גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים

JOHN NAPIER (1550–1617) י. נפיר

כרך 4 סיון תשל"ב - יוני 1972 **מס 8**

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

העורך: י. גילים

דבר המערכת

חוברת זו היא האחרונה המופיעה בצורה הנוכחית, ואנו מתכוננים להתחיל בסוף הקיץ להוציא לאור את "גליונות מתמטיקה" בצורה יותר חדישה ובהיקף יותר רחב. לכן יש לראות בגליון הזה סוף תקופה. נקווה כי התקופה החדשה לא תבייש את הראשונה.

בחוברת הקודמת (כרך 4, מס׳ 7) חלה טעות מצערת אשר עליה אנו מתנצלים בהזדמנות זו. המאמר היפה והעמוק בשם "הכללה למשפט של YOUNG " הוא עבודתו המקורית של נתן ליניאל (מחיפה) ואנו מצטערים על התקלה הטכנית שגרמה להשמטת שמו מהכותרת. בינתיים נביע את התקוה כי קוראים אחרים ילכו בעקבותיו ויתרמו מאמרים - ומצדנו נשתדל שתקלות טכניות כאלה לא תחזורנה.

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה - תשל"ב

מאז הופעת החוברת האחרונה התקיימה האולימפיאדה (תשל"ב) על שני שלביה, התחרות המוקדמת ותחרות הגמר. שני השאלונים מופיעים למטה, וייתכן שימצאו הקוראים ענין לנסות את כוחם על הבעיות. התוצאות השנה היו כדלקמן: -

פרס ראשון :	עפר גאבר
פרסי עידוד :	ראובן אקנר גיל קלעי
ציונים לשבח:	נוגה אלן אמיר באן משה דובינר

התחרות מתקיימת מידי שנה מטעם מכון ויצמן למדע בשיתוף פעולה עם תכניות חסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ, והפרס הראשון הוא מילגת למודים של 2,000 ל"י לשנה ל-4 שנים בכל אוניברסיטה מוכרת בארץ, לפי בחירת הזוכה.
מעניך כי השנה, זו בפעם הראשונה, הגיעו כמעט כל הפרסים והציונים לשבח לתלמידים אשר עוד טרם הגיעו לכתה י"ב. עובדה זו מעודדת את האחראים להאמין כי, לפחות במידת מה, הצליחו להרכיב שאלות הבודקות חשיבה מתמטית יותר מידע טכני. והנה השאלונים.

תחרות מוקדמת

המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה.

1. (10) ממפעל מסוים נגנב רכוש ולמשטרה היה יסוד להניח כי הגניבה בוצעה ע"י אחד מבין השלושה: אברהם, ברוך או גד. כל השלושה נחקרו. הקצין החוקר זכר כי

א) חשוד אחד מבין השלושה מעיד עדות שקר בלבד;

ב) חשוד אחד - עדותו עדות של אמת בלבד;

ג) החשוד השלישי נוהג לומר אמת ושקר לסירוגין.

הקצין החוקר לא יכול למצוא את תיקי שלושת החשודים בארכיון המשטרה ולכן לא יכול היה לקבוע מי מבין החשודים הוא דובר אמת, מיהו השקרן המועד ומיהו השלישי.

השלושה העידו כדלקמן:

אברהם: אני חף מפשע. ברוך הוא האשם.

ברוך: אברהם חף מפשע. גד הוא האשם.

גד: ברוך חף מפשע. אברהם הוא האשם.

התוכל לעזור לקצין החוקר לקבוע: מי גנב את הרכוש ומיהו הדובר אך אמת.

2. (12) I הוא מרכז המעגל החסום במשולש ABC ו-I_1 הוא מרכזו של אחד ממעגלי המגע החיצוניים של המשולש. הוכח כי המעגל החוסם את המשולש ABC עובר דרך אמצע הקטע II_1.

3. (16) נתון שסכום המספרים השלמים העוקבים מ-1 עד $m-1$ (ועד בכלל) שווה לסכום המספרים השלמים העוקבים מ-$m+1$ עד n. ידוע כי $30 \leq m \leq 40$.
מצא את m ואת n.

4. (18) לכל מספר טבעי k אנו מגדירים את המספר

$$A_k = \underbrace{11\ldots1}_{k}\,\underbrace{55\ldots5}_{k}6$$

ש- k הספרות העשרוניות הראשונות שלו הן 1, אחריהן $k-1$
ספרות שכולן 5 וספרה 6 יחידה בסוף המספר.

כן מגדירים את המספר

$$B_k = \underbrace{33\,...\,3}_{k-1}4$$

הוכח כי $A_k = B_k^2$.

5. (20) ידוע כי לשני מעגלים שאינם חותכים זה את זה יש ארבעה
משיקים משותפים. הוכח כי אמצעי כל ארבעת המשיקים
משותפים האלה נמצאים על קו ישר אחד, הניצב על הישר
המחבר את מרכזי המעגלים.

6. (20) פתור את המשוואה:

$$x + y + z = xyz$$

בהנחה ש- x,y,z הם מספרים טבעיים.

7. (22) בין המספרים הטבעיים, החל ב-1 ועד 10,000,000,000
ועד בכלל, מה יש יותר: מספרים בהם מופיעה הספרה 1 או
מספרים בהם הספרה 1 איננה מופיעה?

8. (24) הוכח כי כאשר $x>y>z>0$,

$$x^3y + y^3z + z^3x > xy^3 + yz^3 + zx^3 .$$

9. (28) נתון כי $x + y + z = 2$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$,
הוכח כי לפחות אחד מבין x,y,z שווה ל-2.

10. (30) פתור את המשוואה:

$$\cos 2x + \cos 2(x-\alpha) + \cos 2(x-\beta) + \cos 2(x-\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

תחרות הגמר

המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה.

1. (10) נתונים מספרים ממשיים b,a כך ש $a > b > 0$, ו-n הוא מספר טבעי. הוכח כי

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{a-b}$$

והשויון קיים אך ורק כש- $n = 1$.

2. (12) A,B,C הן זויות של משולש. הוכח כי

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

והשויון קיים אך ורק אם המשולש הוא שווה צלעות.

3. (16) מצא את כל הטורים החשבוניים החיוביים עם הפרש 10, אשר יש להם לפחות שלישיה אחת של איברים עוקבים שהם מספרים ראשוניים.

4. (18) המספרים $a_n,\ldots,a_2,a_1$ הם איברים חיוביים של טור חשבוני עולה.

הוכח כי

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 \geq (a\, a_n)^n$$

5. (18) C,B,A הן זויות של משולש, R הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש, ו-r הרדיוס של המעגל החסום במשולש. הוכח כי

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2r}{R}$$

6. (22) יהיו r,s שני מספרים טבעיים. הוכח כי המספר הטבעי

$$N = r^4 + 4s^4$$

אינו ראשוני, מחוץ למקרה יוצא מן הכלל אחד. מהו מקרה זה?

7. (22) m,n הם מספרים טבעיים ו- $m \geqslant 2$,$n \geqslant 3$. הוכח שאפשר תמיד למצוא שני מספרים טבעיים a,b כך ש-

$$m^n = a^2 - b^2$$

8. (24) הוכח כי $x^6 - x^4 + x^3 - x + 1 > 0$ עבור כל x ממשי.

9. (26) המשולש ABC נמצא כולו בפנים מקבילית ששטחה 1. הוכח כי שטח המשולש אינו גדול מ-$1/2$.

10. (28) הוכח כי, עבור x,y,z חיוביים,

$$8xyz \leqslant (y+z)(z+x)(x+y) \leqslant \frac{8}{3}(x^3+y^3+z^3)$$

11. (30) הוכח כי ניתן לכתוב כל מספר טבעי N בצורה יחידה כסכום של מספר סופי של מחוברים בצורה

$$N = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! \ldots + a_n \cdot n!$$

כשכל ה-a_i הם מספרים טבעיים ומקיימים $0 \leqslant a_i \leqslant i$.

12. (30) הצלעות AB, CA, BC של משולש ABC הן c, b, a בהתאמה. P הוא נקודה פנימית של BC ו- $\frac{BP}{PC} = \lambda$.

הוכח כי

(i) $$(\lambda + 1)\, AP^2 = \lambda b^2 + c^2 - \frac{\lambda a^2}{1+\lambda}$$

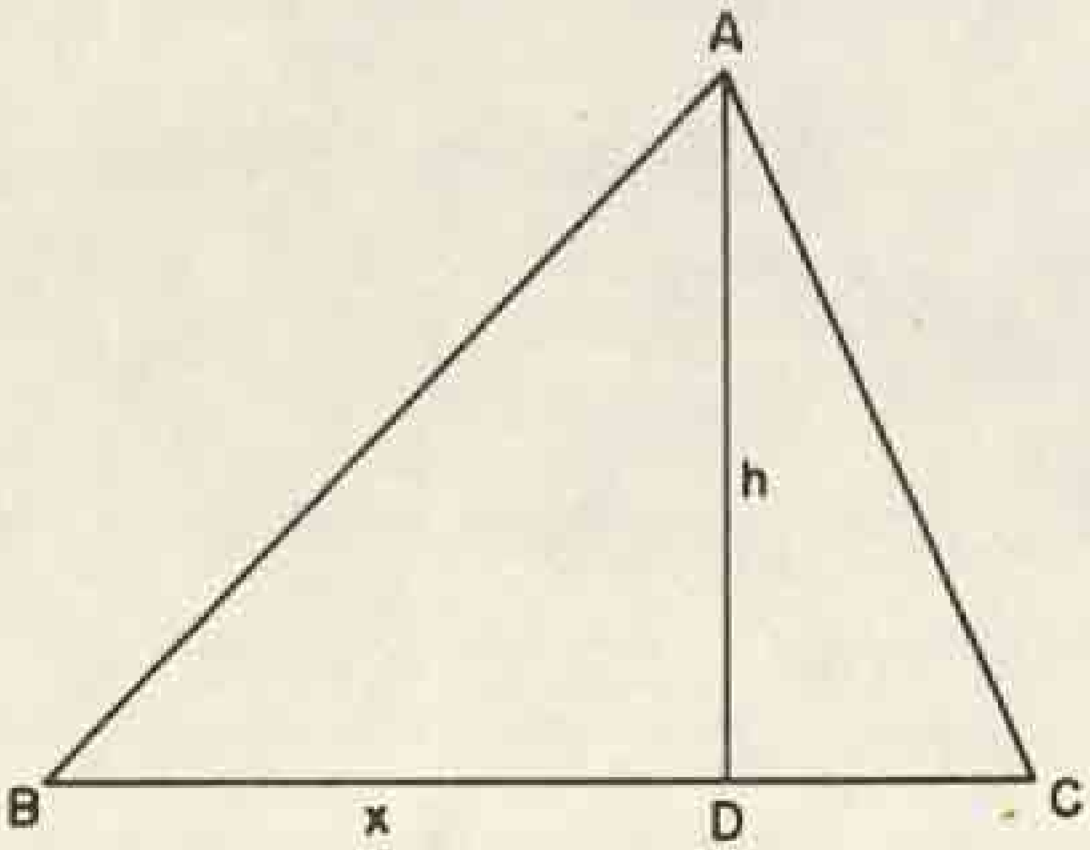
(ii) אם לוקחים את R,Q על AB,CA בהתאמה כך שגם $\frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} = \lambda$, אזי יהיה

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant AP^2 + BQ^2 + CR^2 \geqslant \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

נוסחת הירון

בחוברת מס' 7 מכרך 4 של "גליונות מתמטיקה" הזמנו מהקוראים הוכחות הנדסיות טהורות, שלא בעזרת טריגונומטריה, לנוסחת הירון המפורסמת עבור שטח של משולש. קבלנו תגובות משבעה קוראים, מתוכם ששה שהציעו הוכחה אחת (עם הבדלים קטנים) והשביעי הוכחה אחרת. תמצאו למטה את שתי ההוכחות, וגם הוכחה שלישית, זו של הירון עצמו. יש לציין כי לפי הטעם של ימינו, הוכחת הירון פחות יפה משתי האחרות.

ובכן נתחיל עם משולש ABC, כש- $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$; $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ו- S שטח המשולש. יהיה AD הניצב מ- A ל- BC, $AD=h$, $BD=x$. יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש, r הרדיוס שלו, ו- A',B',C' נקודות המגע שלו עם הצלעות BC, CA, AB בהתאמה. יהיה I_1 מרכז מעגל המגע החיצוני מול BC, r_1 הרדיוס שלו, ויהיו A_1, B_1, C_1 נקודות המגע שלו עם BC, המשך AC, והמשך AB בהתאמה. עכשיו נגש לשתי ההוכחות הראשונות.



