גליונות מתמטיקה

למוער הלומד ולחובבים

כרך 5 מס׳ 2
יוצא לאור בחסות
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך י. גיליס

גליונות מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים

כרך 5 מס' 2
יוצא לאור בחסות
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך י. גיליס

<u>דבר המערכת</u>

אנו מבקשים את סליחת קוראינו על העיכוב המצער שחל בהופעת הגליון החדש. סיבה אחת לכך היא שטרם נגמרה תקופת ההרצה של כל התהליכים הדרושים להוצאתה בצורתה החדשה. סיבה שניה נעוצה בגידול העצום בביקוש לעתון בגלגולו החדש, ודבר זה גרם לקשיים מינהליים שדרשו טיפול מיחד. אנחנו רוצים לקוות כי סוף סוף התגברנו על כל הקשיים וכי נוכל בעתיד להוציא את העתון במועדים סבירים יותר.

אנו מתאמצים בינתיים לא להעלות את מחיר העתון, על אף העליה הגדולה בהוצאות הכנתו, אם כי אין לדעת כמה זמן נוכל להחזיק בקו הזה. כדי לפשט ולהוזיל את העבודה המינהלית הנהגנו כמה שינויים בסידורי המנויים. להבא תהיינה בכל כרך 4 חוברות, ומנויים יוכלו לחתום רק על כרכים שלמים. לעת עתה יישאר המחיר לירה אחת לחוברת, ו- שלוש וחצי לירות לכרך שלם. פירוש הדבר שמנויים על ארבע חוברות יהיו להבא רק על ארבע החוברות של כרך שלם, ושכולם יתחילו מהחוברת הראשונה של הכרך. המנויים הקיימים, אשר מנויים ייגמר במשך כרך 5, יקבלו הודעות אישיות על התשלום שעליהם לשלם כדי לסיים את כרך זה.

<u>תוכן הענינים</u>

משפט פוליא

(המשך)

קבוצות שויון ערך של פונקציות

בסעיף הקודם ראינו את הקשר בין מבנה התמורות שבחבורת תמורות מסויימת לבין מספר הקבוצות של שויון ערך הנובעות מהפעלת התמורות האלה על קבוצה נתונה. ראינו שבמקרים מסויימים אפשר לנצל את הקשר הזה לחשב את מספרן של קבוצות שויון ערך, וע"י כך לפתור את הבעיה שממנה התחלנו את כל הדיון הזה. עכשיו נפתח את הרעיונות האלה כדי ליצור מכשיר לפתרון כללי של הבעיה וגם של בעיות מסובכות ממנה בהרבה.

נצא מקבוצה סופית D נתונה, ופונקציה f המתאימה לכל איבר x של D איזה איבר, $f(x)$, של קבוצה סופית שניה נתונה R.

מספר הפונקציות האפשריות הוא $|R|^{|D|}$ (למה?).

D נקרא התחום של פונקציה הזאת ו-R הטווח שלה, ונדבר על פונקציות מ- D ל- R. עכשיו יהיה G חבורה של תמורות של איברי D.

נגיד ששתי פונקציות $f_1(x)$, $f_2(x)$ הן קשורות, לגבי G, אם קיימת לפחות תמורה אחת π ב-G כך ש- $f_1(x) = f_2[\pi(x)]$ עבור כל x ב- D. בסימון הזה מציין $\pi(x)$ את האיבר ב- G הנובע מהפעלת π על x.

עבור f_1, f_2 קשורות זו בזו נכתוב $f_1 \sim f_2$.

היחס הזה הוא יחס של שויון ערך, ונשאיר לקורא להוכיח את העובדה הזאת.

מהתיאוריה הכללית של שויון ערך, אותה כבר למדנו, נובע שניתן לחלק את האוסף של כל הפונקציות מ- D ל- R לקבוצות של פונקציות שוות ערך.

ניקח לדוגמא

$G = \{\pi_1, \pi_2\}$, $D = \{a,b,c\}$, $R = (x, y)$.

כאשר

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

נכין טבלה של 8 הפונקציות האפשריות

	f(a)	f(b)	f(c)
f_1	x	x	x
f_2	x	x	y
f_3	x	y	x
f_4	y	x	x
f_5	x	y	y
f_6	y	x	y
f_7	y	y	x
f_8	y	y	y

אנו רואים כי $f_4(d) = f_3[\pi_2(d)]$ עבור כל d ב- D ולכן $f_3 \sim f_4$. כמו כן $f_5 \sim f_6$. מכאן שקבוצות שויון ערך של הפונקציות הן:

$\{(f_1), (f_2), (f_3,f_4), (f_5,f_6), (f_7), (f_8)\}$.

כדוגמא שניה נחזור לבעית הלוח של 2×2. אם נקרא לשני הצבעים x,y הרי בעית הצביעה היא בדיוק הבעיה איך לייחס אחד הסימנים x,y לכל אחד מארבעת הסימנים a,b,c,d. אם נראה את הקבוצה $\{a,b,c,d\}$ כתחום D ואת $\{x.y\}$ כטווח R, אזי עלינו לקבוע פונקציה $f(a)$ מ- D ל- R. הפונקציות האפשריות מופיעות בטבלה הבאה:

	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
$f_1(u)$	x	x	x	x
$f_2(u)$	x	x	x	y
$f_3(u)$	x	x	y	x
$f_4(u)$	x	y	x	x
$f_5(u)$	y	x	x	x
$f_6(u)$	x	x	y	y
$f_7(u)$	x	y	x	y
$f_8(u)$	y	x	x	y
$f_9(u)$	x	y	y	x
$f_{10}(u)$	y	x	y	x
$f_{11}(u)$	y	y	x	x
$f_{12}(u)$	y	y	y	x
$f_{13}(u)$	y	y	x	y
$f_{14}(u)$	y	x	y	y
$f_{15}(u)$	x	y	y	y
$f_{16}(u)$	y	y	y	y

עכשיו מה היא החבורה G של תמורות? הסיבוב ב-°90 מעלות תעביר את a למקומו של b, b למקומו של c, c למקומו של d, ו-d למקומו של a, ז.א. $\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ כמו כן סיבוב של°180 תגרור $\pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$. סיבוב של °270 תגרור $\pi_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ ואילו °360 (ז.א. סיבוב אפס) $\pi_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

אנו רואים מיד, כי עבור כל u ב- {a,b,c,d} יהיה

$$f_2[\pi_1(u)] = f_5(u)$$

ולכן $f_2 \sim f_5$. כמו כן $f_2 \sim f_3 \sim f_8$
ובסיכום $f_2 \sim f_3 \sim f_4 \sim f_5$.

