאן בדיאגרמות. מאחר שמדובר בחלוקות למספרים שונים, יוצא כי בדיאגרמה המתארת חלוקה כזאת לא יהיו שתי שורות שוות.

ניקח עכשיו לדוגמא את החלוקה $23=7+6+5+3+2$, שהיא:-

$$\begin{array}{lllllll} x & x & x & x & x & x & \boxed{x} \\ x & x & x & x & x & \boxed{x} & \\ x & x & x & x & \boxed{x} & & \\ x & x & x & & & & \\ x & x & & & & & \end{array}$$

שלוש הנקודות שנחסמו ברבועים מהווים כאן "גבול צפון-מזרח", המוגדר ע"י סדרת הנקודות שמתקבלות אם יוצאים מהנקודה העליונה מצד ימין ויורדים בכוון "דרום-מערב". מסמנים את הגבול הזה ב-E . את השורה התחתונה של הדיאגרמה, במקרה שלנו שתי הנקודות החסומות במעגלים, מסמנים ב- S . בהמשך ההוכחה נסמן את מספר הנקודות ב- E ע"י האות היוונית ε , ומספר הנקודות ב-S באות τ . בחלוקה $23 = 7+6+5+3+2$ יש לנו $\varepsilon=3$, $\tau=2$. אם נסתכל בחלוקה $24 = 8+6+5+3+2$,

```
x x x x x x x x
x x x x x x
x x x x x
x x x
x x
```

נקבל $\varepsilon=1$, $\tau=2$. עכשיו נוכיח את העובדות הבאות:-

א. אם n אינו מהצורה $\frac{1}{2}k\,(3k\pm1)$ (למשל עבור $n=23$) אפשר לערך התאמה חד-חד ערכית בין החלוקות הזוגיות של n לבין החלוקות הבלתי-זוגיות.

ב. אם ל- n יש אחת הצורות $\frac{1}{2}k\,(3k\pm1)$ אזי אפשר לערך התאמה כמו ב-(א), פרט לחלוקה אחת, בעלת אותה זוגיות כמו k , אשר אין לה חלוקה מתאימה עם הזוגיות ההפוכה.

קל לראות כי המשפט נובע מיד משתי העובדות האלה. כדי להוכיח אותן נבחין בין האפשרויות הבאות:-

(i) $\tau<\varepsilon$.

(ii) $\tau>\varepsilon+1$.

(iii) $\tau=\varepsilon$ ואין ל- S,E נקודה משותפת.

(iv) $\tau=\varepsilon+1$ ואין ל- S,E נקודה משותפת

(v) $\tau=\varepsilon$ או $\tau=\varepsilon+1$ והקווים S,E נפגשים בנקודה.

נראה כי רק במקרה (v) לא נוכל לערך את ההתאמה בין החלוקות הזוגיות והבלתי-זוגיות, וכי המקרה הזה יכול להתעורר אך ורק כש- n היא מאחת הצורות $\frac{1}{2}k\,(3k\pm1)$.

1. במקרה ש- $\tau<\varepsilon$ נוכל להעביר את הנקודות של S ולהעמידן ליד E . למשל בדוגמה $7+6+5+3+2 = 23$ נעביר את הנקודות החסומות במעגלים ל"גבול צפון-מזרח" ונקבל

$$\begin{array}{l} \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boxed{\times}\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boxed{\times}\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boxed{\times} \\ \times\ \times\ \times \end{array}$$

שהוא $8+7+5+3 = 23$, מאחר שהפעולה הזאת מבטלת שורה אחת, יוצא כי היא הופכת את זוגיות החלוקה.

2. עבור $\varepsilon+1<\tau$ נוכל להעביר את הנקודות של E ולהעמידן מתחת ל- S . מאחר ש- $\varepsilon<\tau$ (למעשה $\varepsilon<\tau+1$) תהיה השורה החדשה קטנה מה-S המקורי ולכן תהיה החלוקה החדשה כשרה. מאידך הגדלנו ע"י פעולה זו את מספר השורות ב-1 ולכן הפכנו את זוגיות החלוקה. למשל מהחלוקה $24=8+6+5+3+2$ נקבל

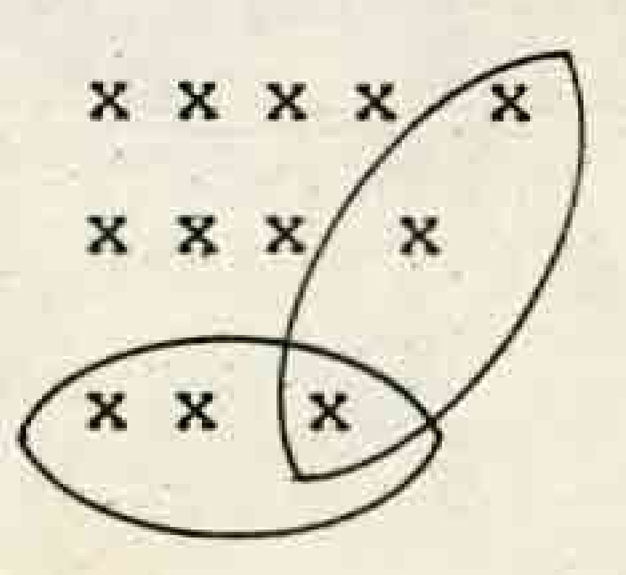
$$\begin{array}{l} \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times \\ \times \end{array}$$

ז.א. $24 = 7+6+5+3+2+1$

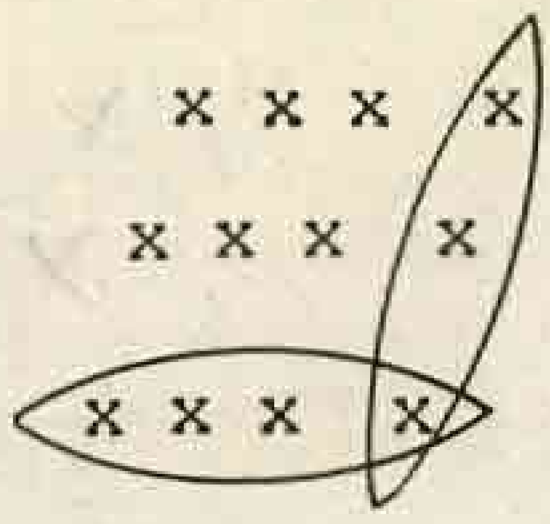
3. קל לראות כי עדין אפשר לבצע את אותה פעולה כמו ב-(1).