ציור 1

__הוכחה 1__

יש לנו -

$$c^2 = h^2 + x^2$$

$$b^2 = h^2 + (a-x)^2$$

ולכן

$$x^2 - (a-x)^2 = c^2 - b^2$$

ומכאן

$$x = \frac{c^2-b^2+a^2}{2a}$$

ולכן

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c-x)(c+x)$$

$$= \frac{2ac-c^2-a\ +b^2}{2a} \cdot \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\,[b^2-(c-a)^2][(c+a)^2-b^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2}\,(b-c+a)(b+c-a)(c+a-b)(c+a+b)$$

$$= \frac{4}{a^2}\,p(p-a)(p-b)(p-c)$$

יוצא כי

$$S = \frac{1}{2}ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

[את ההוכחה הזאת קבלנו מאת דוד וישליצקי (גבעתיים), אורלי ירון (תל-אביב), אלקנה סימה (חיפה), יואב פנקוביץ (תל-אביב), גבי רוזנהולץ (צה"ל), ויוסף שיף (תל-אביב)]

<u>הוכחה 2</u> (נשלח ע"י ה.ד. קאר (מולדת).

$$S = S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rp$$

וכמו כן

$$S=S_{ABC}=S_{I_1AB}+S_{I_1CA}-S_{I_1AB}=\frac{1}{2}r_1(c+b-a)$$

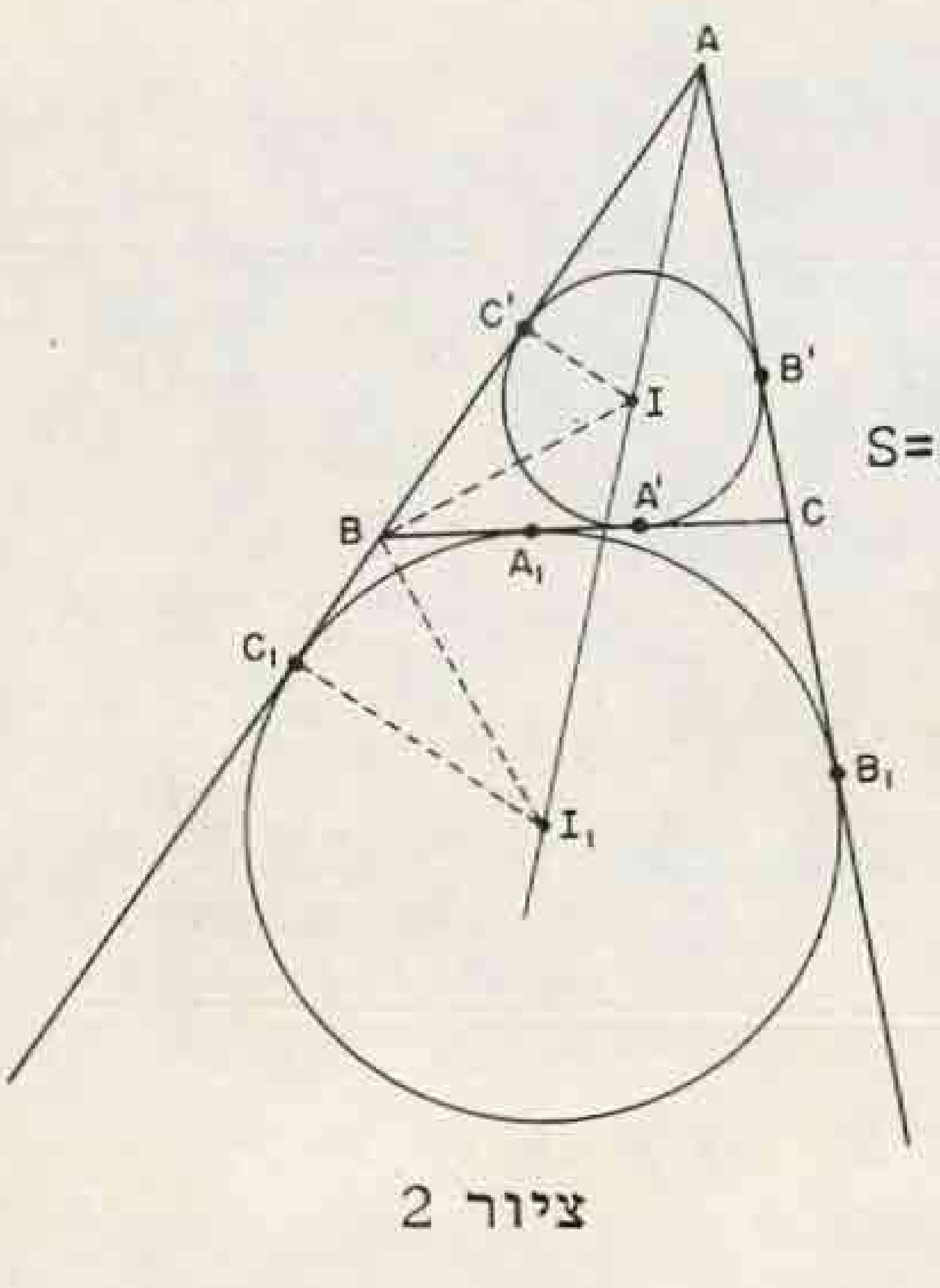
$$= r_1(p-a)$$

מכאן ש-

$$S^2 = rr_1p(p-a)$$

ונשאר איפוא להוכיח ש-

$$rr_1 = (p-b)(p-c)$$



ציור 2

אבל $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$

ולכן $p = BA' + CB' + B'A$

ז.א. $BC' = BA' = p - b$

וכמו כן

$$AB + BA_1 = AB + BC_1$$

$$= AC_1 = AB_1 = AC + CA_1$$

ולכן $AB + BA_1 = p$

ז.א. $BC_1 = BA_1 = p-c$

נסתכל עכשיו במשולשים I_1BC_1 , BIC'

$$\sphericalangle BC_1I_1 = \sphericalangle IC'B = 90^\circ$$

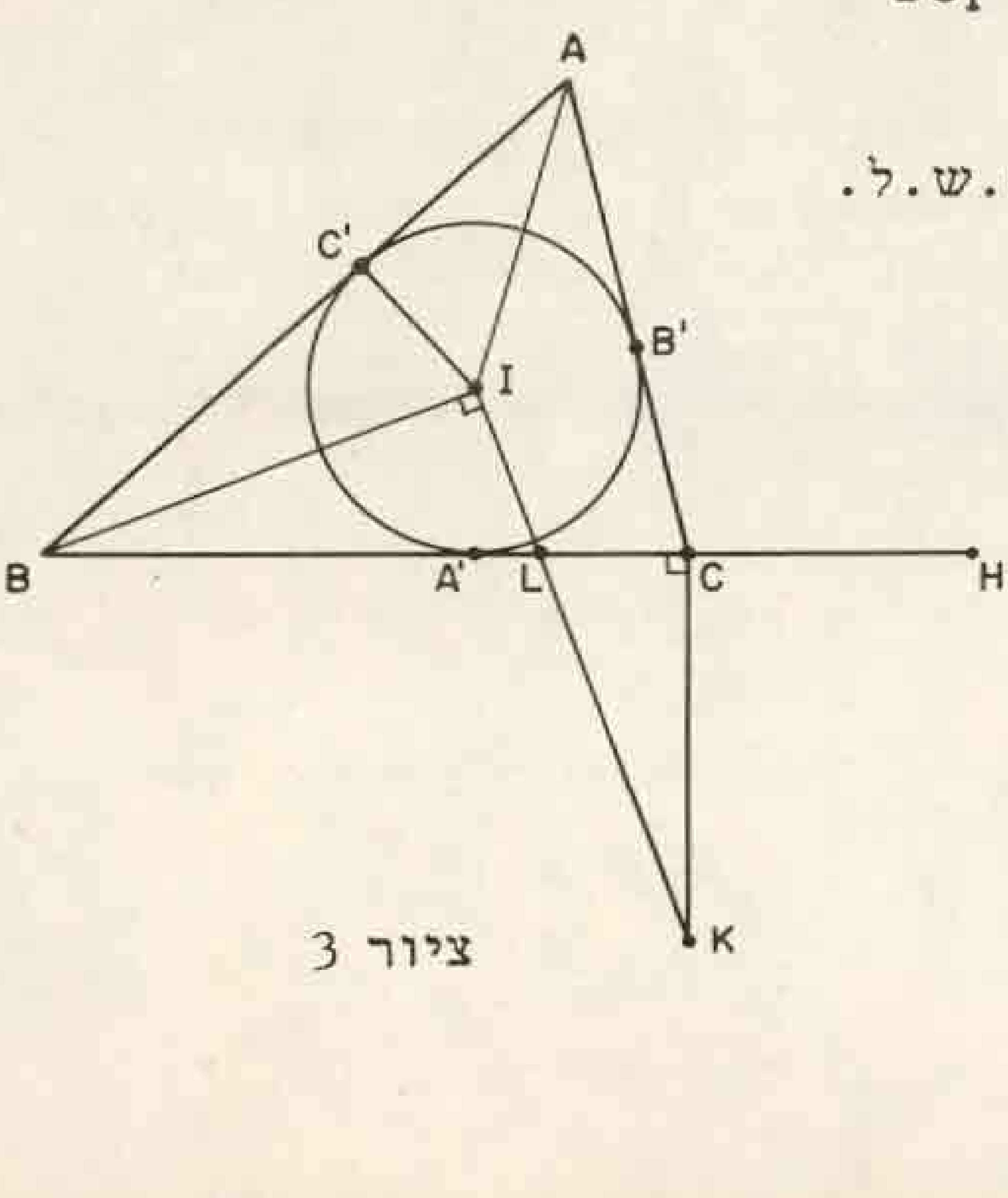
$$\sphericalangle I_1BC = \frac{1}{2}(180^\circ - B)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}B = \sphericalangle BIC'$$

ולכן המשולשים I_1BC_1, BIC'

$$\frac{IC'}{BC_1} = \frac{BC'}{I_1B}$$

ז.א. $rr_1 = (p-b)(p-c)$ מ.ש.ל.



ציור 3

הוכחה 3

בניה. נמשיך את BC עד H
כך ש- $CH = AC' = p-a$
ואז $BH=p$.
יהיה IK ניצב
ל- BI , ו- CK
ל- BC. IK פוגש את BC ב- L.

<u>הוכחה</u>

$$S = pr = BH \cdot IA'$$

אבל $\sphericalangle CKI = \sphericalangle CBI = \frac{1}{2}B$

מאידך $<BIK = <BCK = 90^\circ$ ולכן המרובע BICK חסום במעגל. מזה נובע כי

$$\sphericalangle BKI = < BCI = \frac{1}{2}C$$

ומכאן ש- $\sphericalangle BKC = \frac{1}{2}(B+C) = 90^\circ - \frac{A}{2}$

ז.א. $\sphericalangle BCK = \frac{1}{2}A = < IAC$

והמשולשים KBC, IAC' דומים.

אנו מסיקים כי

$$\frac{BC}{CK} = \frac{AC'}{C'I} = \frac{CH}{IA'}$$

ולכן

$$\frac{BC}{CH} = \frac{CK}{IA'} = \frac{CL}{LA'}$$

ומכאן ש-

$$\frac{BH}{CH} = \frac{CA'}{LA'}$$

יוצא כי

$$\frac{BH^2}{CH^2} = \frac{CA' \cdot BA'}{LA' \cdot BA'} = \frac{CA' \cdot BA'}{r^2}$$

ולכן

$$S^2 = r^2 \cdot BH^2 = CH \cdot BH \cdot CA' \cdot BA' = (p-a) \cdot p(p-c)(p-b)$$

הוכחה זו, כפי שאמרנו לעיל, מופיעה בספרו של הירון, אם כי קיים חשד שהיא מתאריך מאוחר יותר והוכנסה לספר ע"י איזה עורך אנונימי.

סדרות של מספרים פריקים - מדור מתקדם

גיל קלעי (ירושלים)

1. הבעיה

אם n,m הם מספרים טבעיים ו- $1 < m \leq n-1$, אזי ברור שהמספר $m + n!$ מתחלק ב- m ולכן אינו ראשוני. יוצא כי, עבור כל n טבעי, n המספרים העוקבים

$$(n+1)! + 2,\ (n+1)! + 3, \ldots,\ (n+1)! + (n+1),$$

הם כלם פריקים. ראינו איפוא כי עבור כל n טבעי ניתן למצא גוש של n מספרים עוקבים אשר כלם פריקים. לפני זמן מה הכליל ד"ר ד. ירדן את המשפט, והוכיח את המשפט הבא.