בדרך דומה נראה כי $f_6 \sim f_8 \sim f_9 \sim f_{11}$
(לדוגמא: $f_6[\pi_2(u)] = f_{11}[u]$ עבור כל u)
רואים גם כי $f_{12} \sim f_{13} \sim f_{14} \sim f_{15}$, $f_7 \sim f_{10}$.
בכך פירקנו את מערכת כל הפונקציות לקבוצות של שויון ערך: $\{ f_1,(f_2,f_3,f_4,f_5), (f_6,f_8,f_9,f_{11}) (f_7,f_{10}), (f_{12},f_{13},f_{14},f_{15},), f_{16}\}$

אבל כל פונקציה מייצגת דרך אחת לצבוע את הלוח, ופונקציות שוות ערך מייצגות צורות צביעה שמתלכדות אחרי סיבוב מתאים של הלוח. מכאן כי מספר הלוחות השונים הוא כמנין הקבוצות של פונקציות שוות ערך, דהיינו 6. מכל זה נובע כי המשימה הבאה היא למצוא דרך יעילה לחשב את מספר הקבוצות של פונקציות שוות ערך, בלי שיהיה צורך למנות את כל הפונקציות אחת אחת כמו בטבלה. בסעיף הבא ניגש למשימה זו.

משקלים ומונים של פונקציות

יהיה D התחום ו-R הטווח של מערכת של $|R|^{|D|}$ פונקציות. נייחס לכל איבר r של R משתנה $w(r)$ שייקרא המשקל של האלמנט r. המונה של הטווח R, $M(R)$ מוגדר כסכום המשקלים של כל האיברים ב-R, ז.א. $M(R) = \sum w(r)$

כשהסכום משתרע על כל האיברים של R. אם f הוא פונקציה כלשהי מ-D ל-R אנו מגדירים את המשקל של f, $W(f)$, כמכפלת המשקלים של כל האלמנטים $f(d)$.

$$W(f) = \prod_{d\varepsilon D} w[f(d)]$$

כשהמכפלה כאן משתרעת על כל האלמנטים d ב- D (הסימן "ε" פירושו "שייך", והכוונה היא לחשב $w[f(d)]$ עבור כל d השייך ל- D ולהכפיל אותם).

אם H הוא אוסף כלשהו של פונקציות מ- D ל- R נגדיר את המפקד $I(H)$ של הקבוצה H כסכום המשקלים של כל הפונקציות השייכות ל- H .

$$I(H) = \sum_{f\varepsilon H} W(f)$$

בסעיף הבא נראה את הקשר בין ההגדרות האלה לבין בעיתנו המקורית. כאן נדגים אותן ע"י כמה מקרים ספציפיים. למשל, במקרה של צביעת הלוח שהופיע בטבלה למעלה נגדיר $w(x)=\alpha$, $w(y)=\beta$

אזי $W(f_1)=\alpha^4$, $W(f_2)=x^3y$, $W(f_8)=x^2y^2$

אם ניקח קבוצה כלשהי של הפונקציות, נגיד

יהיה $H=\{f_1,f_3,f_8,f_9,8_{12}\}$

$$I(H) = x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$$

ניקח עכשיו דוגמא אחרת. יהיה $D=(d_1,d_2,d_3)$
$R=(r_1,r_2,r_3)$ ו- H מערכת הפונקציות הבאות:

f_1 מוגדר ע"י $f_1(d_1)=r_1$, $f_1(d_2)=f_1(d_3)=r_2$

f_2 מוגדר ע"י $f_1(d_1)=f_1(d_3)=r_1$, $f_1(d_2)=r_2$

f_3 מוגדר ע"י $f_1(d_1)=r_2$, $f_1(d_2)=r_1$, $f_1(d_3)=r_3$

אם נגדיר את המשקלים $w(r_1)=\alpha$, $w(r_2)=\beta$, $w(r_3)=\gamma$

נקבל

$$W(f_1)=\alpha\beta^2,\quad W(f_2)=\alpha^2\beta\ ,\quad W(f_3)=\alpha\beta\gamma$$

ו-

$$I(H) = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma$$

נסיים את הסעיף הזה בהערה חשובה. יהיה G חבורה של תמורות של הקבוצה D ו- f_1, f_2 שתי פונקציות שהן שוות ערך לגבי G , ז.א. שקיימת לפחות תמורה אחת π ב- G כך ש-

$$f_1(d) = f_2[\pi(d)]$$

עבור כל איבר d של D . אזי

$$W[f_2] = \prod_{d\varepsilon D} w[f_2(d)]$$

$$W[f_1] = \prod_{d\varepsilon D} w[f_1(d)] = \prod_{d\varepsilon D} w[f_2(\pi(d))]$$

אבל π הוא תמורה ולכן האוסף של כל האיברים $\pi(d)$ זהה עם האוסף המקורי של כל האיברים d , אם כי בשינוי סדר. מכאן ש-

$$\prod_{d\varepsilon D} w[f_1(\pi(d))] = \prod_{d\varepsilon D} w[f_2(d)]$$

ז.א.

$$W[f_1] = W[f_2]$$

אנו רואים מזה כי לשתי פונקציות שוות ערך, והשייכות כתוצאה מכך לאותה קבוצת שויון ערך, יש אותו משקל, הוא המשקל של קבוצת שויון הערך. מאחר שנצטרך לדבר הרבה בהמשך על קבוצות שויון ערך של פונקציות נקרא לקבוצות כאלה, למען הפשטות, צורות. נצטרך גם לדון בקבוצות של צורות, ונכנה בשם מפקד של קבוצת צורות, סכום המשקלים של הצורות שבקבוצה. המפקד הכללי הוא המפקד של כלל הצורות. הבה נסכם מה שעשינו עד כה:

(i) פונקציות הן בעלות תחום D וטווח R

(ii) לכל אלמנט r ב- R מייחסים משקל, $w(r)$.

(iii) לטווח R מייחסים מונה הטווח, שהוא

$$M(R) = \sum_{r\varepsilon R} w(r)$$

(iv) לכל פונקציה f מייחסים משקל $W(f)$ שהוא

$$W(f) = \prod_{d\varepsilon D} w[f(d)]$$

(v) אם H הוא אוסף כלשהו של פונקציות מגדירים המפקד של האוסף, $I(H)$, ע"י

$$I(H) = \sum_{f \varepsilon H} W(f)$$

(vi) אם G חבורה של תמורות על האלמנטים של D והפונקציות f_1, f_2 הן שוות ערך ביחס ל- G, ז.א. שקיימת תמורה ב- G כך ש:

$$f_1[\pi(d)] = f_2(d)$$

עבור כל d ב- D, אזי הוכחנו כי $W(f_1)=W(f_2)$

(vii) לקבוצה שוויון ערך של פונקציות קראנו צורה, אם Z הוא צורה כזאת, אזי לפי (vi) יהיה $W(f)$ קבוע עבור כל f ב- Z, ולמשקל הזה קראנו משקל הצורה. נסמנו ב- $W^*(Z)$.