4. אפשר לעשות את הפעולה כמו ב-(2).

5. במקרה $\varepsilon=\tau$ תהיה דיאגרמה מהצורה



ובמקרה ז=ε+1 נקבל



ציירנו את הדיאגרמות עבור ז=3 , אבל הצורה הכללית ברורה. אנו רואים מיד כי על הדיאגרמות האלה אי-אפשר לבצע את הפעולות אשר עליהן התבססנו במקרים הקודמים, ואין להתאים להן דיאגרמות עם זוגיות הפוכה. אבל מתי נוכל לקבל דיאגרמות כאלה? אם נכתב $k=\varepsilon$ נראה כי, במקרה הראשון,

$$n = k + (k+1) \dots + (2k-1) = \frac{1}{2} k(3k-1)$$

$n=k$
$a_1=k$

ואילו במקרה השני

$$n = (k+1) + (k+2) \dots + 2k = \frac{1}{2} k(3k+1)$$

אנו רואים איפוא כי עבור כל n שאין לו אחת הצורות האלה אפשר להקים את ההתאמה בין כל החלוקות הזוגיות לכל החלוקות הבלתי זוגיות; ואילו עבור כל n בעלת אחת הצורות המדוברות תהיה חלוקה אחת בעלת זוגיות k חורגת, ואת כל שאר חלוקות n אפשר להתאים זו לזו בזוגות ובזה הוכחנו את המשפט.

מעניין כי מהמשפט האחרון ניתן להסיק את הנוסחה הבאה:-

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots = 1-x-x^2+x^5+x^7 \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

כש- $a_n = (-1)^k$ עבור $n = \frac{1}{2}k(3k\pm1)$, ו- $a_n = 0$ עבור ערכים אחרים של n .

כי כדי לקבל איבר x^n במכפלה אנו צריכים לקחת איברים מהגורמים השונים אשר מכפלתם, תהיה x^n . למשל נקבל x^7 מ- $x \cdot x^2 \cdot x^4$ או מ- $x^2 \cdot x^5$ וכו'. מאחר שהחזקות השונות של x מופיעות בגורמים של המכפלה בסימן שלילי, יוצא כי כל מכפלת מספר זוגי של איברים ל- x^n תתרום $+1$ למקדם, ואילו מכפלת מספר אי-זוגי תתרום -1.
יוצא כי יהיו A_n מכפלות שיתנו כל אחת $+x^n$ ו- B_n מכפלות שיתנו כל אחת $-x^n$, ולכן המקדם של x^n במכפלה הסופית תהיה $A_n - B_n$.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:-

1. לכתב בצורה ברורה (או להדפיס).
2. להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3. למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו למערכת, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ-31.3.72.
4. לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגריים על יד מספר הבעיה הוא מספר הנקודות המיוחסות לאותה שאלה.

466 (3) סדרת המספרים הטבעיים $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ מוגדרת ע"י $a_1=2$, $a_{n+1} = a_n^2-a_n+1$ $(n=1,2,\dots)$. הוכח כי אין לשני איברי הסדרה גורם משותף.

467 (2) הוכח כי הפתרון היחידי במספרים שלמים של המשואה $x(x^2+1)=y^2$ הוא $x=y=0$.

468 (4) קבוצה של 6 חיילים יכולה לצעד ב-4 צורות שונות, דהינו 6×1, 3×2, 2×3, או 1×6. מה הוא מספר החיילים הקטן ביותר שיוכל לצעד בדיוק ב-64 צורות שונות?

469 (4) קבוצה של 100 נקודות במרחב היא כך שאין שלש מבין הנקודות על קו ישר אחד. הוכח שניתן לחבר 2500 מבין הזוגות של הנקודות כך שלא יווצר ע"י החיבורים אף משולש אחד אשר כל קדקדיו שייכים לקבוצה.

470 (4) נתונים שני מעגלים C_1, C_2 עם מרכזיהם O_1, O_2 בהתאמה. המעגלים C_1, C_2 נפגשים בשתי נקודות A, B ; AO_1 פוגש את C_1 שנית ב- P_1 ואילו AO_2 פוגש את C_2 שנית ב- P_2. לבנות את האנך האמצעי ל- P_1P_2 תוך שמוש בסרגל (בלתי מסומן) בלבד. (הוצע ע"י אדמון ששון).

471 (5) נתון משולש קהה-זוית, לחלק אותו ע"י קווים ישרים למשולשים בעלי זויות חדות בלבד, האם הדבר תמיד אפשרי? לכמה משולשים יש בדרך כלל לחלק את המשולש המקורי?

472 (3) בועד צבורי מסוים הוחלט למנות 5 ועדות משנה כך שכל חבר הועד יהיה שייך בדיוק לשתי ועדות משנה, ולכל זוג של ועדות משנה יהיה בדיוק חבר משותף אחד. כמה הם חברי הועד המקורי?

473 (3) לפתר את המשואה

$$x = +\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$$

ולהוכיח שיש לו בדיוק פתרון אחד.

474 (3) E הוא האמצע של מיתר AB של מעגל; ו- C,D הם נקודות על AB כך ש- AC=CD=DB . P הוא נקודה כלשהי על היקף המעגל ו- PC,PE,PD פוגשים את המעגל שנית ב- H,L,K בהתאמה. הוכח כי

$$32\left(\frac{1}{CH^2} + \frac{1}{DK^2}\right) - \frac{81}{EL^2} = \frac{4}{CD^2}$$

(הוצע ע"י א. גולדשטיין).