בכל סדרה חשבונית $ax + b$ (a,b שלמים), ולכל שני מספרים טבעיים n,v ניתן למצא n איברים עוקבים בסדרה אשר לכל אחד מהם יש לפחות v גורמים ראשוניים שונים.

במאמר זה נכליל את משפט ירדן כדלקמן: -

<u>משפט 1</u>

יהיה $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ כל פולינום שהוא עם מקדמים a_i שלמים $(i=0,\ 1,\ \ldots\ m)$. לכל שני מספרים טבעיים n,v ניתן למצא n מספרים שלמים עוקבים $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$ כך שלכל אחד מהמספרים $f(b_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ יש לפחות v גורמים ראשונים שונים.

2. הוכחת המשפט

נוכיח את המשפט בדרך אינדוקציה לגבי v . עבור $v=1$ אין מה להוכיח, כי לכל מספר שלם (פרט ל-1) יש לפחות גורם ראשוני אחד. נניח שהמשפט נכון עבור v ונוכיח את נכונותו עבור $v+1$.

לפי הנחת האינדוקציה קיימים n מספרים שלמים עוקבים $b_1,$ $b_2, \ldots,\ b_n$ כך שלכל אחד מהמספרים $f(b_j)$ יש לפחות v גורמים ראשוניים שונים. ונגדיר $(j=1,2,\ldots,n)$ $C_j=f(b_j)$,

$$d_j = \prod_{i=1}^{n} c_i^2 + b_j$$

אזי גם המספרים d_j הם מספרים עוקבים. אבל

$$f(d_j) = \sum_{k=0}^{m} a_k d_j^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \{ \prod_{i=1}^{n} c_i^2 + b_j \}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \{ b_j^k + A_j \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \}$$

כש- A_j הוא איזה מספר שלם,

$$= c_j + B_j \prod_{i=1}^{n} c_i^2$$

כשגם גם B_j הוא איזה מספר שלם

$$= c_j \{ 1 + B_j c_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} c_i^2 \}$$

$$= c_j \; (1 + D_j c_j)$$

כשגם D_j מספר שלם. אבל ברור שלמספרים c_j, $D_j c_j + 1$ אין גורם משותף, ולכן יש ל- $f(d_j)$ לפחות גורם ראשוני אחד יותר ממה שיש ל- c_j , והמסקנה מידית.

3. הכללה נוספת

נקודת המוצא עבור המשפט הקודם היתה העובדה שלכל n ניתן למצא גוש של n מספרים עוקבים שהם פריקים. אבל למעשה נוכל להגיד הרבה יותר.

עבור מספרים טבעיים v,k כלשהם,תהיה נתונה מערכת כלשהי של מספרים ראשוניים שונים p_{ij} $(1 \leq j \leq v,\ 1 \leq i \leq k)$, אזי אפשר למצא k מספרים עוקבים $a_1\ ,\ a_2\ ,\ldots,\ a_k$ כך שעבור כל i $(1 \leq i \leq k)$ יתחלק a_i בכל אחד מ- v המספרים הראשוניים p_{ij} $(1 \leq j \leq v)$. עובדה מפתיעה זו נובעת ממשפט השאריות הסיני.

משפט השאריות הסיני

יהיו המספרים $m_1, m_2, \ldots, m_n$ זרים בזוגות, ז.א. ש-$(m_i,m_j)=1$ כש-$i \neq j$, ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים שלמים כלשהם, אזי קיים x כך ש- $x \equiv y_i \pmod{m_i}$ $(i=1,2, \ldots, n)$.

לא נוכיח כאן את המשפט הזה, אם כי ההוכחה פשוטה למדי. ניתן למצא אותה בספרים רבים על תורת המספרים.

אם נחזור עכשיו לבעיה שלנו נראה כי המספרים $\prod_{j=1}^{v} p_{ij}$ ו- $\prod_{j=1}^{v} p_{kj}$ זרים כש-$i \neq k$, דבר הנובע מיד מהעובדה שמדובר כאן במספרים ראשוניים שונים. אם נפעיל עכשיו את משפט השאריות הסיני, עם $m_i = \prod_{j=1}^{v} p_{ij}$ ו- $y_i = k-i$ $(i=1,2,\ldots,k)$, נקבל פתרון x; ונוכל לראות מיד כי המספרים $x-k,x-k+1,\ldots,x-1,x$ מהווים הגוש המבוקש.

הבה נראה האם ניתן להכליל את העובדות האלה לפולינום כללי.

ראשית ברור שאין להכליל את העובדות כלשונן, כיוון שישנם פולינומים אשר בכל הצבה שלהם נקבל תוצאה שהיא זרה למספרים ראשוניים מסויימים. למשל, עבור כל x טבעי, יהיה x^2+1 זר לכל מספר ראשוני מהצורה $4n+3$. אבל ניתן להוכיח את המשפט הבא:

<u>משפט 2</u>: יהיו נתונים מערכת של מספרים ראשוניים שונים p_{ij} $(1\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant v)$, ופולינום $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ עם מקדמים שלמים.
אם קיים עבור כל $i\neq k$ וכל $j \leqslant v$ מספר x_{ij} כך ש- $f(x_{ij})$ מתחלק ב- p_{ij} אזי קיימים מספרים עוקבים $z_1, z_2,\ldots, z_k$ כך ש- $f(z_i)$ מתחלק ב- $\prod_{j=1}^{v} p_{ij}$ עבור $i=1,2, \ldots, k$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נעיר כי אם $f(x_{ij})$ מתחלק ב-p_{ij} אזי, עבור כל y שלם, יתחלק $f(p_{ij}y + x_{ij})$ ב- p_{ij} (הוכחת עובדה זו דומה מאד להוכחת משפט 1, ואנו משאירים לקורא לבדק את הפרטים).

לפי משפט השאריות הסיני ניתן למצא, עבור כל i, מספר x_i המקיים

$$x_i \equiv x_{ij} \pmod{p_{ij}} (j=1,\ldots,v)$$

שוב לפי אותו משפט ניתן למצא x, כך ש-

$$x \equiv k-i+x_i \left(\mathrm{mod} \prod_{j=1}^{v} p_{ij}\right) \quad (i=1,\ldots,k)$$

וברור כי המספרים $z_i = x+i-k$ מקיימים את דרישות המשפט.

בניות בעזרת המחוגה בלבד

אבי-ברמן סיגלר (חיפה)

1. מבוא

בחוברת הקודמת (כרך 4, מס' 7) בדקנו את שאלת הבניות האפשריות בעזרת סרגל בלבד, ושם הוכחנו את משפט שטיינר:-

משפט שטיינר כל בניה שהיא אפשרית במחוגה וסרגל, אפשרית גם בסרגל בלבד, בתנאי שנתון לנו מעגל כלשהו ומרכזו.

מכאן מתעוררת השאלה האם ובאיזו תנאים ניתן לבצע בניות בעזרת מחוגה בלבד. על השאלה הזאת עונה משפטו של מסקרוני (MASCHERONI, 1750-1809).

משפט מסקרוני כל בניה גיאומטרית האפשרית בעזרת מחוגה וסרגל, אפשרית גם בעזרת המחוגה בלבד.

ברור שאי אפשר להעביר ישר בעזרת מחוגה בלבד. משמעות המשפט היא בזה שאנו רואים ישר כמוגדר ע"י כל שתי נקודות שעליו.

מסקרוני השתמש לשם הוכחת משפטו בתכונות טרנספורמצית האינברסיה, והוכיח שאפשר לבצע בעזרת מחוגה בלבד את ארבע הבניות היסודיות הבאות:-

(1) העברת מעגל כשהרדיוס והמרכז נתונים.
(2) מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.
(3) מציאת נקודות החיתוך של מעגל עם ישר.
(4) מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים.

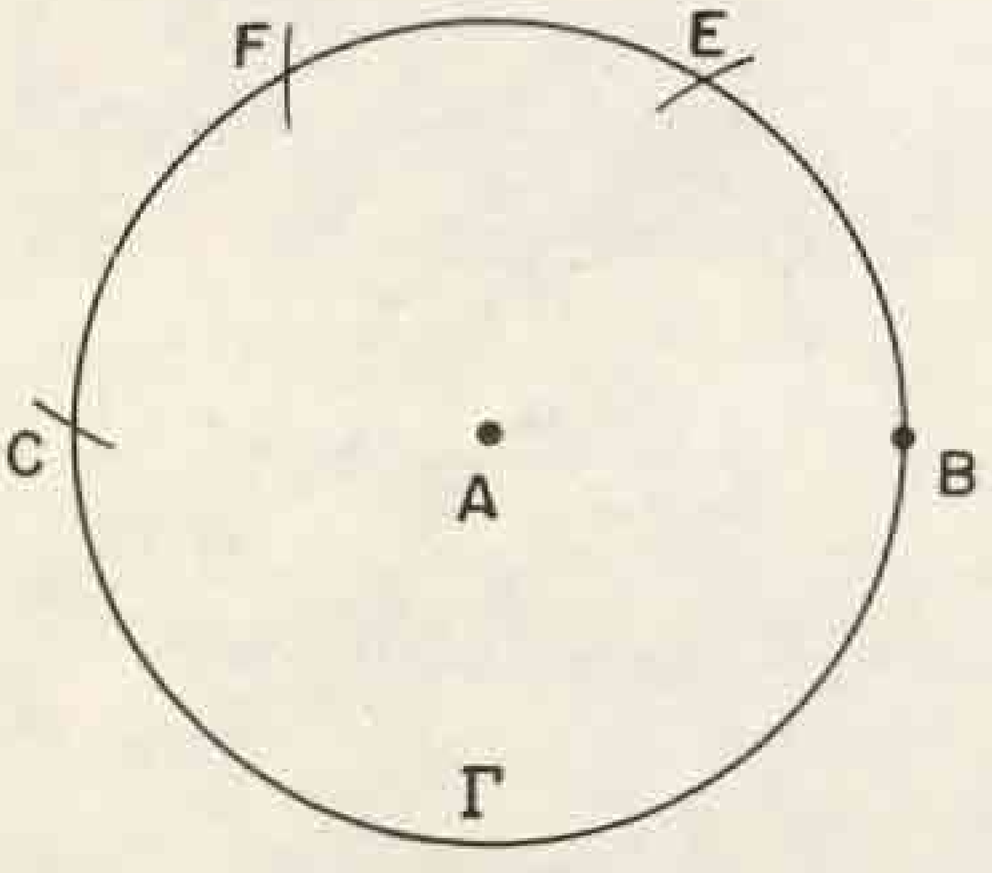
בשנת 1928 התגלה בארכיון של הפקולטה למתמטיקה בקופנהגן (דנמרק) ספר שהופיע בשנת 1672, מאת המתמטיקאי מור (MOHR), ובו מופיעות הבניות היסודיות המביאות למשפט מסקרוני. בהמשך מאמרנו נתבסס על גישתו של מור, הן משום שהיא אלמנטרית יותר מזו של מסקרוני, והן משום שמגיעה לו זכות ראשונים.

2. בניות עזר

בכל הבניות המובאות למטה הכוונה היא לבניה בעזרת מחוגה בלבד.

א. <u>הארכת קטע כאורכו</u>

נתונות שתי נקודות A,B, למצא נקודה C בהמשך הישר BA כך ש- $AC=AB$.