(viii) אם K הוא קבוצה של צורות, אז המפקד של K הוא סכום המשקלים של הצורות השייכות ל- K. אם נסמן אותו ב- $M^*(K)$, אזי

$$M^*(K) = \sum_{Z \varepsilon K} W^*(Z)$$

(ix) אם L הוא האוסף של כל הצורות, אזי $M^*(L)$ נקרא המפקד הכללי.

VIII המבנה של תמורות

בסעיף זה נסביר כמה מושגים יסודיים בענין המבנה של תמורות. ישנן תמורות, למשל $\binom{a\ b\ c\ d\ e}{c\ d\ e\ a\ b}$ אשר בהן $a \to c$, $c \to e$, $e \to b$, $b \to d$, $d \to a$, וחוזר חלילה. המצב הוא כאילו חמשת האלמנטים a,c,e,b,d היו מסודרים מסביב למעגל וסיבבנו את המעגל בהזזה מתאימה. תמורה כזאת נקראת תמורה מחזורית.

באופן יותר כללי אפשר להציג כל תמורה כצירוף של מחזורים כאלה. ניקח לדוגמא

$$\pi_1 = \binom{a\ b\ c\ d\ e\ f}{c\ d\ e\ b\ f\ a}$$

רואים כי $a \to c$, $c \to e$, $e \to f$, $f \to a$. כמו כן $b \to d$ ו $d \to b$. π_1 היא איפוא צירוף של שני המחזורים $\binom{a\ c\ e\ f}{c\ e\ f\ a}$ ו- $\binom{bd}{db}$. אנו מציינים את המבנה הזה ע"י הסימון

$$\pi_1 = ([a, c, e, f], [b, d])$$

נעיר כי יתכן בתמורה שאיבר מסוים בכלל לא יוזז, ואז הוא מהווה מחזור בעל איבר אחד: למשל,

$$\pi_2 = \binom{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i}{c\ b\ e\ g\ f\ a\ i\ h\ d}$$

$$= ([a,c,e,f], [d,g,i], [b], [h])$$

ניתוח כזה של תמורה נקרא המבנה המחזורי שלה. אם בתמורה מסויימת π ישנן b_1 מחזורים בעלי אורך 1, b_2 בעלי אורך 2, b_3 בעלי אורך 3 וכו', אזי אנו כותבים

$$\phi_\pi = x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, x_3^{b_3}$$

כאשר x_1, x_2 ... הם משתנים שעוד טרם הוגדרו, ומגדירים את מדד המחזורים של G ע"י

$$P_G(x_1, x_2, \ldots.) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \varepsilon G} \phi_\pi$$

IX משפט פוליא

נניח כמו קודם שיש לנו תחום סופי D, וחבורה G של תמורות של איברי D, וכי קבענו מערכת משקלים $w(r)$ לאיברי R. לכל פונקציה f מ- D ל- R יש משקל $W(f)$ ויהיה $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ קבוצת המשקלים השונים של הפונקציות. נפרק את האוסף של כל הפונקציות ל- m קבוצות חלקיות $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

כאשר F_i הוא קבוצת הפונקציות אשר משקלן W_i ($i=1,2,\ldots,\ldots,m$) עכשיו יהיה π אחת התמורות השייכות ל- G . עבור כל פונקציה $f(d)$ מ- D ל- R נגדיר פונקציה חדשה $f^{(\pi)}(d)$ ע"י

$$f^{(\pi)}(d) = f(\pi(d))$$

המשקל של $f^{(\pi)}$ שווה לזה של f , ולכן $f^{(\pi)}(d), f(d)$ שייכים לאותה קבוצה F_i של פונקציות. נוכיח כאן שני משפטי עזר.

<u>משפט עזר 1</u> יהיה $1 \leqslant i \leqslant m$ ו- $\{f_1, f_2 \ldots, f_R\}$ הקבוצה F_i של פונקציות. אזי קבוצת הפונקציות

$$\{f_1^{(\pi)},\ f_2^{(\pi)} \ldots,\ f_R^{(\pi)}\}$$

היא תמורה של F_2.

<u>הוכחה</u> ראינו כבר כי עבור כל f ב- F_i שייך גם $f^{(\pi)}$ ל- F_i , ולכן נשאר רק להוכיח כי הן שונות זו מזו. אבל אם $f_1^{(\pi)} = f_2^{(\pi)}$, פירוש הדבר ש- $f_1(\pi(d)) = f_2(\pi(d))$ עבור כל d ב- D . מאידך האוסף של כל ה- $\pi(d)$ זהה עם זה של כל ה-d ומכאן ש- $f_1(d) = f_2(d)$ עבור כל d ב- D , ז.א. $f_1=f_2$. דהיינו ש- $f_1^{(\pi)} = f_2^{(\pi)}$ ייתכן אך ורק כאשר $f_1=f_2$ מ.ש.ל.

התמורה π יוצרת איפוא תמורה של קבוצת הפונקציות ב F_i ($i = 1,2,\ldots\ldots,m$) . נסמן את התמורה הזאת ב- $\pi^{(i)}$.

<u>משפט עזר 2</u> עבור כל π_1,π_2 ב- G וכל i קיים

$$(\pi_1\,\pi_2)^{(i)} = \pi_1^{(i)}\ \pi_2^{(i)}$$

כי נניח ש- π_1 מעביר את f_1 ל- f_2 ו- π_2 מעביר את f_2 ל- f_3 , אזי גם

$$\begin{aligned} f_3(d) &= f_2[\pi_2(d)] \\ &= f_1[\pi_1(\pi_2(d))] \\ &= f_1[\pi_1\pi_2(d)] \end{aligned}$$

ומכאן המסקנה.

<u>משפט פוליא</u>

נתונים תחום סופי D , טווח סופי R , מערכת משקלים $w(r)$ עבור איברי R , והחבורה G של תמורות של איברי D . יהיה $P_G(x_1,x_2\ldots\ldots)$ <u>מדד המחזורים</u> של G . אזי <u>המפקד הכללי של צורות</u> עבור מערכת זו הוא

$$M^*(L) = P_G\Big(\sum_{r\varepsilon R} w(r),\ \sum_{r\varepsilon R}[w(r)]^2,\ \sum_{r\varepsilon R}[w(r)]^3\ldots\Big)$$

ז.א. הפונקציה של המשקלים $w(r)$ שמתקבלת אם מציבים במקום x_r ב- P_G את הסכום

$$k = 1,2,\ldots\ldots,\quad \sum_{r\varepsilon R}[w(r)]^k$$

<u>הוכחה</u> נתבונן לרגע באיזה i קבוע, ובאותן הפונקציות אשר משקלן W_i . הפונקציות האלה מאוגדות ב- F_i וניתן לקבץ אותן בקבוצות שויון ערך, ז.א. <u>בצורות</u> . כמה צורות כאלה קיימות ב- F_i ? נקרא למספר זה m_i וננסה לחשב אותו.