475 (5) להראות שאפשר תמיד לחתך ארבעון כלשהו ע"י מישור לפי מעוין (הוצע ע"י ד"ר א. כרוך).

476 (5) הוכח כי, עבור $0<x<1$,

$$(1+x)^6 > 12x(1-x)^5$$ (הוצע ע"י ש. איזק).

477 (4) נתון כי יש בדיוק מערכת אחת של x,y,z המקיימים

$$15(x+y+z) = 7$$

$$\frac{5}{5x+1} + \frac{3}{3y+1} + \frac{1}{z} = m$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 ,$$

לקבע את הערך של m . (הוצע ע"י ש. איזק)

478 (3) $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ הם 2n מספרים חיוביים כלשהם ו-

$$A_n = \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\ ,\quad B_n = \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\dots+\frac{b_n}{a_n}$$

הוכח כי A_n ,B_n לא יוכלו להיות שניהם קטנים מ- n.

479 (3) עבור כל מספר טבעי n אנו מגדירים

$$G_n = n^{2^{2^2}} - n^{2^2}$$

הוכח כי G_2 מחלק את G_n $(n = 1,2,\dots)$.

480 (5) a,b,c הם צלעות של משולש, R הוא הרדיוס של המעגל החסום בו. הוכח כי

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 > \frac{3}{2Rr}$$

עם שויון אך ורק כש- $a=b=c$.

פתרון בעיות 450-436

.436 א. <u>הכרחי</u>. כי $n = a+(a+1)\ \dots\ +(a+2k-1) = k(2a+2k-1)$

$$\Longrightarrow\ 2n = 2k(2a+2k-1)$$

ומאחר ש- $2a+2k-1 > 2k$, נובע כי $2a+2k-1 > \sqrt{2n}$.

ב. <u>מספיק</u>. יהיה $n = k(2r+1)$ כש- $(2r+1) > \sqrt{2n}$.
אבל $2n = 2k(2r+1)$, ולכן $2r+1 > 2k$. נציב $a=r-k+1>0$
ואז

$$n = a+(a+1)\ \dots\ +(a+2k-1)$$

.437 נתון כי

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2\,\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

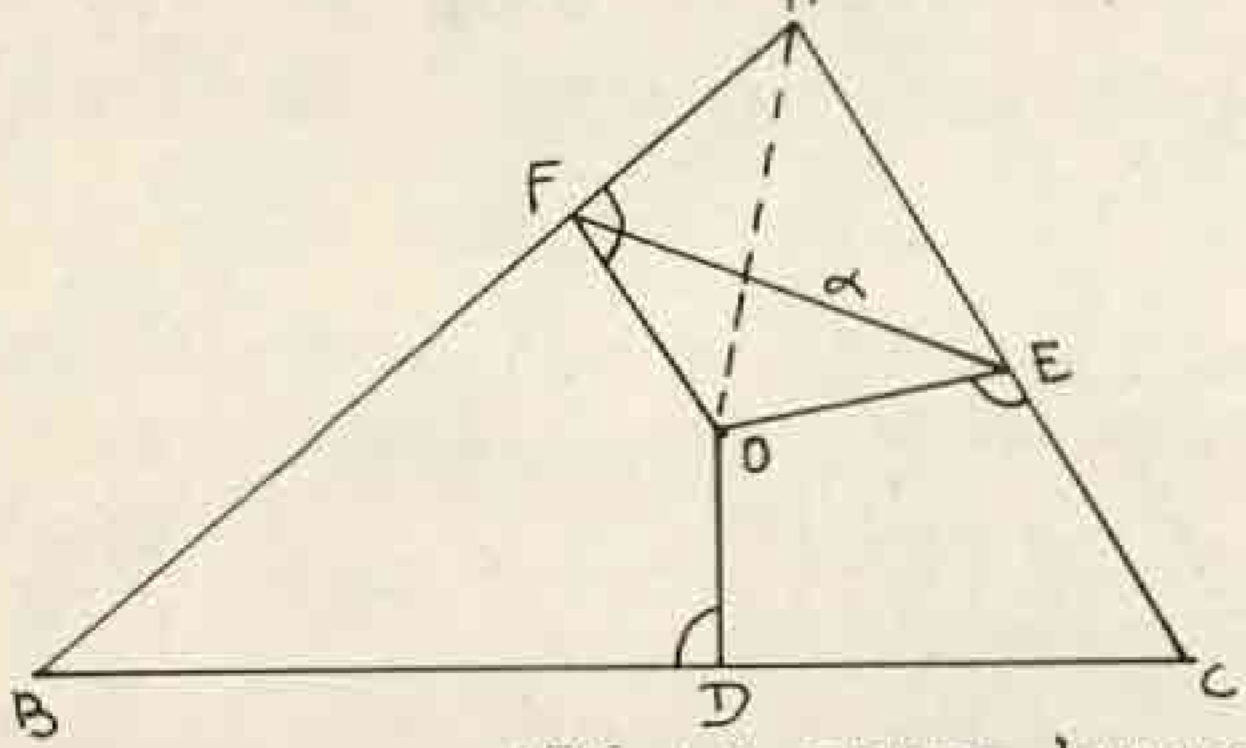
נכפיל ב- $\frac{(n-r+1)!(r+1)!}{n!}$ ונקבל

$$r(r+1) + (n-r)(n-r+1) = 2r(n-r+1)$$

ומכאן $$n^2-n(4r+1) + 4r^2-2 = 0$$

מזה נובע כי $$n^2-n-2 = 4r(n-r)$$

אבל אילו היה n מתחלק ב-4 היה גם n^2-n מתחלק ב-4 ולכן
לא היה n^2-n-2 יכול להיות כפולה של 4.



438. יהיה O נקודת מפגש של
המעגלים BDF, CDE. אזי

$$\theta = \sphericalangle AFO = \sphericalangle BDO = \sphericalangle DOE$$

ולכן $\sphericalangle AFO + \sphericalangle AED = 180^\circ$
ומכאן ש- AFOE חסום במעגל.
עכשיו יהיה p רדיוס המעגל
החוסם את AFOE ו-R זה של המעגל החוסם את ABC.