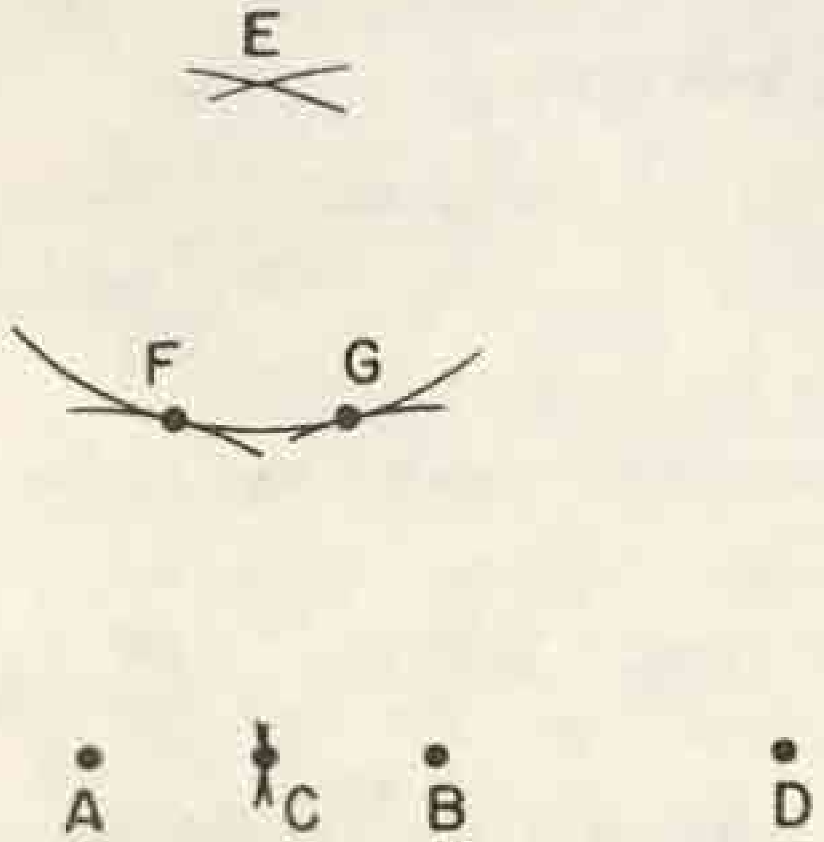


ציור 1

<u>בניה</u> מעבירים מעגל Γ עם מרכז A ורדיוס AB, ומעגל שני עם מרכז B ואותו רדיוס. יהיה E אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים. עכשיו מעבירים מעגל עם מרכז E ושוב אותו רדיוס, שיפגוש את המעגל Γ ב- F, ומעגל דומה, עם מרכז F שיפגוש את Γ ב- C (הוכח).

ב. <u>חלוקת קטע לשני חלקים שווים</u>

נתונות שתי נקודות A,B למצא נקודה C על הישר AB כך ש- $AC=CB$.

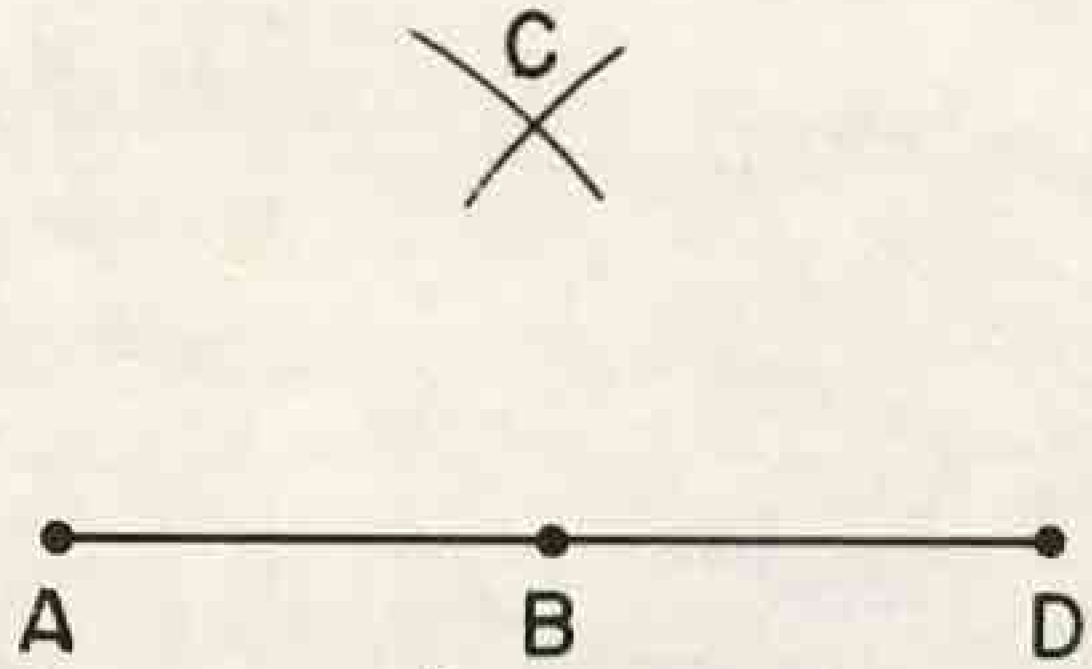


ציור 2

<u>בניה</u> בהסתמך על הבניה הקודמת נוכל למצא K על המשך BA כך ש- $KB = 2AB$. עכשיו נעביר מעגלים, עם מרכזים ב- A,B ושניהם ברדיוס BK, ז.א. $2AB$. יהיה E נקודת מפגש של שני המעגלים. עם מרכז E מעבירים מעגל Γ AB, ועם מרכזים A,B מעבירים שני מעגלים Γ_2, Γ_3, באותו רדיוס. Γ נוגע ב- Γ_2 ו- Γ_3 נגיד בנקודות F,G. קל לראות כי $FG = \frac{1}{2}AB$. עכשיו נעביר מעגלים עם מרכזים A,B שניהם ברדיוס FG, וברור שיגעו אחד בשני בנקודה C המבוקשת.

ג. <u>נתון קטע AB למצא את C כך ש- CB ניצב ל- AB</u>

בניה לפי בניה א ממשיכים את AB כארכו עד D. עכשיו נעביר שני מעגלים באותו רדיוס (גדול מ- AB) עם מרכזים ב- A,D בהתאמה. אלה ייפגשו ב- C .



ציור 3

ד. נתונים במישור שני קטעים בעלי אורכים p ו-q, $(p>q)$, למצא קטע בעל אורך $x = \sqrt{p^2 - q^2}$.

בניה: ניקח A,B כך ש- $AB=q$ ונמשיך את הקטע עד D כך ש- $BD = AB = q$. עם מרכזים A,D נעביר מעגלים, שניהם ברדיוס p. אם C נקודת מפגש שלהם אזי $CB = \sqrt{p^2-q^2}$.

ה. נתון קטע באורך a לבנות קטעים באורך של $a\sqrt{3}$ ו-$a\sqrt{2}$.

בניה: עבור p בבניה ד ניקח $2a$, ו- a עבור q, ומיד רואים שאפשר לבנות קטע באורך $a\sqrt{3}$. עכשיו ניקח $a\sqrt{3}$ עבור p, ועוד פעם a עבור q, ונקבל $a\sqrt{2}$.

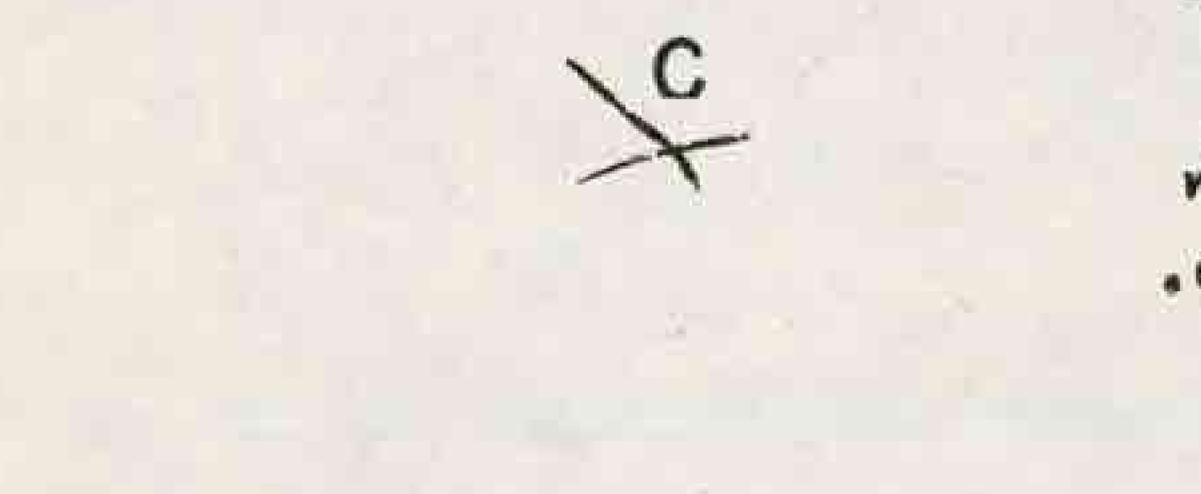
ו. נתונים קטעים p ו-q, לבנות קטע באורך $\sqrt{p^2 + q^2}$.

בניה: לפי בניה ד נוכל לבנות קטע באורך $\sqrt{p^2-q^2}$, ולפי בניה ה קטע באורך $p\sqrt{2}$. לכן, שוב לפי בניה ד, נוכל לבנות קטע x כך ש-

$$x^2 = (p\sqrt{2})^2 - (\sqrt{p^2-q^2})^2 = p^2 + q^2$$

ז. נתונים קטעים q,p לבנות קטעים באורכים $p+q$ ו- $p-q$.

בניה: בונים נקודות A,B כך ש- $AB=p$. מעבירים מעגל עם מרכז A ורדיוס $\sqrt{p^2 + q^2}$ ומעגל עם מרכז B ורדיוס q. אלה נפגשים ב- C. עכשיו מעבירים מעגל עם מרכז C ורדיוס $q\sqrt{2}$ ומעגל שני עם מרכז B ורדיוס q. אלה נפגשים ב- D ו- E; ו- AD ו- AE הם הקטעים המבוקשים (להוכיח).

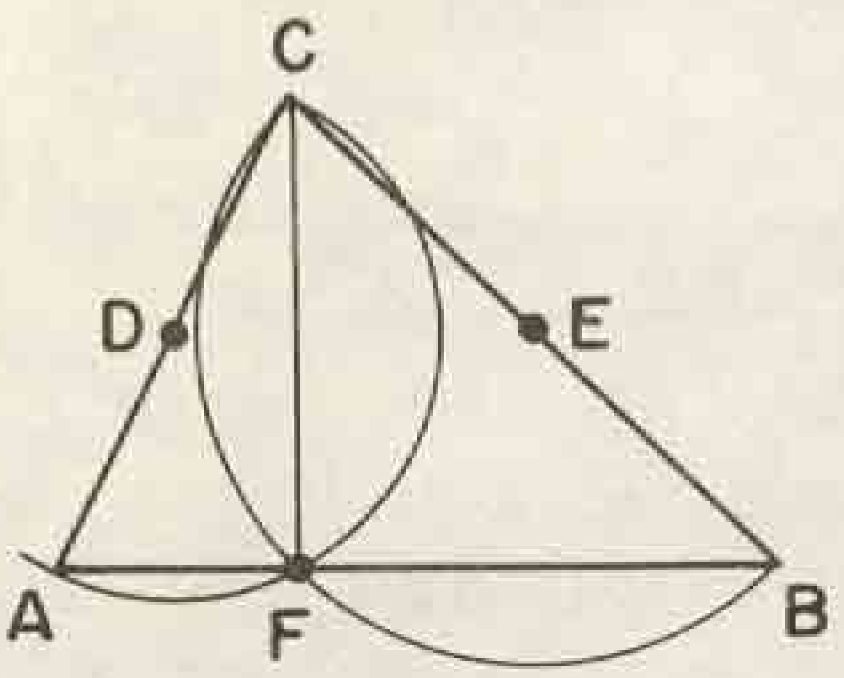


ציור 4

ח. נתונים שני קטעים באורכים a,b לבנות קטע באורך $x=\sqrt{ab}$

בניה: לפי בניה ז נוכל למצא קטעים באורכים $a+b$, $a-b$, ולכן, לפי בניה ד, קטע באורך $\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=2\sqrt{ab}$. מזה נוכל למצא, לפי בניה ב, קטע באורך $\sqrt{ab}$.

ט. נתון קטע AB ונקודה C מחוצה לו, למצא את עקב האנך המורד מ- C ל- AB.