עבור כל תמורה π_j ב- G יהיה ψ_{ij} מספר הפונקציות ב- F_i אשר π_j אינה מזיזה אותן. אזי, לפי משפט בורנסיד (ראה סעיף V למעלה) יהיה

$$m_i = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi_j\varepsilon G}\psi_{ij}$$

ולכן $\sum_i m_i W_i = \sum_i [\frac{1}{|G|} \sum_{\pi_j \in G} \psi_{ij}]\ W_i$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi_j \in G} \{ \sum_i \psi_{ij}\ W_i \}$$

אבל $\sum_i \psi_{ij} W_i$ הוא בדיוק המפקד של קבוצת הפונקציות f המקיימות $f(d) = f[\pi_j(d)]$ עבור כל d ב- D , ופונקציה f תקיים את התנאי הזה אך ורק אם עבור כל האלמנטים d הנמצאים באותו מחזור של π_j יש אותו ערך ל-f(d) ולכן הוא סכום כל האיברים מהצורה

$$[w(r_1)]^{b_1}\ [w(r_2)]^{2\ b_2}\ [w(r_3)]^{3\ b_3}\ldots$$

כש- b_k הוא מספר המחזורים ב- π_j בעלי אורך k .
אבל הסכום של כל האיברים האפשריים מסוג זה הוא בדיוק

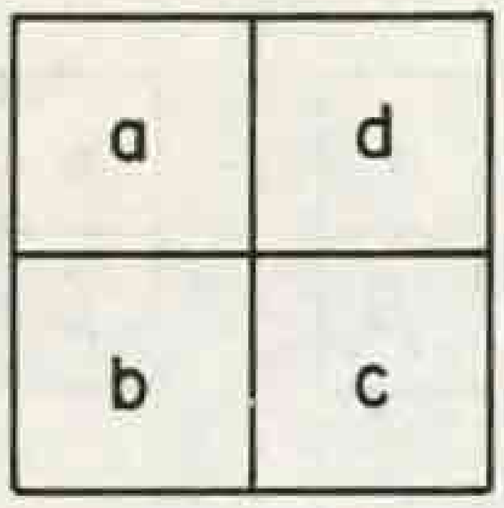
$$\sum_{r\in R} w(r)^{\ b_1}\ \sum_{r\in R} [w(r)]^{2\ b_2}\ \sum_{r\in R} [w(r)]^{3\ b_3}\ldots$$

ולכן זה גם הערך של $\sum_i \psi_{ij} W_i$. מכאן נובע שהמפקד הכללי של כל הצורות הוא:

$$m_i W_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi_j \in G} \sum_i \psi_{ij} W_i$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi_j \in G} [\sum w(r)]^{b_1}\ [\sum w^2(r)]^{b_2}\ [\sum w^3(r)]^{b_3}\ldots\}$$

$$= P_G\ (\sum_{r\in R} w(r),\ \sum_{r\in R} [w(r)]^2,\ \sum_{r\in R} [w(r)]^3,\ \ldots)$$



ציור לדוגמה (1)

דוגמאות

(1) נתחיל מדוגמא שהוצעה כבר בסעיף I . יש לנו לוח של 2x2 שאפשר לסובבו מסביב למרכזו. בכמה דרכים שונות ניתן לצבוע אותו כשלרשותנו שלושה צבעים?

אם נקרא למשבצות a,b,c,d ולצבעים α,β,γ אזי תהיה כל צביעה פונקציה מהתחום {a,b,c,d} לטווח {α,β,γ} כי הרי מה שנתבקשנו לעשות היה בדיוק להתאים לכל אחד מבין {a,b,c,d} אחד הסימנים {α,β,γ}. יהיה $w(\alpha)=x$, $w(\beta)=$ $w(\gamma) = z$. עכשיו התמורות הבאות בחשבון הן:

סיבוב ב- 0° $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

סיבוב ב- 90° $\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

סיבוב ב- 180° $\pi_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$

סיבוב ב- 270° $\pi_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$

ברור כי עבור π_1 ,

$$b_1 = 4,\ \ b_2 = b_3 = b_4 = 0$$

ולכן

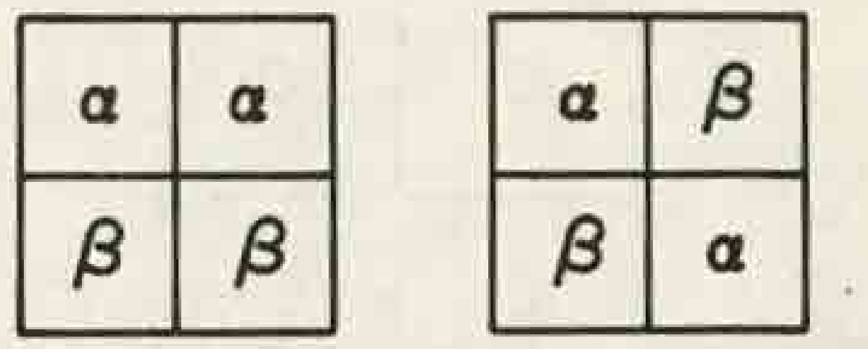
$$\phi_{\pi_1} = x_1^4$$

מאידך π_2 מורכב ממחזור אחד בעל אורך 4, ולכן $\phi_{\pi_2} = x_4$, וכמו כן $\phi_{\pi_4} = x_4$. אבל

$$\pi_3' = ([a,c],\ [b,d])$$

ולכן $\phi_{\pi_3} = x_2^2$. יוצא איפוא כי

$$P_G\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\ (x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$$



ציור לבעיה (ii)

אבל

$$\sum[w(r)]^k = x^k + y^k + z^k$$

ולכן המפקד הכללי של צורות הוא:

$$\frac{1}{4}\ \left[(x+y+z)^4 + (x^2+y^2+z^2)^2 + 2(x^4+y^4+z^4)\right)$$

$$= x^4+y^4+z^4 + 2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2) +$$

$$+ (y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3) +$$

$$+ 3(x^2yz+xy^3z+xyz^2)$$

מהמפקד האחרון נוכל להסיק את כל המסקנות.