אזי

$$2p = \frac{AO}{\sin\theta} = \frac{\alpha}{\sin A}$$

$$= \alpha \cdot \frac{2R}{a}$$

ומכאן ש- $$\frac{a \cdot AO}{\alpha} = \frac{2R}{\sin\theta}$$

ובדרך דומה גם $$\frac{b \cdot BO}{\beta} = \frac{c \cdot CO}{\gamma} = \frac{\cdot 2R}{\sin\theta}$$

439. יש לנו $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1 - \frac{x}{y}$ ומכאן

$$\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^3 = \left(1 - \frac{x}{y}\right)^3$$

וכמו כן $$\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)^3 = \left(1 - \frac{z}{x}\right)^3$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right)^3 = \left(1 - \frac{y}{z}\right)^3$$

אם נפתח את כל הסוגרים ונחבר, נקבל

$$2\left(\frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{y^3}\right) + 3\left(\frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz}\right) + 3\left(\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}\right)$$

$$= 3-3(\frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}) +3(\frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2}) - (\frac{x^3}{y^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{y^3}{z^3})$$

ולכן

$$3(\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3})+3(\frac{x^3+y^3z^3}{xyz})=3\{\frac{x(x-z)}{y^2}+\frac{y(y-x)}{z^2}+\frac{z(z-y)}{x^2}\}$$

.440 יש לנו $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ ולכן $4\alpha+4\beta+4\gamma = 4\pi$. מכאן

$$\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma = \sin 4\alpha + 2\sin(2\beta+2\gamma)\cos(2\beta-2\gamma)$$

$$= 2\sin2\alpha\cos2\alpha - 2\sin2\alpha\cos(2\beta-2\gamma)$$

$$= 2\sin2\alpha\ [\cos2(\beta+\gamma) - \cos2(\beta-\gamma)]$$

$$= - 4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$$

בדרך דומה מוכיחים כי

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

ולכן

$$\Sigma\sin4\alpha + \Sigma\sin2\alpha = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

ונשאר להוכיח כי

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leqslant \frac{1}{8}$$

נכתוב $y = (\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^{\frac{1}{3}}$, ועלינו להוכיח כי $y \leqslant \frac{1}{2}$.

אבל $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(1+\cos2\beta)+\frac{1}{2}(1+\cos2\gamma)$

$$= 1 - \cos \alpha\ [\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]$$

$$= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 - 2y^3$$

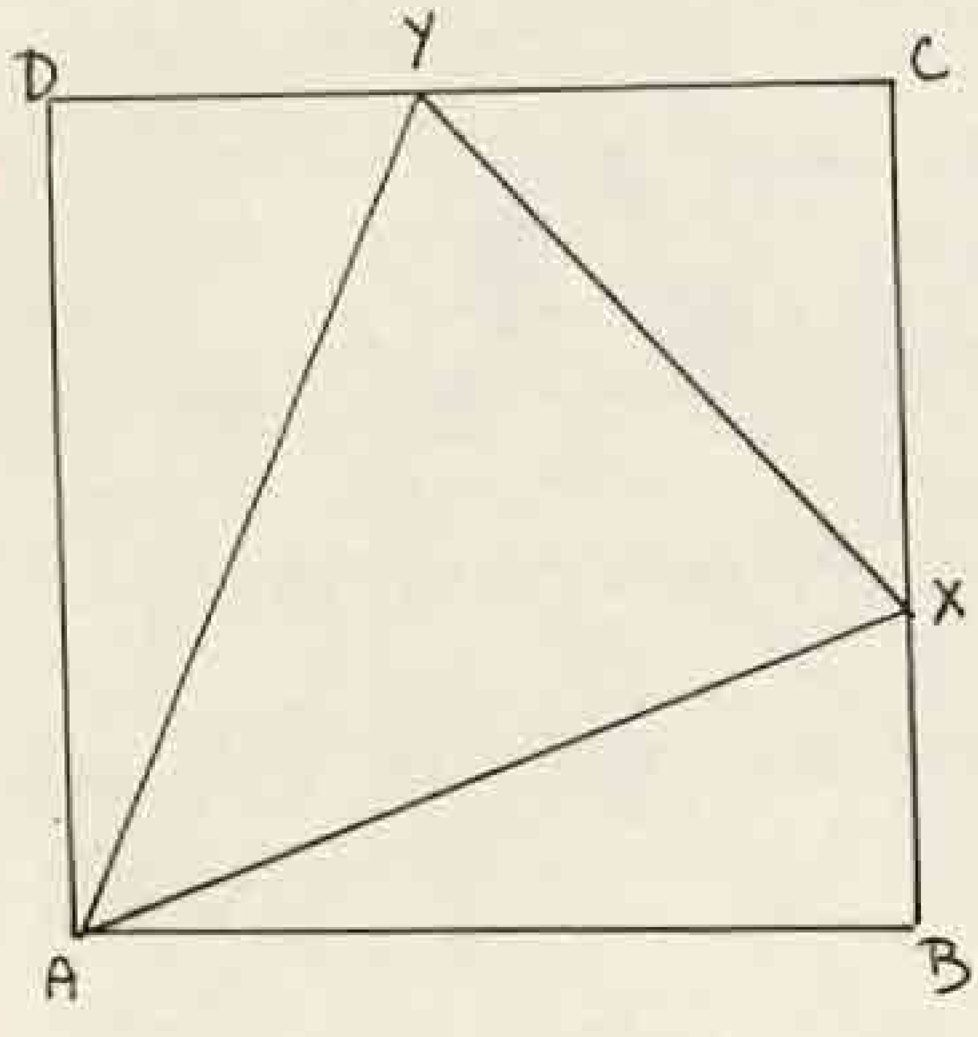
מאידך, לפי משפט הממוצעים,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant 3(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^{\frac{1}{3}} = 3y^2$$

ויוצא כי $3y^2 \leqslant 1 - 2y^3$, ז.א. $2y^3+3y^2-1 \leqslant 0$. אבל ברור

כי $2y^3+2y^2-1$ היא פונקציה עולה של y המתאפסת כש-
$y = \frac{1}{2}$, ולכן, כדי לקיים את האי-שוויון, $y \leq \frac{1}{2}$.
בגלל לקוי בדפוס נוצרה האפשרות לקרא $\sin^4\alpha$ במקום
$\sin 4\alpha$, וכו׳, ואכן כך עשה פותר אחד. מאחר שבצוע הפתרון
היה נכון זכה פותר זה בזכוי מלא בעד הבעיה.