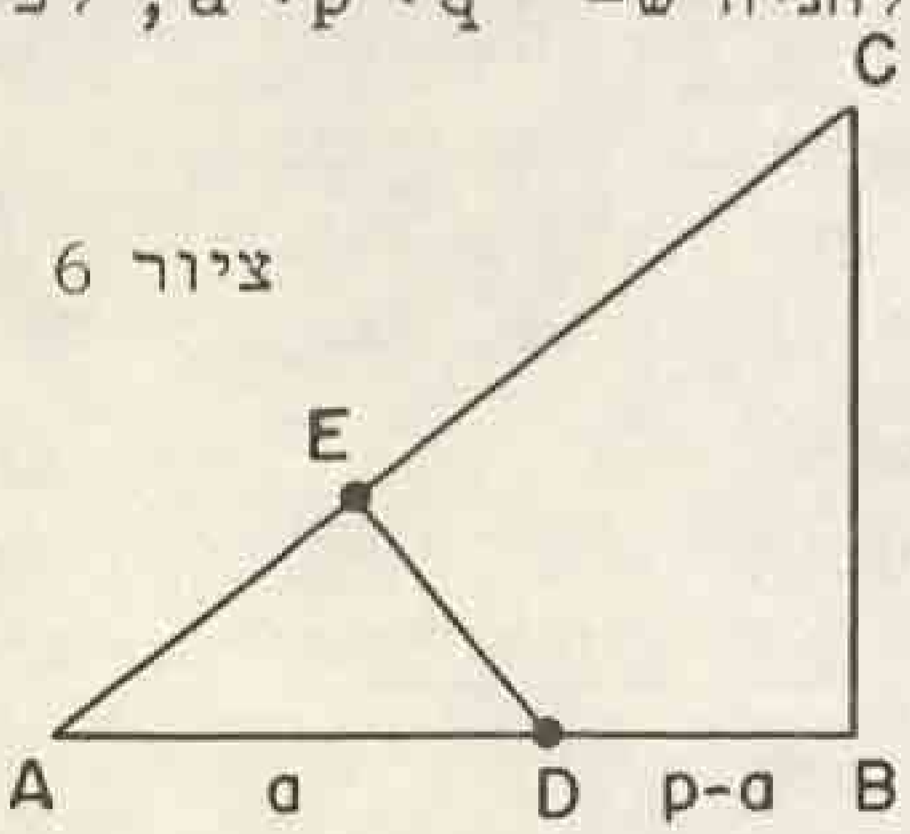
ציור 5

בניה: לפי בניה ב נמצא D,E שהם האמצעים של BC, AC בהתאמה. נעביר עכשיו שני מעגלים, האחד עם מרכז D ורדיוס $\frac{1}{2}AC$, והשני עם מרכז E ורדיוס $\frac{1}{2}BC$, שני המעגלים נפגשים ב- C ובנקודה נוספת, נגיד F. קל לראות כי $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$.

י. נתונים שלשה קטעים a, p ו- q, למצא קטע x כך ש- $\frac{x}{a}=\frac{p}{q}$.

בניה: ללא הגבלת כלליות נוכל להניח ש- $a<p<q$, לפי בניות קודמות נוכל למצא A,B,C כך ש- $AB=p$, $AC=q$, $BC=\sqrt{q^2-p^2}$, ואז ברור ש- $\sphericalangle ABC=90^\circ$. עכשיו נבנה D על AB (לפי ז) כך ש- $DB=p-a$, ואז $AD=a$. לפי בניה ט נמצא E על AC כך ש- $\sphericalangle DEA = 90^\circ$.

ציור 6

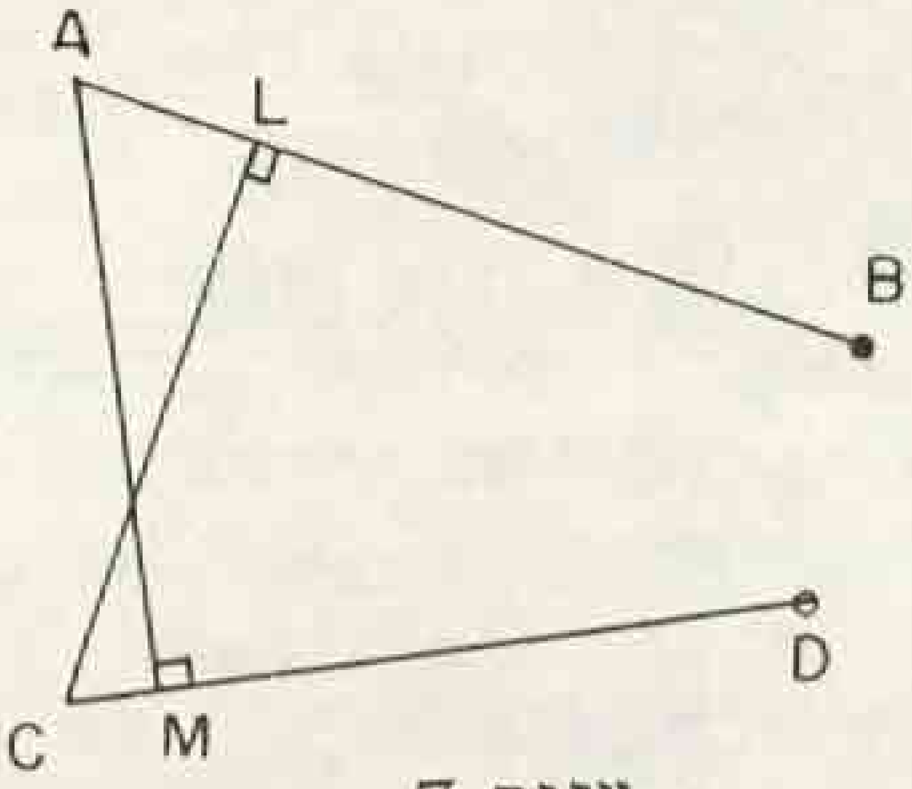


עכשיו ברור שהמשולשים AED, ABC דומים ולכן

$$\frac{AE}{a}=\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}=\frac{p}{q}.$$

3. הבניות היסודיות

הצגנו במבוא רשימה של ארבע בניות יסודיות. ברור שאת שתי הראשונות, העברת מעגל כשהרדיוס והמרכז נתונים, וקביעת נקודות החיתוך של שני מעגלים, אפשר לבצע בעזרת מחוגה בלבד.



ציור 7

כאן נתייחס לשתי הבניות היסודיות הנשארות, ונתחיל באחרונה.

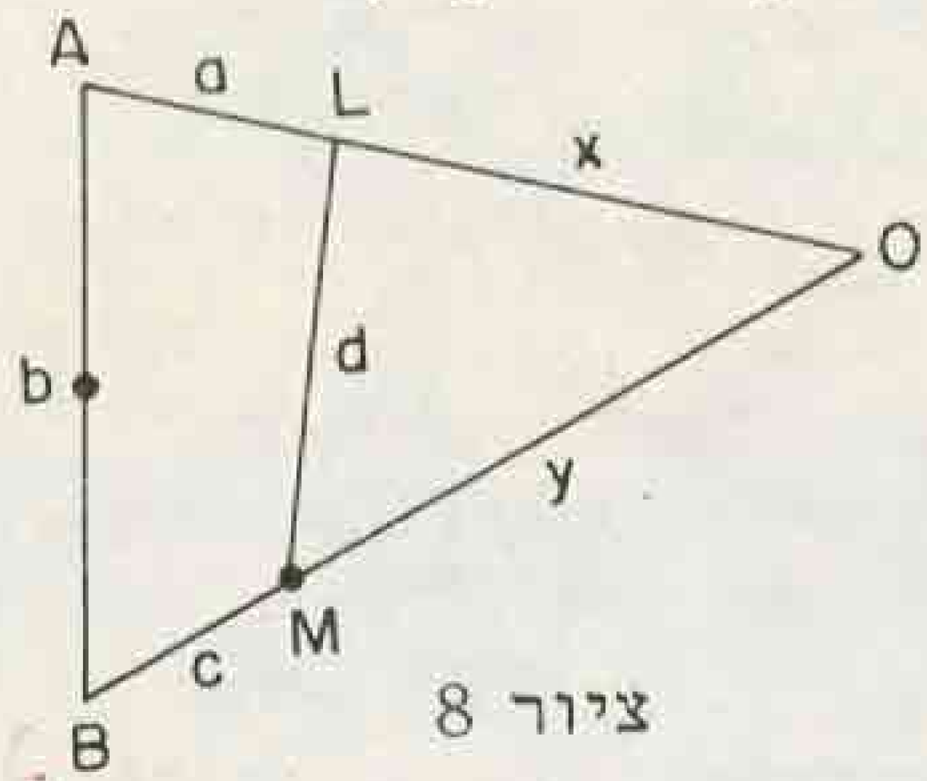
יהיו נתונים שני הישרים ℓ ו- m המוגדרים ע"י הנקודות A,B ו- C,D בהתאמה. לפי בניה ט נמצא M על m ו- L על ℓ כך ש-

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CLB = 90^\circ$$

נראה את ℓ, m כמוגדרים ע"י הזוגות A,L ו- C,M בהתאמה, ויהיה O נקודת המפגש המבוקשת של ℓ, m. נסמן $LM=d$, $AL=a$, $AC=b$, $CM=c$, $LO=x$, $MO=y$.

מאחר שהמרובע $ALMB$ חסום במעגל אם קוטר AB (הוכח) יוצא כי:

$$(1)\quad \frac{x}{c+y} = \frac{y}{x+a} = \frac{d}{b}$$



ציור 8

מ- (1) נובע כי

$$\frac{x+y}{a+c+x+y} = \frac{d}{b}$$

ומכאן ש- $\frac{x+y}{a+c} = \frac{d}{b-d}$ ולכן, לפי בניה י, נוכל לבנות קטע באורך $x+y$.

אבל מ-(1) נובע גם כי

$$\frac{y-x}{a-c-(y-x)} = \frac{d}{b}$$

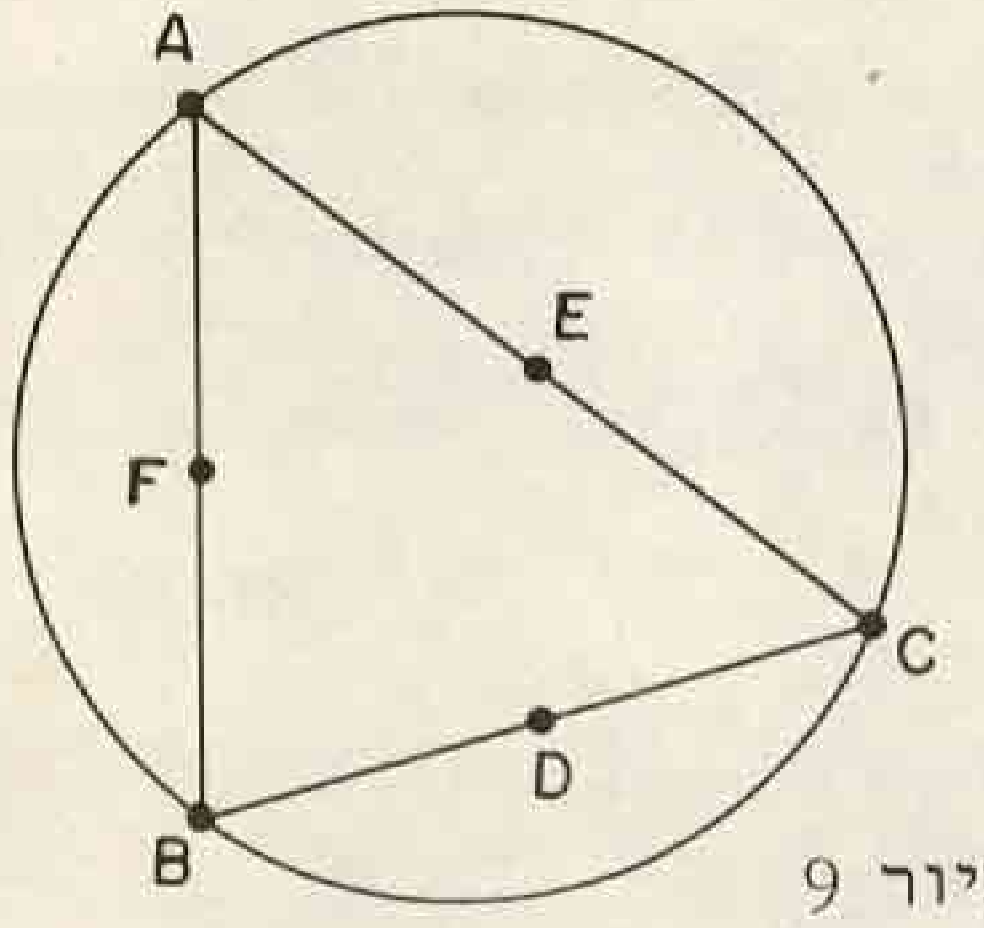
ולכן

$$\frac{y-x}{a-c} = \frac{d}{b+d}$$

ומכאן שאפשר לבנות את הקטע $y-x$. משני אלה נוכל לבנות את הקטעים $(y-x) \pm y+x$ (לפי בניה ז), דהינו $2y$ ו- $2x$, ולכן, לפי בניה ב, גם את y ו- x. עכשיו נעביר שני מעגלים, האחד עם מרכז L ורדיוס x, והשני עם מרכז M ורדיוס y, ואלה ייפגשו ב- O.