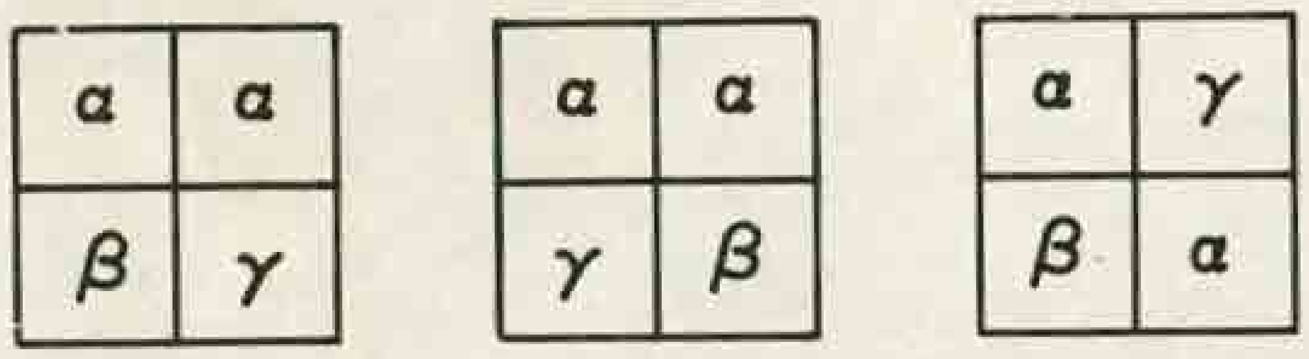
(i) כמה צורות שונות ישנן כששלוש משבצות הן בצבע α ואחת בצבע β ? התשובה היא המקדם של x^3y במפקד, ז.א. 1.

(ii) כמה צורות ישנן אשר שתי משבצות הן בצבע α ושתים בצבע β ? התשובה היא המקדם של x^2y^2 ז.א. 2.

ואמנם אנו רואים בציור שתי צורות המקיימות את התנאים ושהן באמת שונות זו מזו בכך שאין להפוך אחת לשניה ע"י סיבוב הלוח. גם ברור שאין יותר מ- 2 צורות.

(iii) כמה ישנן אם שתים בצבע α, אחת β , ואחת γ ? המקדם של x^2yz הוא 3. ואכן אנו רואים בציור את הצורות האפשריות

(iv) כמה צורות שונות ישנן בכלל? ראינו כי כל איבר בפיתוח של המפקד הכללי מתאים לחלוקה מסויימת



ציור לבעיה (iii)

של הצבעים ומקדם האיבר נותן את מספר הצורות השונות עם החלוקה הזאת. מכאן נובע שהמספר הכללי של צורות שווה לסכום המקדמים שבפיתוח המפקד, דהיינו למה שיתקבל מהמפקד אם נציב $x=y=z=1$. במקרה שלנו, נקבל 24.

<u>הערה כללית</u>

בטפולנו בשאלה האחרונה ראינו כי המספר הכללי של צורות שונות הוא המספר שיתקבל מהמפקד הכללי אם נציב 1 במקום המשקלים של איברי R השונים. אבל אז יהיה

$$\sum_{r \varepsilon R} [w(r)]^k = |R|$$

עבור כל k , ולכן המספר המבוקש הוא תמיד

$$P_G\ (|R|,\ |R|\ ,\ldots\ |R|)$$

פלינדרומים

י. קארו (ק. גבע)

1. מבוא

פלינדרום הוא מספר טבעי המקבל אותו ערך אם קוראים אותו מימין שמאלה או משמאל לימין, למשל 14641 או 906609. לשון אחרת נגיד שמספר מסויים, הוא פלינדרום לפי בסיס ספירה B, אם הספרה הראשונה שווה לספרה האחרונה, השניה לזו שלפני האחרונה וכו׳. באופן פורמלי נסמן ב- a_r הספרה ה- r-ית מהימין בהצגת איזה מספר לפי בסיס נתון B. אזי פלינדרום בעל R ספרות לפי בסיס B הוא מספר אשר עבורו $a_r=a_{k+1-r}$ $(r=1,2,\dots k)$.

יש להעיר כי מספר יכול להיות פלינדרום לפי בסיס אחד בלי ליהנות מהתכונה הזאת לגבי בסיס אחר. לדוגמא המספר העשרוני 171 הוא 210 לפי בסיס 9, ו- 253 לפי בסיס 8.

בהמשך המאמר נניח שהבסיס B נתון וקבוע, וכל התייחסות למספר תניח שהוא מוצג לפי הבסיס הזה. בין השאר נוכיח שמספר הפלינדרומים הוא אמנם אינסופי, אבל שהם מהווים בכל זאת קבוצה חלקית דלילה יחסית של קבוצת כל המספרים הטבעיים.

2. כמה משפטים

משפט 1 קיימים אינסוף פלינדרומים.

הוכחה אם B הוא בסיס הספירה, אזי $B>1$ ולכן 0 ו- 1 הם תמיד ספרות אפשריות. נצא מאחד הפלינדרומים 1 או 11, נוכל בלי סוף להוסיף כל סדרה של 1, 0 לפניו והסדרה ההפוכה אחריו ולקבל פלינדרומים במספר אינסופי למשל: 10101, 11, 101101, 11011011.

משפט 2 מספר הפלינדרומים n המקיימים $B^k<n<B^{k+1}$ הוא

$$(B-1)\cdot B^{[\frac{k}{2}]}$$

הערה $[\frac{k}{2}]$ מסמן כרגיל את החלק השלם של $\frac{k}{2}$, למשל $[\frac{7}{2}]=3$, $[\frac{14}{2}]=7$, וכו׳.

הוכחה למספר כזה יש $k+1$ ספרות. אם k זוגי אז מספר הספרות הוא אי-זוגי ונוכל לקבוע את הספרה האמצעית באופן שרירותי, ולזה ישנן B אפשרויות. אם נקבע עכשיו את $\frac{k}{2}$ הספרות שמשמאל לאמצעית ייקבע הפלינדרום באופן חד משמעי. אבל הספרה הראשונה יכולה לקבל כל ערך טבעי מ- 1 עד $(B-1)$ דהיינו $(B-1)$ אפשריות. שאר הספרות יכולות לקבל כל ערך מ- 0 עד $B-1$ ולכן ישנן $B^{\frac{k}{2}-1}$ אפשרויות עבורן. יוצא כי מספר הפלינדרומים הוא

$$B\times(B-1)\times B^{k/2-1}$$

$$=(B-1)\cdot B^{k/2}$$

אם k הוא אי זוגי אזי מספר הספרות זוגי ואין ספרה אמצעית. מספר האפשרויות יהיה איפוא

$$(B-1)\times B^{\frac{k+1}{2}-1}=$$

$$=(B-1)\cdot B^{\frac{k-1}{2}}$$

והניסוח במשפט מתאים לשני המקרים.

משפט 3 אם S_r הוא מספר הפלינדרומים הקטנים מ-B^r אזי

$$S_{2m}=2(B^m-1) \qquad (i)$$

$$S_{2m+1}=(B+1)B^m-2 \qquad (ii)$$

הוכחה (i) ממשפט 2 נובע כי

$$S_{2m}=\sum_{r=0}^{2m-1}(B-1)\cdot B^{[\frac{1}{2}r]}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(B-1)\{B^{[\frac{2k}{2}]}+B^{[\frac{2k+1}{2}]}\}$$

$$= 2(B-1)\sum_{k=0}^{m-1} B^k = 2(B^m-1)$$

(ii) מאידך

$$S_{2m+1} = S_{2m} +$$

(מספר הפלינדרומים המקיימים $B^{2m}<b<B^{2m+1}$) +

$$= 2(B^{m-1}) + (B-1)\cdot B^{[\frac{2m+1}{2}]}$$

$$= 2(B^m-1) + B^m(B-1)$$

$$= B^m(B+1) - 2$$

נגדיר ρ_k <u>כצפיפות היחסית</u> של הפלינדרומים עד B^k-1 ז.א.

$$\rho_k = \frac{1}{B^k}\times S_k$$

ממשפט 3 נובע מיד כי S_k שואף לאינסוף עם k, ואילו ρ_k שואף ל- 0 כש-k שואף לאינסוף, וזו משמעות ההערות שבסוף 1.