441. אם נתון משולש כלשהו ברבוע ABCD נוכל להמיר אותו במשולש
אשר קדקדיו נמצאים על צלעות הרבוע ואשר צלעותיו אינן קטנות
מאלה של המשולש המקורי (להוכיח). מכאן שיספיק להוכיח את
המשפט עבור משולשים מהסוג השני. בדרך דומה אפשר יהיה
תמיד להזיז קדקוד אחד של המשולש לקדקוד הרבוע, ושוב בלי
להקטין אף צלע של המשולש.
לכן מספיק להוכיח כי במשולש
כמו בציור, לפחות אחת מהצלעות
XY, AY, AX אינה גדולה מ-
$\sqrt{2} - \sqrt{6}$. יהיו $BX = \alpha$, $DY = \beta$.
מ- $AX > \sqrt{6} - \sqrt{2}$ היה נובע כי



$$1 + \alpha^2 > (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$
$$= 8 - 4\sqrt{3}$$

ולכן
$$\alpha^2 > 7 - 4\sqrt{3}$$
$$= (2 - \sqrt{3})^2$$

ז.א. $1 - \alpha < \sqrt{3} - 1$, $\alpha > 2 - \sqrt{3}$

כמו כן $AY > \sqrt{6} - \sqrt{2}$ היה גורר $\beta > 2 - \sqrt{3}$. מזה נובע כי
כאשר גם AX , וגם AY אינם קטנים מ- $\sqrt{6} - \sqrt{2}$,
יתקיים
$$XY^2 = (1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2$$
$$< (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$
$$= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$$

442. באופן כללי נגדיר $F_n = (x+y)^n + (-1)^n(x^n + y^n)$. אזי

$$PF_n = \{(x+y)^n + (-1)^n(x^n + y^n)\}\{(x+y)^2 - xy\}$$

$$= (x+y)^{n+2} - xy(x+y)^n + (-1)^n(x^n+y^n)(x^2+xy+y^2)$$

$$= (x+y)^{n+2} + (-1)^n (x^{n+2} + y^{n+2}) - xy(x+y)^n$$

$$+ (-1)^n [xy(x^n+y^n) + xy\ (x^{n-1}y + xy^{n-1})]$$

$$= F_{n+2} - xy(x+y)^n + (-1)^n\ xy(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})$$

$$= F_{n+2} - QF_{n-1}$$

ולכן $F_{n+2} = PF_n + QF_{n-1}$. מאחר ש- $F_1=1, F_0=3$ נובע בדרך אינדוקציה ש- F_n הוא פולינום ב- P,Q עבור כל n טבעי.
כמה פותרים הוכיחו רק ש- F_{2n+1} הוא פונקציה של P,Q אבל המטרה העיקרית של השאלה היתה דוקא הצורה הפולינומית.
הערה שניה היא כי יש כאן בעיה שהוצגה לראשונה רק עבור n בלתי זוגי. את הבעיה הזאת היה קשה לפתר, דבר שהתאפשר ע"י הכללת הבעיה לכל n.

.443 $$v_{n+1} - u_{n+1} = u_n - 1 \qquad (1)$$

$$6u_{n+1} - 3v_{n+1} = 2u_n - v_n + 8 \qquad (2)$$

ו- $u_1 = 3,\ \ v_1 = 0$

נגדיר $w_n = 2u_n - v_n - 2$ ואז נובע מ- (2) כי $3w_{n+1} = -w_n$.
מאחר שזה נכון עבור כל n טבעי, יוצא כי

$$w_n = (-\tfrac{1}{3})^{n-1}\ w_1$$

$$= 4(-\tfrac{1}{3})^{n-1}$$

מ- (1) מסיקים עכשיו כי

$$u_{n+1} + u_n - 1 = v_{n+1}$$

$$= 2u_{n+1} - w_{n+1} - 2$$

ולכן $u_{n+1} - u_n = 1 + w_{n+1} = 1 + 4(-\tfrac{1}{3})^n$

ז.א. $u_n - u_{n-1} = 1 + 4(-\tfrac{1}{3})^{n-1}$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 1 + 4(-\tfrac{1}{3})^{n-2}$$

$$u_3 - u_2 = 1 + 4(-\tfrac{1}{3})^2$$

$$u_2 - u_1 = 1 + 4(-\tfrac{1}{3})$$

אם נחבר נקבל

$$u_n - u_1 = (n-1)+4\ (-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})^2...+(-\frac{1}{3})^{n-1}\}$$

אבל $u_1=3$, ולכן

$$u_n = n+2-\frac{4}{3}\{1-\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2\ ...\ +(-\frac{1}{3})^{n-2}\}$$

$$= n+2-\{1-(\frac{1}{3})^{n-1}\} = n+1+(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