נשאר איפוא להוכיח את האפשרות של הבניה היסודית (3), ז.א. למצא את נקודות החיתוך של ישר ומעגל. לזה דרוש לנו משפט עזר קל.

<u>משפט עזר:</u> אפשר, בעזרת מחוגה בלבד, למצא את מרכזו של כל מעגל נתון.

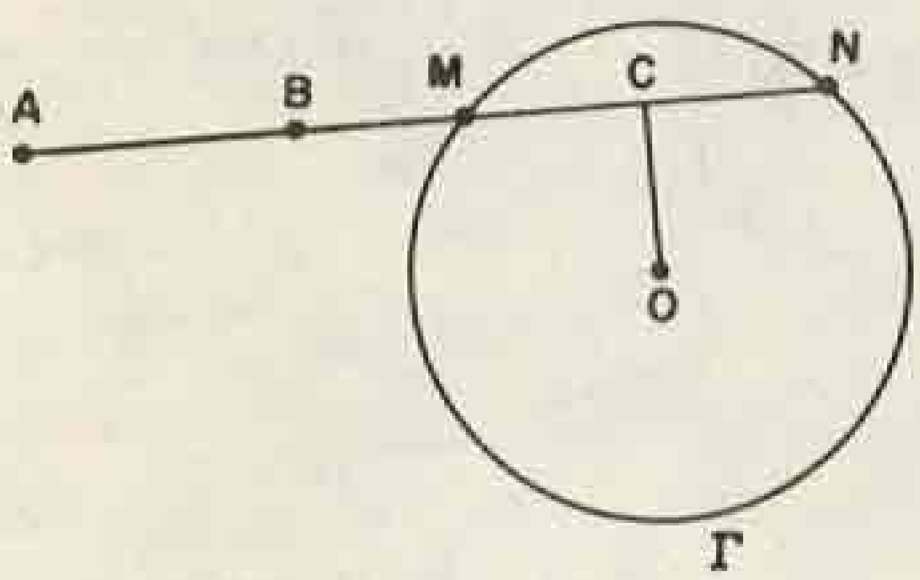


ציור 9

<u>הוכחה:</u> ניקח שלש נקודות A,B,C כלשהן על המעגל. באמצעות בניה ב נמצא את F,E,D שהם האמצעים של AB,CA,BC בהתאמה. לפי בניה 3 נמצא נקודות G,H כך ש-EG ניצב ל-AC ו- FH ל- AB, לפי מה שראינו כבר נוכל,למצא את נקודת החיתוך של EGו- FH, וזו תהיה מרכז המעגל.

<u>הערה:</u> לאור משפט העזר נוכל לראות כל מעגל כבעל מרכז נתון.

עכשיו יהיו נתונים מעגל Γ, בעל מרכז O ורדיוס r, ושתי נקודות A,B. אנו מחפשים את M,N נקודות החיתוך של AB עם Γ. לפי בניה 9 נוכל למצא C על AB כך ש- OC ניצב ל- AB. לפי בניה 4 אפשר למצא את אורך הקטע $CN = \sqrt{r^2 - OC^2}$. עכשיו נעביר מעגל עם מרכז C ורדיוס CN, וזה יפגוש את Γ ב- M,N.



ציור 10

4. סיכום

הוכחנו כי ניתן לבצע את ארבע הבניות היסודיות בעזרת מחוגה בלבד, ומכאן נובע מיד כי כל בניה שהיא אפשרית בעזרת סרגל ומחוגה, אפשרית גם בעזרת מחוגה בלבד.

הסתמכנו בעיקר, כפי שצויין, על ההוכחה של מור. הקורא הסקרן המעוניין בהוכחה של מסקרוני יוכל למצא אותו (באנגלית) בספר
WHAT IS MATHEMATICS? R. COURANT H. ROBBINS
(עמודים 158-168).

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:-

1) לכתב בצורה ברורה (או להדפיס).

2) להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.

3) למלא את הטופס המצורף לחוברת זו, ולהחזירו למערכת, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ-31.8.72.

4) לסמן את המעטפה "פתרונות" ולא להכניס בה כל חומר אחר.

481 (3) לפתר את המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ x^3+y^3+z^3 = x^2+y^2+z^2+2 \\ xyz = -2 \end{cases}$$

482 (3) נתונה הסדרה

$$119,\ 142,\ 167,\ 230,\ 315,\ \ldots$$

למצא את האיבר השישי. (הוצא ע"י סרג'יו הכט)

483 (3) הוכח שאין למצא מספרים טבעיים x,y,z,n כך ש- $n < z$ ו- $x^n + y^n = z^n$ (מקרה מיוחד מאד של משפט פרמה).

484 (3) נתון אוקטואדר משוכלל עם צלע a, ונקודה P כלשהי בפנים האוקטואדר. הוכח כי סכום המרחקים מ- P לשמונה פיאות האוקטואדר קבוע ובלתי תלוי ב- P. לחשב את הסכום.

485 (4) הוכח כי

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ \ldots \ (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ \ldots\ldots \ (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

486 (3) עבור אלו ערכים ממשיים של m יהוו כל פתרונות המשוואה

$$(m^2-3)\sin^4x-2(m^2+m+1)\sin^2x+(m^2+m+2) = 0$$

סדרה חשבונית אחת ? (הוצע ע"י רפאל ארון).

(4) 487 הוכח כי, עבור α_1, α_2, α_3, α_4 כלשהם,

$$2 + \cos(\alpha_1-\alpha_2) + \cos(\alpha_1-\alpha_3) + \cos(\alpha_1-\alpha_4) + \cos(\alpha_2-\alpha_3) + \cos(\alpha_2-\alpha_4) + \cos(\alpha_3-\alpha_4) \geqslant 0$$

(3) 488 נתון כי הפונקציה

$$f(x) = a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+a_4\cos 4x$$

איננה אף פעם שלילית, הוכח כי $a_1=a_2=a_3=a_4=0$

(4) 489 הוכח כי אין למצא מספרים חיוביים n,m המקיימים

$$3m^2 - 5n^2 = 25$$

(3) 490 נתונים מספרים חיוביים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ו- $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
הוכח כי

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant 1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\ldots+\frac{s^n}{n!},$$

והשויון יתקיים אך ורק כש- $n=1$.

(4) 491 S הוא שטח של משולש אשר צלעותיו הן a,b,c. הוכח כי

$$S \leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$$

(4) 492 אם מגדירים $F_n = (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$, הוכח כי F_{15} מתחלק ב- F_3.

(5) 493 גוף קמור מסויים הוא כך שכל חתך מישורי שלו הוא מעגל. הוכח כי הגוף הוא כדור.

494 (6) קוים ישרים, במספר סופי, משורטטים על דף ניר ומחלקים אותו למספר סופי של אזורים. הוכח כי ניתן לצבע את ה"מפה" הזאת, בהשתמש בשני צבעים בלבד, כך ששני אזורים בעלי קו גבול משותף יקבלו צבעים שונים.

495 (7) קטע ישר מכוסה כליל ע"י מקלות המונחים עליו. מקלות אלה יכולים להיות בעלי אורכים שונים וגם לחפף אחד את השני בכל דרך שהיא. הוכח שאפשר לסלק חלק מהמקלות כך שתישאר קבוצה חלקית מהם, שאינם נוגעים אחד בשני, ושמכסים לפחות מחצית הקטע.

שתיית בירה בגבול מכסיקו

מספרים על עיר מסוימת השוכנת על הגבול בין ארה"ב ומקסיקו. בצד המכסיקני של הגבול נותנים בעד דולר אמריקאי רק תשעים סנט מכסיקניים, בעוד שבצד האמריקאי נותנים בעד דולר מכסיקני רק תשעים סנט אמריקאים.

איש אחד נכנס למסבאה בצד האמריקאי, שתה בירה בעשרה סנט מקומיים, שלם דולר אמריקאי אחד וקבל כעודף דולר מכסיקני אחד. אם הדולר הזה הוא חצה את הגבול ושתה בירה בעשרה סנט מכסיקניים, שלם עם הדולר המכסיקני שהביא אתו מעבר לגבול, וקבל דולר אמריקאי בתור עודף. שוב חזר לארה"ב עם הדולר האמריקאי ושם התחיל את כל הפעולה מחדש.

כך בילה את כל היום בשתיה משני עברי הגבול בסירוגין, כשסכום הכסף בכיסו נשמר.
מתעוררת השאלה: מי באמת שלם בעד כל הבירה ששתה האיש?

פתרון בעיות 451-465

.451 נניח שישנם N אנשים בעולם. מספר הידידים של כל אחד הוא מספר שלם בין 0 ל-(N-1), דהינו N אפשרויות. אבל למעשה אין יותר מ- (N-1) אפשרויות. כי אם יש למישהו (N-1) ידידים, הרי הוא ידיד עם כל האחרים ולכן אין אף אחד עם 0 חברים. אבל כשיש N-1 אפשרויות עבור N בני אדם, לא יוכלו להיות כלם שונים זה מזה.

.452 יהיה $t_1=a$, $t_2=b$. אזי $t_3=\frac{b}{a}$, $t_4=\frac{1}{a}$, $t_5=\frac{1}{b}$, $t_6=\frac{a}{b}$, $t_7=a$, $t_8=b$, ... מכאן ש- $t_k=t_{6n+k}$ עבור כל n טבעי ו- $1 \leqslant k \leqslant 6$.

מאידך
$$P_6 = a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

ולכן
$$P_{40} = P_{36} \times P_4 = P_4 = ab \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} = b^2/a$$

ו-
$$P_{80} = P_{78} \times P_2 = P_2 = ab$$

יוצא כי $ab = b^2/a = 8$ ולכן $a=2$, $b=4$.

.453
$$S_{DBC} + S_{DCA} + S_{DAB} = S_{ABC}$$

ולכן
$$ad_a + bd_b + cd_c = ah_a = bh_b = ch_c$$

לפי משפט הממוצעים
$$ad_a \cdot bd_b \cdot cd_c \leqslant \frac{1}{27}\,(ad_a + bd_c + cd_c)^3$$
$$= \frac{1}{27}\, ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c$$
והמסקנה מידית.

.454 יהיו A,B,C קדקדי המשולש, I מרכז המעגל החסום בו, I_1 מרכז מעגל המגע החיצוני מול BC, ו- O מרכז המעגל החוסם. יהיה M האמצע של II_1. קל להוכיח כי M נמצא על המעגל החוסם (להוכיח). ולכן נוכל לבנות מעגל זה. מאחר ש- $IBI_1 = ICI_1 = 90°$ (להוכיח), יהיו B,C על המעגל אשר

קוטרו I_1I. זה קובע את B,C ואילו A הוא נקודת מפגש של I_1I עם המעגל החוסם (שני פתרונות).

455. יהיה ℓ הישר המשותף למישורים (Pa), (Pb) ; ברור ש- P נמצא על ℓ. אבל a מקביל ל- (Pb) ולכן לא יכול לפגש את ℓ שהוא נמצא ב- (Pb), ואילו a ו- ℓ נמצאים שניהם במישור (Pa). יוצא כי $\ell||a$ וכמו כן $\ell||b$.