3. <u>כמה משפטים נוספים</u>

ידוע כי הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ אינו מתכנס, וכי הסכום הסופי $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ הולך וגדל בלי סוף כש- N שואף לאינסוף. מאידך אם נסמן ב- T_r את הפלינדרום ה- r לפי הסדר הטבעי נראה כי $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{T_r}$ מתכנס.

<u>משפט 4</u> (i) עבור כל N, קיים $\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{T_r} < B+1$

(ii) עבור כל N מספיק גדול, קיים

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{T_r} > \sum_{i=1}^{B-1}\frac{1}{i}$$

<u>הערה</u> הניגוד בין התוצאה (i) לבין העובדה שסכום ההיפוכים של כלל המספרים הטבעיים $\sum\frac{1}{r}$ אינו חסום נותן ביטוי מפורש לדלילות היחסית של קבוצת הפלינדרומים.

<u>הוכחה</u> הוכחת (ii) מיידית, כי הרי כל הספרות הבודדות 1,2,....., ו-$(B-1)$ הן פלינדרומים. נוכיח איפוא את (i).

נמצא את k כך ש- $T_n < B^{k+1}$ ואז $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{T_r}$ קטן מסכום ההפוכים של כל הפלינדרומים הקטנים מ-B^{k+1}, אבל הקבוצה הסופית הזאת של פלינדרומים ניתנת לפירוק לקבוצות חלקיות כדלקמן:

אלה בין 1 ל- B ; אלה בין $B+1$ ל- B^2, אלה בין B^2+1 ל- B^3, וכו'. נסתכל באלה שבין B^u+1 ל-B^{u+1} מספרן, לפי משפט 2, הוא $(B-1)\cdot B^{[\frac{u}{2}]}$ ואילו כולם גדולים מ- B^u. יוצא כי תרומת הקבוצה הזאת לסכום $\sum\frac{1}{T_r}$ קטנה מ-

$$F_u = (B-1)\cdot B^{[\frac{u}{2}]}/B^u$$

עבור $u=2m$, $F_{2m} = \frac{B-1}{B^m}$ ואילו

$$F_{2m+1} = (B-1)\cdot B^m/B^{2m+1} = \frac{B-1}{B^{m+1}}$$

מכאן ש-

$$\sum_{r=1}^{N} < \sum_{r=1}^{B^{k+1}}\frac{1}{T_r}$$

$$< \sum_{u=0}^{\infty} F_u$$

$$= (B-1)\ \{1+\frac{1}{B}+\frac{1}{B}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B^3}+\frac{1}{B^3}+\dots\}$$

$$= (B-1)\ \{\frac{2}{1-\frac{1}{B}} - 1\} = 2B-(B-1) = B+1$$

ממשפט 4 נובע כי הסכום $\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{T_r}$ חסום עבור כל N ונמצא בין שני מספרים התלויים ב- B . נכתוב

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{T_r} = \sigma_B$$

ו-

$$\sum_{r=1}^{B-1} \frac{1}{r} < \sigma_B < B+1$$

אבל הטור ההרמוני באגף השמאלי שואף לאינסוף עם B , ולכן נכון דבר זה גם לגבי σ_B . למעשה אפשר לקבל הערכה עוד יותר מדוייקת של σ_B :

$$\ln B + \gamma < \sigma_B < \ln B + 2$$

כש- γ הוא הקבוע של אוילר, $\gamma = 0.5772...$, אבל לא נוכל להוכיח את הגבולות האלה במסגרת מאמר זה. בינתיים נוכל להסיק מהם כי

$$2\cdot 8798 < \sigma_{10} < 4.3026$$

ואמנם $\sigma_{10} = 3.375$.

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשל"ג

בכבל שנה מארגן מכון ויצמן למדע גם השנה אולימפיאדה לנוער במתמטיקה, בשיתוף עם תכנית חסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ. התחרות המוקדמת התקיימה ביום 28.2.73 ברחובות, ירושלים, תל-אביב וחיפה.

מספר המשתתפים הגיע ל- 121, ו- 20 מביניהם הוזמנו לתחרות הגמר ברחובות. בעת כתיבת שורות אלה טרם התקיימה תחרות הגמר ולכן לא נוכל להציג כאן את השאלון. אבל אנו מראים למטה את השאלון של התחרות המוקדמת לעניין קוראינו.