ואילו

$$v_n = 2u_n - w_n - 2$$

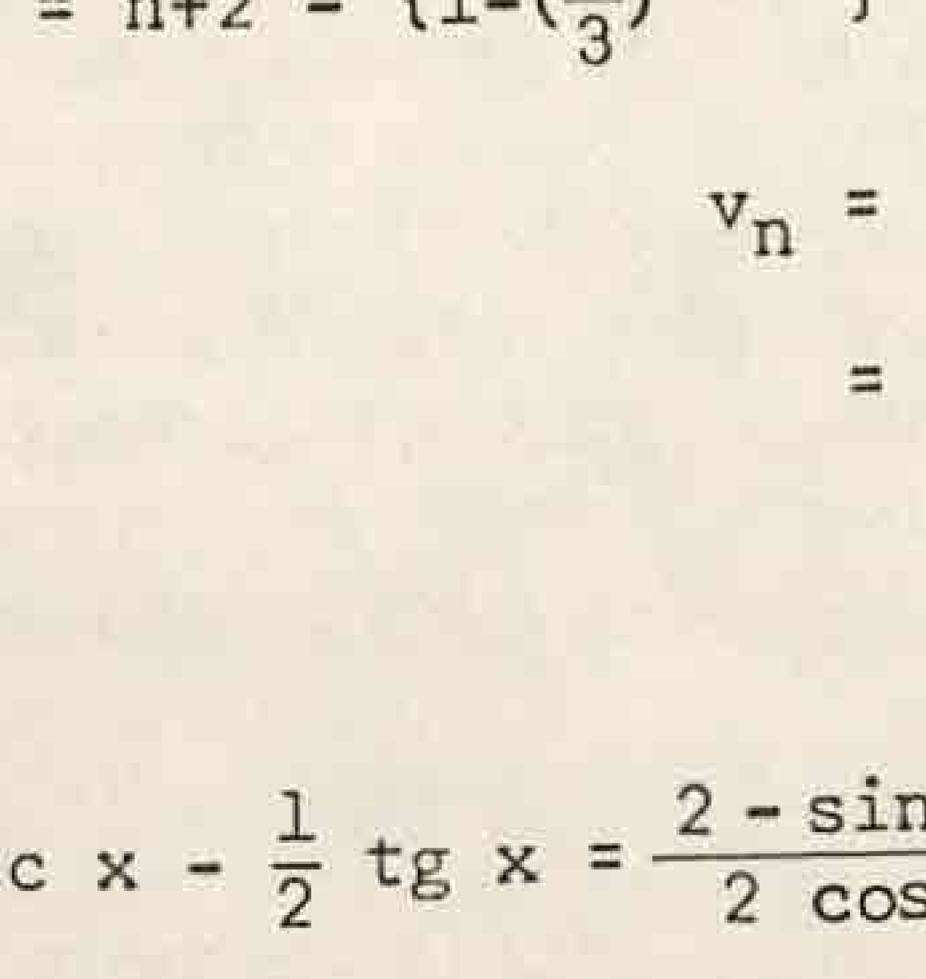
$$= 2n+2-2(\frac{1}{3})^{n-1}$$

.444

$$\sec x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = \frac{2-\sin x}{2\cos x} > \frac{1}{2\cos x} > \frac{1}{2}$$

וכמו כן $\sec y - \frac{1}{2}\operatorname{tg} y > \frac{1}{2}$.

.445 ניקח OA, OB כצירים.
יהיה S האמצע של OA,
P המרכז של המעגל DEF,
Q המרכז של CGH, ו- p,r
הרדיוסים של שני המעגלים
בהתאמה. יהיו (h_1,k_1)
השיעורים של P:



אזי קיים

$$k_1 = PE = r$$

$$OP = \sqrt{h_1^2+k_1^2} = R-r$$

$$PS = \sqrt{h_1^2+(\frac{1}{2}R-k_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}R+r$$

מאלה קל להסיק כי $k_1=\frac{1}{4}R,\ h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}R,\ r=\frac{1}{4}R$. עכשיו יהיו
x,y השיעורים של Q. יש לנו

$$OQ = R - p$$

$$PQ = \frac{1}{4} R + p$$

$$QS = \frac{1}{2} R + p$$

ולכן

$$x^2 + y^2 = (R-p)^2 \qquad (1)$$

$$(x - \frac{R}{\sqrt{2}})^2 + (y - \frac{R}{4})^2 = (\frac{R}{4} + p)^2 \qquad (2)$$

$$x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 = (\frac{R}{2} + p)^2 \qquad (3)$$

נחסר את (1) מ-(2) ונקבל

$$-\sqrt{2}Rx - \frac{1}{2} Ry = \frac{5}{2} Rp - \frac{3}{2} R^2$$

ז.א.

$$2\sqrt{2}x + y = 3R - 5p$$

חיסור מ-(3) יגרר

$$-Rx = 3Rp - R^2$$

ז.א.

$$x = R - 3p$$

ומכאן, בהתחשב במשואה הקודמת,

$$y = (3-2\sqrt{2})R-(5-6\sqrt{2})p$$

אם נציב ב-(1), נקבל

$$(R-3p)^2 + \{(3-2\sqrt{2})R-(5-6\sqrt{2})p\}^2 = (R-p)^2$$

ז.א.

$$15(7-4\sqrt{2})p^2-2Rp(41-28\sqrt{2})+R^2(17-12\sqrt{2}) = 0$$

ומכאן ש-

$$\frac{p}{R} = \frac{(63-32\sqrt{2}) \pm (12+2\sqrt{2})}{255}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}$$

או

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{15}$$

וקל לברר כי רק הפתרון הראשון מקיים את כל התנאים.

446. נכתוב $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ואז שטח המשולש הוא