456. ניקח שעורים תלת-ממדיים ונניח ש- A נמצא על הציר $x=0$ ו- B על הישר $y=n,z=0$. יהיו $(0,0,\zeta)$ השעורים של A ו- $(\zeta,n,0)$ אלה של B. אם M האמצע של AB יהיו השעורים שלו $x=\frac{1}{2}\zeta$, $y=\frac{1}{2}n$, $z=\frac{1}{2}\zeta$. אבל, לפי ההנחה, $\zeta^2+n^2+\zeta^2=m^2$

ולכן $y=\frac{1}{2}n$, $x^2+y^2=\frac{1}{4}(m^2-n^2)$,

457. $A_k=\frac{1}{k}\Sigma(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})$ כשהסכום מכסה כל קבוצה של k מבין N האיברים הנתונים. כמה פעמים מופיע איזה a_i ספציפי, נגיד a_1, בסכום הזה? מספר ההופעות יהיה שווה למספר הקבוצות של $(k-1)$ שאפשר לבחור מבין $(N-1)$ האיברים הנותרים, ז.א. C_{N-1}^{k-1}

יוצא כי

$$A_k=\frac{1}{k}\cdot C_{N-1}^{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i$$

נגדיר $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$,

$$A_k=\frac{S}{k}C_{N-1}^{k-1}=\frac{S}{k}\quad\frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}=\frac{S}{N}\binom{N}{k}$$

יוצא כי

$$\sum_{k=1}^{N}A_k=\frac{S}{N}\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}=\frac{2^N-1}{N}S$$

458. נציב $x=y$ ואז נובע כי $2f(1)=2$, ז.א. ו- $f(1)=1$. מהמשואה המקורית נובע כי $\frac{f(x)}{f(y)}$ תלוי רק ב- $\frac{x}{y}$, נגיד

$$\frac{f(x)}{f(y)}=u\left(\frac{x}{y}\right)$$

נציב $y=1$, ורואים כי $f(x) = u(x)$, ז.א. $\frac{f(x)}{f(y)} = f(\frac{x}{y})$.
נכתב $y=\alpha$, $\frac{x}{y}=\beta$ ונקבל

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$$

מוכיחים ע"י אינדוקציה, כי

$$f(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = f(\alpha_1)f(\alpha_2)\ldots f(\alpha_n)$$

עבור כל n טבעי וכל $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ממשיים. נציב $\alpha_1=\alpha_2 \ldots =\alpha_n=2$ ונקבל כי

$$f(2^n) = [f(2)]^n = a^n$$

כשהגדרנו $a=f(2)$. יהיו m,n טבעיים ונכתוב

$$\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_n = 2^{n/m}$$

מקבלים

$$a^n = f(2^n) = f[(2^{n/m})^m]$$

$$= [f(2^{n/m})]^m$$

ולכן

$$f(2^{n/m}) = a^{n/m}$$

הוכחנו איפוא כי $f(2^r)=a^r$ עבור כל r רצונלי חיובי. אם r רציונלי שלילי, נכתב $r=-s$ ואז

$$1 = f(1) = f(2^r \cdot 2^s)$$

$$= f(2^r) \cdot f(2^s)$$

$$= f(2^r) \cdot a^s$$

ז.א. $f(2^r)=a^{-s}=a^r$. יוצא כי $f(2^r)= a^r$ עבור כל r רציונלי, ולכן גם עבור כל r ממשי (בגלל רציפות).יוצא כי, עבור כל $x>0$, קיים

$$f(x) = f(2^{\log_2 x}) = a^{\log_2 x}$$

$$= x^{\log_2 a}$$

אבל a הוא מספר חיובי כלשהו ולכן הפתרון הכללי הוא
$f(x) = x^{\beta}$ עבור β כלשהו.

.459 נגדיר $f(x)= x^4+kx^3-6x^2-kx+1$. אזי קל להיווכח כי

$$f(-\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha^4} f(\alpha)$$

$$f(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) = -\frac{4}{(1-\alpha)^4} f(\alpha)$$

$$f(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}) = -\frac{4}{(1+\alpha)^4} f(\alpha)$$

יוצא כי כאשר $f(\alpha)=0$ גם $f(-\frac{1}{\alpha}) = f(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) = f(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}) = 0$.
(אנו מתנצלים על שגיאת דפוס בניסוח הבעיה).

.460 (i)

$$3(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2=2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab})$$

$$=(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2+(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2 \geq 0$$

(ii) יהיה $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ואז $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$
נכתב $\alpha=p-a$, $\beta=p-b$, $\gamma=p-c$. אזי $\alpha+\beta+\gamma=p$,
$a=\beta+\gamma$, $b=\gamma+\alpha$, $c=\alpha+\beta$.

יוצא כי

$$\frac{3}{4r^2}-3(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})= \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} -3(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

$$= 3 \{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{(\beta+\gamma)^2} - \frac{1}{(\gamma+\alpha)^2} - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\}$$

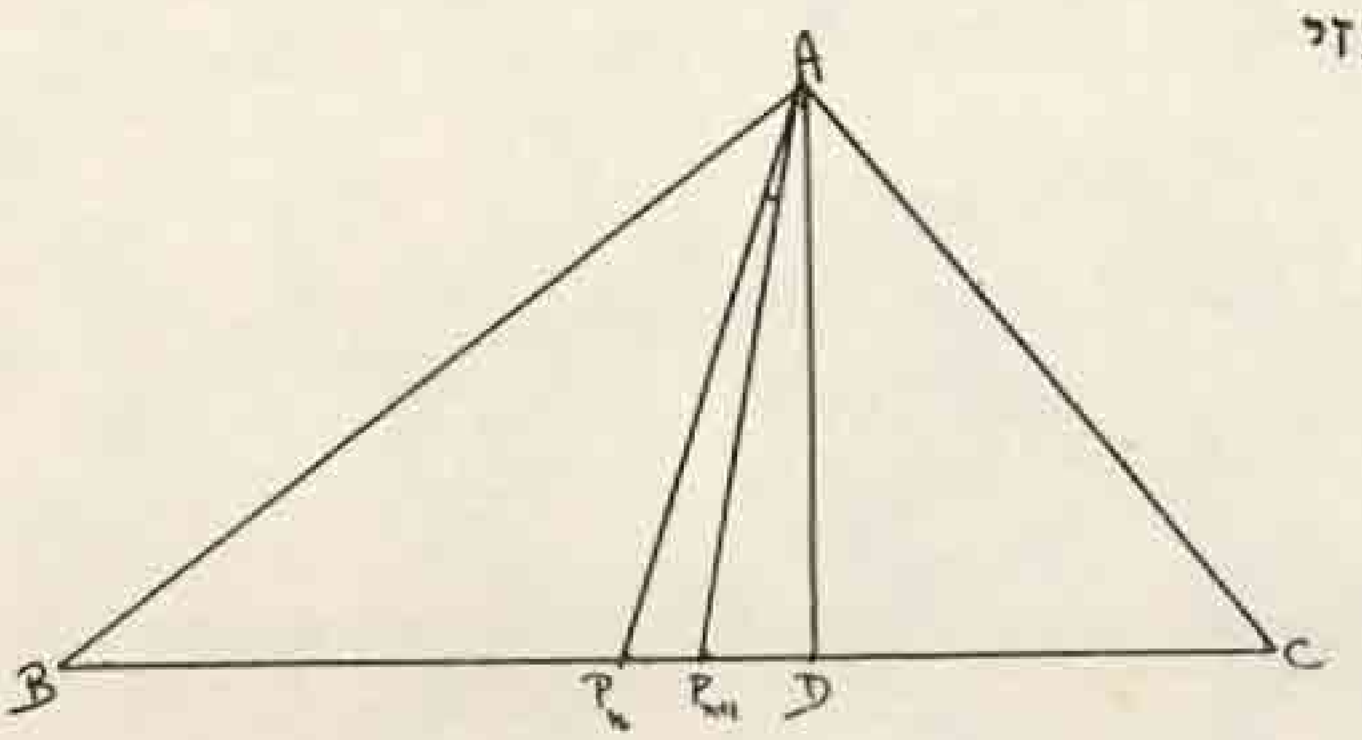
אבל $(\beta+\gamma)^2 \geq 4\beta\gamma$ ולכן

$$\frac{1}{4\beta\gamma} \geq \frac{1}{(\beta+\gamma)^2}$$

וכמו כן $\frac{1}{(\gamma+\alpha)^2} \geqslant \frac{1}{4\gamma\alpha}$, $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} \geqslant \frac{1}{4\alpha\beta}$,

והמסקנה מידית.

.461 יהיה AD ניצב ל- BC. אזי



$$tg\ (\sphericalangle AP_nD) = \frac{AD}{P_nD}$$

$$= \frac{c \sin B}{c \cos B - \frac{na}{2n+1}}$$

$$= \frac{(2n+1)c \sin B}{(2n+1)c \cos B - na}$$

וכמו כן

$$tg(\sphericalangle AP_{n+1}D) = \frac{(2n+1)c \sin B}{(2n+1)c \cos B - (n+1)a}$$

ולכן $tg(\sphericalangle P_nAP_{n+1}) = tg(\sphericalangle AP_{n+1}D - \sphericalangle AP_nD)$

$$= \frac{\frac{(2n+1)c \sin B}{(2b+1)c \cos B -(2+1)a} - \frac{(2n+1)c \sin B}{(2n+1)c \cos B - na}}{1 + \frac{(2n+1)^2 c^2 \sin^2 B}{[(2n+1)c \cos B-na][2n+1)c \cos B-(n+1)a]}}$$

$$= \frac{(2n+1)a\ c \sin B}{(2n+1)^2[c^2-ac \cos B] + n(n+1)a^2}$$

$$= \frac{(2n+1)\ c \sin B}{n(n+1)\ a}$$

מאחר ש- $\cos B = \frac{c}{a}$.

.462 (i) $\cos A+\cos B+\cos C = 1 = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 1+4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\cdot\frac{(p-c)(p-a)}{ca}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$= 1 + 4\,\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = 1 + 4\,\frac{S^2}{pabc}$$

אבל

$$S = rp = \frac{abc}{4R}$$

ולכן

$$\frac{4S^2}{abcp} = \frac{r}{R}$$

(ii) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{2}\{(b^2+c^2-2bc\cos A)+(c^2+a^2-2ca\cos B)+(a^2+b^2-2ab\cos C)\}$

$$= (a^2+b^2+c^2) - (bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$$

ולכן

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C$$

ומכאן

$$2+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-\frac{r}{R} = 2+(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C) - (\cos A+\cos B+\cos C)+1$$

יספיק איפוא אם נוכיח ש- $(ab)^{\cos C} - ab\cos C < 1 - \cos C$
ואי-שוויונים דומים עבור שתי הזוויות האחרות. אבל, עבור $x>0$,
$0<\lambda<1$, קיים תמיד $x^\lambda - \lambda x < 1-\lambda$,
והמסקנה נובעת בתנאי שהזוויות חדות,ואז $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$
כלב חיוביים.

463. נניח כי x,y,z,w כלם חיוביים ושונים זה מזה. יש לנו

$$x^3 - z^3 = w^3 - y^3 \neq 0$$

ו- $x - z = w - y \neq 0 \qquad (1)$

מקבלים ע"י חילוק ש- $x^2+zx+z^2 = w^2+wy+y^2$

אבל $(x-z)^2 = (w-y)^2$

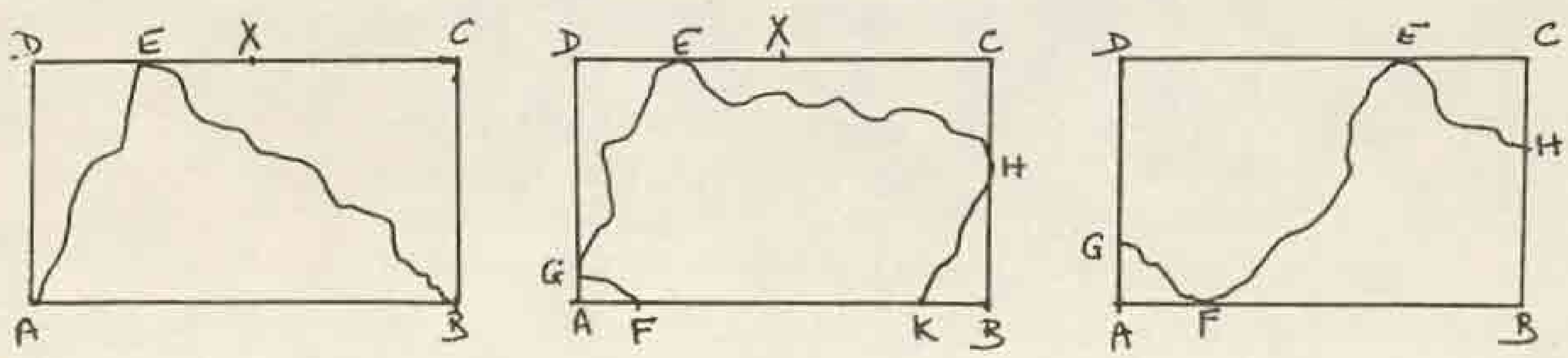
ולכן, ע"י חיסור $3zx = 3wy$

ומכאן ש- $(z+x)^2 = x^2+zx+z^2+zx = (w+y)^2$

ומאחר שהכל חיובי, $z + x = w + y \qquad (2)$

מחיבור של (1) עם (2) נובע ש- $x=w$, בניגוד להנחה.