השאלון

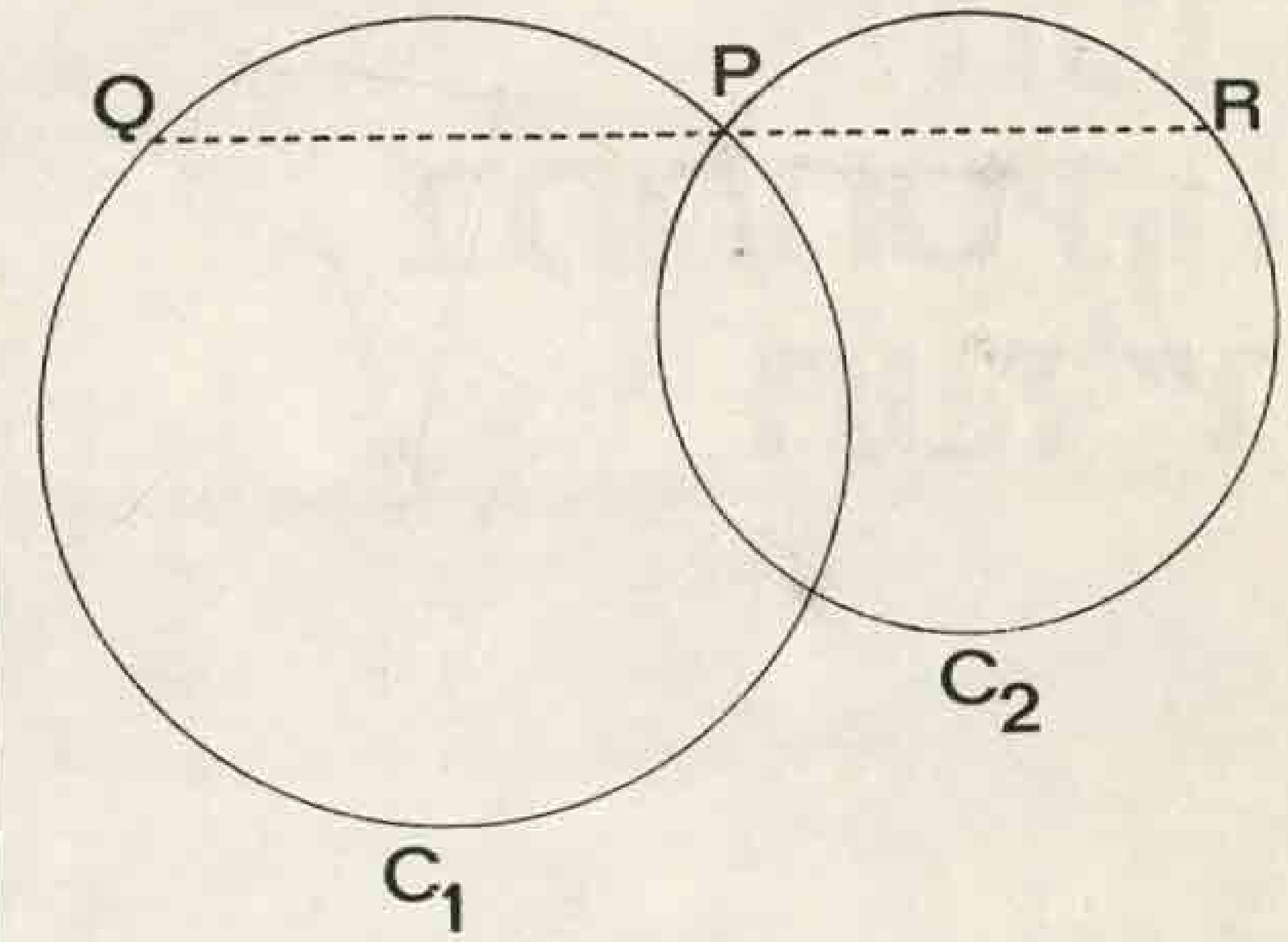
המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה.

1(12) הוכח כי אין למצוא סדרה חשבונית אשר המספרים $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ו-$\sqrt{5}$ ישוו לשלושה איברים כלשהם של סדרה זאת.

2(15) המספרים הממשיים a,b,c נמצאים כולם בין 0 ל- 1. להוכיח כי לא יתכן שכל שלושת המספרים $c(1-a)$, $b(1-c)$, $a(1-b)$ יהיו גדולים מ- $\frac{1}{4}$.

3(15) המספרים הטבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שונים זה מזה ואין אף אחד מהם מתחלק במספר ראשוני גדול מ- 3. הוכח כי

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n} < 3$$



ציור לבעיה 5 (15)

4 (18) בלוח של 4×4 משבצות רשום מספר שלם בכל משבצת, וסכום 16 המספרים הוא 32. הוכח כי אפשר למצוא שורה וטור בלוח כך שסכומם של 7 המספרים הרשומים בשבע המשבצות שבשורה ובטור הללו קטן מ- 15.

5 (15) P היא אחת מנקודות החיתוך של שני העיגולים C_1, C_2. לבנות ישר QPR העובר דרך P והפוגש את המעגלים ב- Q ו- R כך ש- $QP = PR$.

6 (20) α הוא שורש ממשי של המשוואה $x^3+px+q=0$.
הוכח כי $p^2 \geqslant 4\alpha q$.

7 (23) נתון כי a,b,c הם מספרים שלמים וכי $a+b+c = 10$. הוכח כי למשוואה
$ax^3+bx^2+cx = 9$ אין אף פתרון אחד שלם.

8 (25) α, β, γ הן זויות במשלש. הוכח כי

$$\cos\alpha+\sqrt{2}(\cos\beta+\cos\gamma) \leqslant 2$$

וכי השוויון קיים אך ורק כאשר $\alpha=90°$, $\beta=\gamma=45°$.

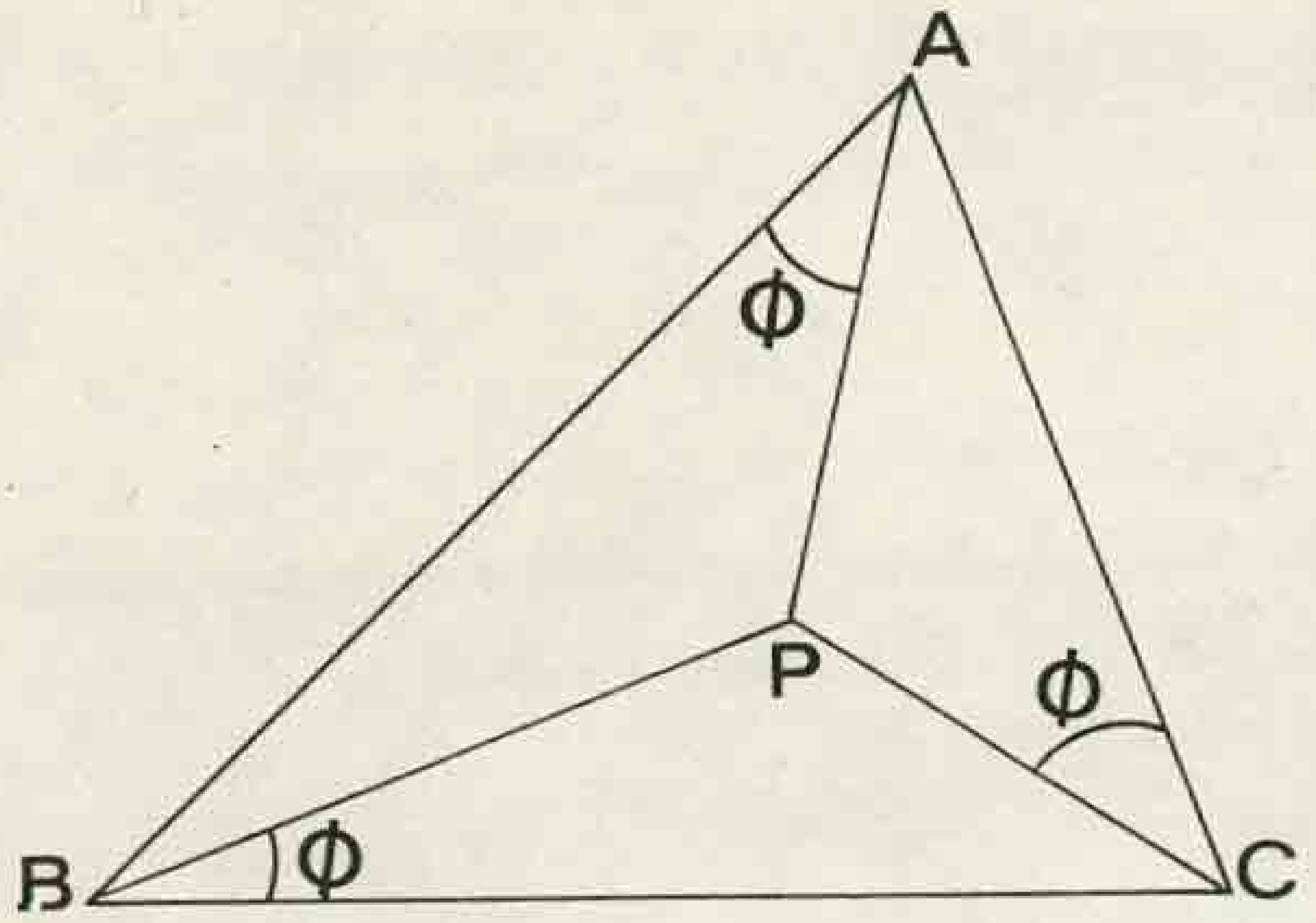
9 (30) נתונה נקודה P בפנים משלש ABC כלשהו, כך ש-