$$\Delta = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ומכאן

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

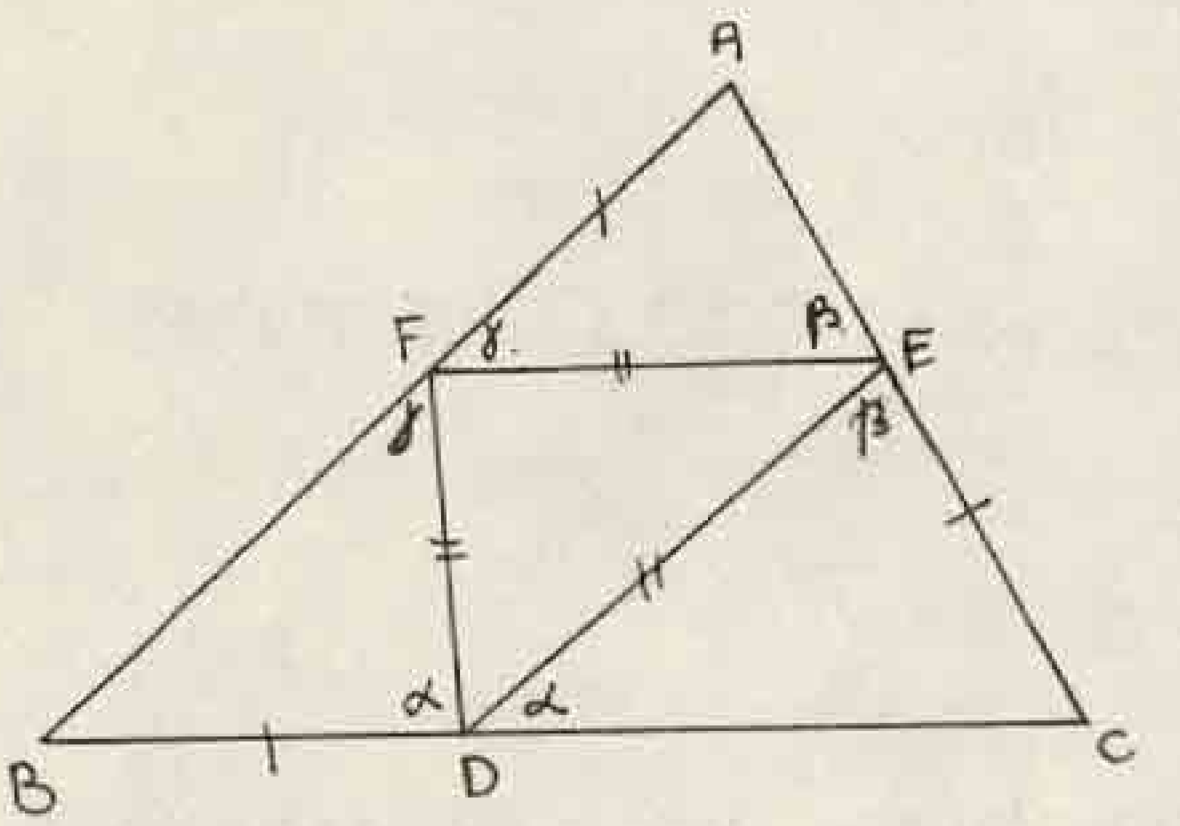
נכתוב גם $\alpha=p-a, \beta=p-b, \gamma=p-c$ ולכן $\alpha+\beta+\gamma = p$,
$a=\beta+\gamma$, $b=\gamma+\alpha$, $c=\alpha+\beta$ ואי-השויון לובש את הצורה

$$\frac{1}{(\beta+\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma+\alpha)^2}+\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

אבל, לפי משפט הממוצעים,

$$\beta+\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma}$$

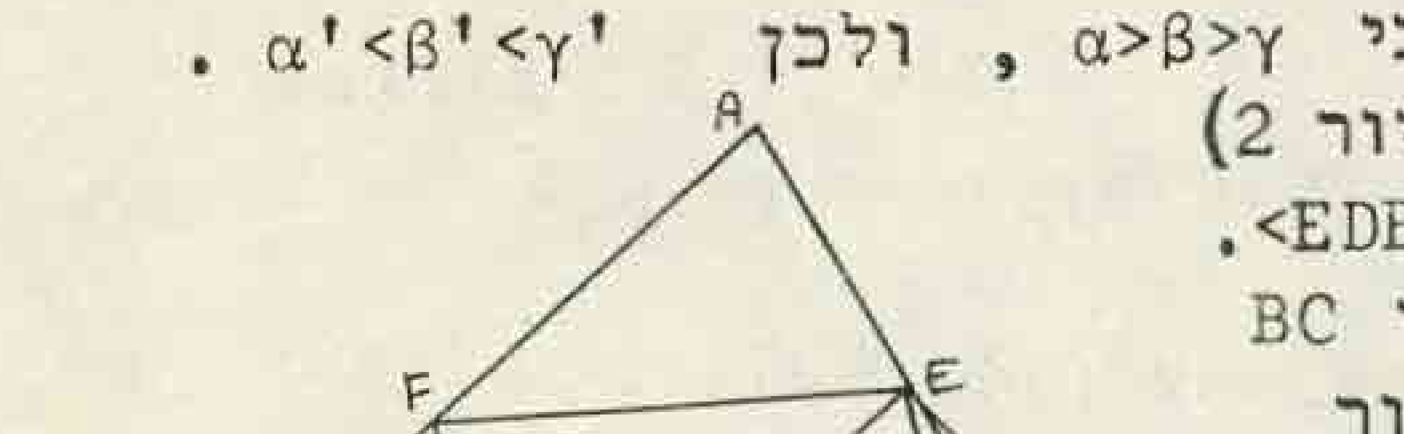
ולכן $\frac{1}{(\beta+\gamma)^2} \leq \frac{1}{4\beta\gamma}$.



447. נגדיר את הזויות α,β,γ, α',β',γ' כמו בציור 1. ברור ש- $120^\circ=\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'$ אם $\alpha=\beta=\gamma$ (ולכן גם $\alpha'=\beta'=\gamma'$) המסקנה מידית.

נניח אפוא כי α, β, γ שונים אחד מהשני, ומאחר שאין הסדר קובע, נניח כי $\alpha>\beta>\gamma$, ולכן $\alpha'<\beta'<\gamma'$. עכשיו נבנה B' (ראה ציור 2) כך ש- $\angle DEB'=\alpha$, $\angle EDB'=\gamma'$. אזי B' יפול מתחת לישר BC ומימין ל- AC. אבל ברור שהמשולשים DEB', EDB חופפים, ולהן

$$EB' = DB = EC$$



כמו כן נבנה את A' כך ש- $\angle EDA' = \beta'$, $\angle DEA' = \gamma$
A' יהיה מתחת ל- BC אבל משמאל ל- AC, וכמו במקרה הקודם.

$$EA' = FA = EC = EB'$$

ולכן E הוא מרכז המעגל החוסם את A'CB . אבל 'A' , B הם
שניהם מצד אחד של BC ומשני צדי EC ולכן מרכז המעגל
A'CB' מוכרח להיות באותו צד של BC כמו 'A',B (להוכיח
את הטענה הזאת!).
מהסתירה הזאת נובע שאין אפשרות ש- α,β,γ יהיו כלם שונים
אחד מהשני. אנו משאירים לקורא לבדק את האפשרויות
$\alpha=\beta>\gamma$, $\alpha>\beta=\gamma$. (פתרון של ח. מרדיקס).