464. משיקולים פשוטים נובע שאפשר תמיד לכסות את העקומה באחת הצורות מהטיפוסים הבאים:-



יהיה X האמצע של CD.

(1) מחוק סנל לגבי החזרות נובע כי

עקומה AEB $> AX + XB = \sqrt{a^2+4b^2}$

ולכן $a^2+4b^2 < 1$. מכאן ש- $4a^2b^2 < a^2(1-a^2) < \frac{1}{4}$

ז.א. $ab < \frac{1}{4}$

(2) עקומה FGEHK < AGEHB , וזה מחזיר אותנו למקרה (1).

אנו משאירים לקורא לבדק מקרים מהסוג (3)

465. ברור ש- $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{i+j}$ שווה לאיבר הקבוע במכפלת הפיתוחים של

$$(1+x)^n \times (1+x)^n \times (1+\frac{1}{x})^n$$

ז.א. למקדם של x^n בפתוח של $(1+x)^{3n}$, ולכן $\binom{3n}{n}$.

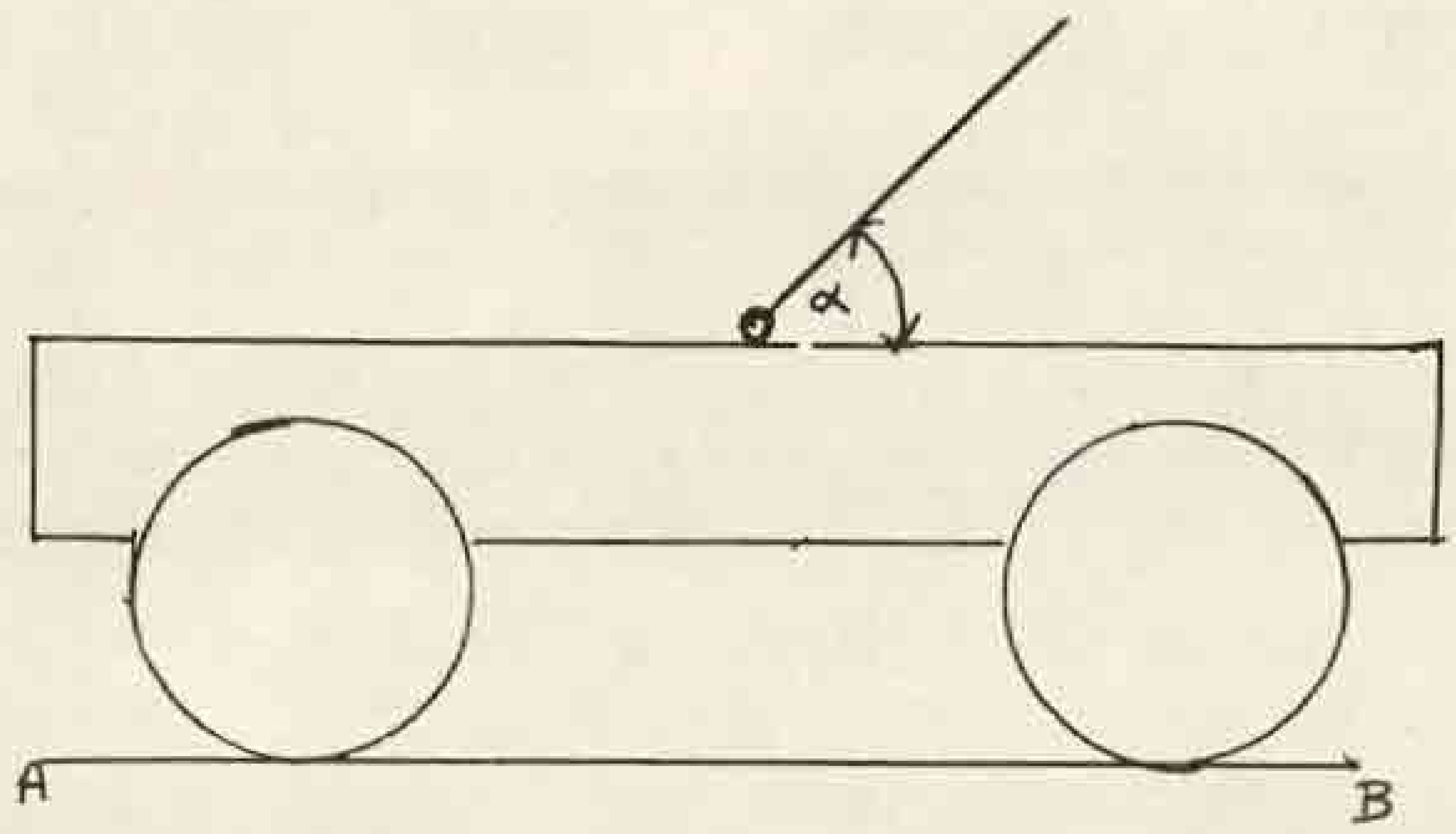
המנוף של מוחמד

נניח כי רכבת נוסעת בזמן סופי מתחנה A לתחנה B לאורך קטע ישר של מסילת ברזל. הנסיעה היא לאו דוקא במהירות קבועה, ואמנם אנו מרשים לרכבת לפעל בכל דרך שתרצה, להאיץ, להאיט, או אפילו לנסע לפעמים אחורה, עד שתגיע ל- B . אבל אנו מניחים כי התנועה המדויקת של הרכבת ידועה מראש, זאת אומרת שאנו יכולים לקבע מראש פונקציה $s=f(t)$ כש- t הוא הזמן ו- s הוא מרחק הרכבת מ- A . נתון גם מוט שהוא מחובר לרצפת אחד הקרונות בציר חלק, ושיכול לנוע סביב הציר הזה בלי חיכוך, קדימה או אחורה, בהשפעת תנועת הרכבת, עד שהוא מגיע לרצפה. (אנו מניחים שאם המוט מגיע פעם לרצפה הוא יישאר שם עד סוף הנסיעה). אנו מעונינים לדעת מה יהיה גורל המוט, האם יפול לרצפה בכיוון קדמי במשך הנסיעה, בכיוון אחורה, או האם בכלל לא יגיע לרצפה. ברור שהדבר יהיה-תלוי בתכנית הנסיעה, $s=f(t)$ ובמצב ההתחלתי של המוט. נוכיח את הטענה המפתיעה הבאה:-

ט ע נ ה

עבור כל תכנית נסיעה $f(t)$ קיים מצב התחלתי של המוט, כך שהמוט לא יפול לרצפה בכלל במשך הנסיעה.

הוכחת הטענה איננה תלויה בידיעות מפורטות בחוקי הדינמיקה, כי אם בהנחה פיסיקלית פשוטה מאד, והיא שהתנהגותו של המוט תלויה באופן רציף במצבו ההתחלתי.



מצב המוט בכל רגע מוגדר ע"י הזוית α בינו לבין הרצפה, כשהזויות $\alpha = 0^{\circ}$ ו- $\alpha = 180^{\circ}$ מתאימות להימצאות המוט על הרצפה באחד מבין שני הכיוונים. יהיה x הערך ההתחלתי ו- $g(x)$ הזוית של הכיוון הסופי של המוט. לפי ההנחה היסודית תהיה $g(x)$ פונקציה רציפה של x. מאידך ברור כי $g(0) = 0$ ו- $g(180) = 180$, מאחר שהנחנו שאם המוט נמצא פעם על הרצפה הוא יישאר שם עד סוף הנסיעה.

לאור הרציפות של הפונקציה $g(x)$ אנו מסיקים מיד שקיים x $(0 < x > 180)$ כך ש- $g(x)=90$, ז.א. שקיים מצב התחלתי שיבטיח כי המוט יימצא בסוף הנסיעה במצב מאונך.

ההוכחה דלעיל היא תיאורטית בהחלט ואינה נותנת כל רמז איך לקבע את המצב ההתחלתי המבוקש. זה ועוד, אפילו אם נדע לחשב את ה-x הזה לא יעזור לנו הדבר בהרבה, בגלל שיקולים של יציבות. קרוב לודאי כי מצב כזה לא יהיה יציב. לדוגמא ניקח את המקרה שהרכבת נשארת תקועה ללא תנועה כל הזמן. אזי ברור ש- $g(90) = 90$, ז.א. שאם נעמיד את המוט במצב מאונך הוא יימצא בשווי משקל ויוכל להישאר שם. אבל למרות זה אנו יודעים כי למעשה לא יישאר שום מאחר ששווי המשקל אינו יציב.

(תורגם מהספר What is Mathematics, by Couvant and Robbins)

אמרי שפר

אין מנוס מההרגשה כאילו נוסחאות מתמטיות נהנות מקיום והבנה שלהן, שהן יותר חכמות ממנו, ואפילו יותר חכמות ממציאיהן; בקיצור שניתן להפיק מהן יותר ממה שהוכנס בהן מראש. (ה. הרץ).

מצאנו עקבה מוזרה בחוף בלתי ידוע. המצאנו תיאוריות עמוקות, אחת אחרי השניה, כדי להסביר את מקור העקבה. אחרי מאמצים רבים הצלחנו לתאר את דמות החיה שהשאירה אותה עקבה, והנה, לתמהוננו, הדמות היא דמותנו אנו. (א.ס. אדינגטון).

מתוך למוד של הנדסה אויקלידית בבית הספר למדתי לשנא את ההנדסה... אבל למרות שנאה זו, כשאני מתעמק מספיק בחקירת כל בעיה מתמטית שהיא אני מוצא תשתית גיאומטרית (י.י. סילבסטר).

מתמטיקה היא מלכת המדעים ואריתמטיקה מלכת המתמטיקה. לעתים קרובות נאותה האריתמטיקה לעזר לאסטרונומיה ולמדעי טבע אחרים, אבל אין לפקפק בזכותה למקום ראשון בדרגה. (גאוס).

המתמטיקאים הגדולים ביותר, כמו ארכימדס, ניוטון, וגאוס, ידעו תמיד לחבר תיאוריה ויישומה במידות שוות. (פ. קליין).

אם כן יש לקבע חוק, בעיר האידיאלית, שעל כל תושבי העיר ללמד גיאומטריה, כי מדע זה מביא גם יתרונות עקיפים חשובים. נוסף על החשיבות הצבאית של ההנדסה יש גם היתרון, הידוע לכל בעל נסיון, שעל ידי למוד הנדסה מגיע בן אדם לתפיסה הרבה יותר מהירה גם בכל נושא אחר. (אפלטון).

רשימת פותרי הבעיות 465-451

אידלמן דורון	י"ב	עירוני ה' תל-אביב	(27)
אינהורן בנימין	י"א	עירוני א' " "	(7)
אינשטיין צבי	י"ב	עירוני ה' " "	(18)
בן-ששון יואב		צה"ל	(16)
בק שמואל		"	(26)
גלזמן דני	י"ב	תיכון ע"ש בליק, רמת-גן	(31)
דוד פלורין	י"ב	עירוני א', בת-ים	(35)
דנה יצחק	י"ב	תיכון "רמות", בת-ים	(27)
הלוי יאיר	י"ב	ישיבת "נחלים", נחלים	(18)
וייס לאופולד	י"א	בי"ס ע"ש רוגוזין, קרית אתא	(25)
וכותפולים ישראל	י"א	בי"ס כל ישראל חברים, תל-אביב	(7)
טולפן יוסף	י'	עירוני ה', תל-אביב	(10)
כלפון צוריאל	י"א	"רמות", בת-ים	(5)
סגל דן	י"א	"רמות", בת-ים	(11)
סופר אברהם	י"א	תיכון "אחד העם", פתח-תקוה	(10)
קורין טל	ט'	הריאלי העברי, חיפה	(16)
קריגר צבי	י"א	עירוני ט', תל-אביב	(7)
קרלינר מרק	י"א	"רמות", בת-ים	(19)
רבינוביץ נאוה	י"ב	עירוני דתי, בני-ברק	(7)
רוז קנת	י'	עירוני ה', תל-אביב	(13)
רולניק חנוך	י"א	עירוני א', תל-אביב	(4)
רורליק אמיר	ז'	הריאלי העברי, חיפה	(2)
שוחט חיים			(37)
שור בני	י"ב	עירוני ה', תל-אביב	(14)
שטח זאב	י"א	עירוני ה', תל-אביב	(7)
שמיטנסקי יורם	י"א	"רמות", בת-ים	(3)
שני רון		צה"ל	(11)
ששון אדמון			(36)