448. קווי החיתוך יוכלו להיות במישור אחד אך ורק כשכלם מקבילים,
וזה יקרה אך ורק כש- $(n-1)$ מבין המישורים מקבילים זה לזה,
והמישור ה- n חותך את כלם. אבל אז יהיה $k=n$, בניגוד להנחה.

449. ברור כי $P_9=$ הסתברות שהשחור יצא ראשון, ולכן

$$P_9 = \frac{1}{10}$$

כמו כן P_8 הוא ההסתברות שהכדור הראשון יהיה לבן, ואילו,
מבין 9 הכדורים שיישארו, נוציא ראשון את השחור. לכן

$$. \; P_8 = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

נוכל להמשיך ולהוכיח בדרך דומה כי $P_r=\frac{1}{10}$ עבור כל r

יש גישה אלטרנטיבית לבעיה:-

נדמה לעצמנו נסוי כשמוציאים את כל הכדורים מהכלי, אבל
רושמים כמה היו כדורים לבנים שיצאו אחרי הכדור השחור.
אזי P_r הוא ההסתברות שהשחור יצא במקום ה- $(10-r)$. אבל
לכדור השחור יש אותה הסתברות להיות בכל מקום שהוא בתור,
ולכן P_r אינו תלוי ב- r .

450. במקרה ש- $a=b=c=0$, הבעיה פשוטה מאד. נניח איפוא ש-
$c\neq0$. נכתוב $tgx=\alpha$, $tgy=\beta$, $tgz=\gamma$. אזי

$$\frac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma} = a\alpha$$

ז.א. $$a\alpha\beta\gamma = a\alpha-\beta-\gamma$$

וכמו כן $$b\alpha\beta\gamma = -\alpha+b\beta-\gamma$$

ו- $$c\alpha\beta\gamma = -\alpha-\beta+c\gamma$$

מכאן ש- $$c(-\alpha+b\beta-\gamma) = b(-\alpha+b\beta-\gamma)$$

$$a(-\alpha-\beta+c\gamma) = c(a\alpha-\beta-\gamma)$$

ז.א.

$$(b-c)\alpha + b(c+1)\beta - c(b+1)\gamma = 0$$
$$-a(c+1)\alpha + (c-a)\beta + c(a+1)\gamma = 0$$

ומכאן

$$\frac{\alpha}{cD_1} = \frac{\beta}{cD_2} = \frac{\gamma}{cD_3}$$

כש-

$$D_3=abc+2ab+a+b-c, D_2=abc+2ca+c+a-b, D_1=abc+2bc+b+c-a$$

מאחר ש- $c\neq 0$ יוצא כי

$$\beta=\frac{D_2}{D_1}\alpha, \qquad \gamma=\frac{D_3}{D_1}\alpha .$$

$$\alpha^3 . \frac{D_2 D_3}{D_1{}^2} = \alpha\{a-\frac{D_2}{D_1}-\frac{D_3}{D_1}\}$$

ומכאן ש- $\alpha = 0$

או $= \pm\sqrt{\dfrac{(abc-a-b-c+2)(abc+2bc+b+c-a)}{(abc+2ca+c+a-b)(abc+2ab+a+b-c)}}$

עם פתרונות דומים עבור γ, β .

רשימת פותרי השאלות 436-450

אופיר אהרן		צה"ל	(18)
אורון רפאל	י"ב	גמנסיה רחביה, ירושלים	(10)
אידלמן דורון	י"א	תיכון עירוני ה׳, תל-אביב	(24)
איזביצקי מיה	י"א	"רמות" בת-ים	(20)
אילן תמיר	י"א	תיכון עירוני ט׳, תל-אביב	(7)
בלאואר מיכאל	י"א	תיכון עירוני ה׳, תל-אביב	(28)
בש אלכסנדר	י"ב	תיכון לווינהרץ, קרית-מוצקין	(3)
גושן ליאורה	י"א	תיכון מקיף א׳, באר-שבע	(40)
גלזמן דני	י"א	תיכון "דרום", חולון	(24)
גרינפלד זיו	י׳	בית-ספר כצנלסון, כפר סבא	(3)
הלוי יאיר	י"א	ישיבת "נחלים", מושב נחלים	(3)
כהן יונתן	י"א	תיכון עירוני ט׳, תל-אביב	(5)
ליברפלד נועם	י׳	" " " "	(3)
ליזין אורי	י׳	גן-שמואל	(15)
ליזרוביץ אריה	י"ב	גמנסיה ריאלית, ראשון לציון	(31)
מרדיקס חיים		מדרשת שדה בקר	(56)
סגל דן	י׳	תיכון עירוני ב׳, בת-ים	(4)
ענבל צבי		צה"ל	(25)
פדר דן	י׳	אורט טכניקום, גבעתיים	(15)
פרידמן מרדכי	י"ב	קרית-נוער, ירושלים	(20)
קורין טל	ח׳	ריאלי אחוזה, חיפה	(11)
שוחט חיים		צה"ל	(37)
שיינינגר אורי		צה"ל	(23)
שנירשניצקי רון	י"ב	גימנסיה "בליך", רמת-גן	(3)
ששון אדמון	י"ב	גימנסיה ראלית, ראשון לציון	(34)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ׳ י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס׳ 4-23357-4

מחיר חוברת בודדת -.1 ל"י

מחיר חתימה ל-4 חוברות 3.50 ל"י

אמנות בע"מ רח׳ לילינבלום 11. טל. 56107-8