$$\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCA=\phi$$

הוכח כי

$$\frac{1}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

כש- α,β,γ הן זויות המשולש.



ציור לבעיה 9 (30)

10 (30) A, B, C, D הן ארבע נקודות במרחב שאינן נמצאות במישור אחד. הראה איך לקבוע מישור כך ש- A,B יהיו מצד אחד שלו ו- C,D מצדו השני, וכולן במרחקים שווים ממנו.

מעולם המחשבים

בעריכת נחמן גבעולי

הכתב הפולני

כדי להבין ביטוי מתימטי עלינו לקבוע לעצמנו שלושה דברים: מה הם האיברים המשתתפים בו, מה הן הפעולות בין האיברים הללו, ומהו סדר הפעולות. כידוע, הביטוי a+b.c יקבל בדרך כלל ערך אחד אם נבצע את החיבור לפני הכפל, וערך שונה אם נבצע את הכפל לפני החיבור.

ישנן כמה שיטות כדי לקבוע את סדר הפעולות בביטוי. למעשה הכתיב המקובל במתימטיקה כולל בתוכו את כל השיטות הללו גם יחד, בצורת כללים למקרים שונים. משום כך יש בזה סרבול רב, המתבלט במיוחד כשאנו רוצים להקנות כללים אלה למחשב. נפרט להלן את הכללים השונים, ונציין מתי הם נהוגים:

<u>כלל א'</u>: הכלל הפשוט ביותר הוא לבצע את הפעולות לפי סדר הופעתן, משמאל לימין. בביטוי a+b.c מבצעים קודם את החיבור, ואח"כ את הכפל. אם רצוננו לציין שהכפל קודם לחיבור עלינו לכתוב b.c+a.

למעשה נהוג כלל זה רק לגבי פעולות, שבהן הסדר אינו משנה את התוצאה, למשל בביטוי a.b/c מבצעים קודם את הכפל, ואח"כ את החילוק; אם כי אותה התוצאה מתקבלת כשמחשבים קודם את b/c ואח"כ כופלים זאת ב- a.

ומדוע בעצם אין מאמצים שיטה זו בכל המקרים? האם לא נוכל תמיד לכתוב את האיברים בסדר כזה, שסדר הפעולות יהיה בדיוק לפי הרצוי לנו? התשובה היא שלילית. האם תוכל למצוא דוגמא לכך?

<u>כלל ב'</u>: גם כלל זה הוא פשוט, אך אינו נוח ביותר. לפיו מציינים את סדר הפעולות בעזרת סוגריים, כאשר הפעולה שבתוך הסוגריים נעשית לפני הפעולה שמחוץ להם. אם ישנם סוגריים בתוך סוגריים, מבצעים קודם את הפעולה הפנימית יותר.

שיטה זו היא טובה תמיד, אולם אם נרבה להשתמש בה נקבל ביטויים מסובכים, שהעין, ועל אחת כמה וכמה המחשב, יתקשו בהבנתם. לדוגמה, הנוסחה לשרשי משוואה ריבועית

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2a}$$

תיכתב

$$x = ((-b) \pm \sqrt{((b^2)-((4.a).c)))/(2.a)}$$

<u>כלל ג'</u>: אפשר להשמיט את הסוגריים כאשר סימן אחר, כגון קו-שבר או סימן השורש, נוטל על עצמו גם את תפקיד הסוגריים. קו השבר, למשל, משמעותו שגם המונה וגם המכנה נתונים כאילו בסוגריים. סימן השורש משמש במקום סוגריים המקיפים את כל הביטוי הנמצא בתוכו. לכן הנוסחה הנ"ל לשרשי משוואה ריבועית תהיה

$$x = \frac{(-b) \pm \sqrt{(b^2)-((4.a).c)}}{2.a}$$

כמו כן אפשר לוותר על הסוגריים כאשר הפעולה היא במעריך של חזקה. אפשר לכתוב, למשל a^{m+n} במקום $a^{(m+n)}$, כי הרמת המעריך לשורה נפרדת ממלאת את תפקיד הסוגריים.

<u>כלל ד'</u>: סדר הפעולות - באותם המקרים שהסוגריים אינם קובעים סדר אחר - נקבע לפי סוג הפעולה.
לדוגמה: חזקה והוצאת שורש מבוצעות לפני כפל וחילוק,

ואלה - לפני חיבור וחיסור.
למעשה מערכת כללים כזו דרושה לא רק לביטויים מתמטיים, אלא גם לביטויים לוגיים, כשבמקום המלה "פעולה" אנו מדברים על "יחס", כגון היחס " A גורר את B ", או היחס " A נכון אם, ורק אם, B נכון". נוסחה לוגית יכולה להכיל גם פעולות מתמטיות, וגם אופרטורים ויחסים לוגיים, לדוגמה, המשפט - אם לא נכון ש- a קטן מ a+b וגם לא נכון ש- a גדול מ- a+b אזי b=0 ייכתב כך:

$$\sim(a < a+b) \cap \sim (a > a+b) \supset (a=0)$$

ובכן, יש להרחיב את כלל ד' על סדר הפעולות ולכלול בו גם סימנים כגון $\supset$,~ ,< ,> ,$\cap$,= ואחרים.

לאור כל זאת מובן כי השמת הכללים הללו במחשב אינה פעולה קלה. הניתוח של נוסחה לוגית או מתמטית ע"י המחשב עלול להיות איטי ויקר מדי, והמחשב יצטרך לסרוק את הנוסחה פעמים אחדות עד שיצליח לפענח את משמעותה. ברם, לוגיקן פולני בשם Lukasiewicz המציא שיטת כתיב אחרת, שבה אין צורך בסוגריים או בסימנים אחרים במקומם, ואף לא בכללים על סדר העדיפויות בין הפעולות. מאחר שאלה שאינם דוברים שפות סלביות לא ידעו איך לקרוא את שמו, נקראת שיטה זו כיום בשם "הכתיב הפולני".

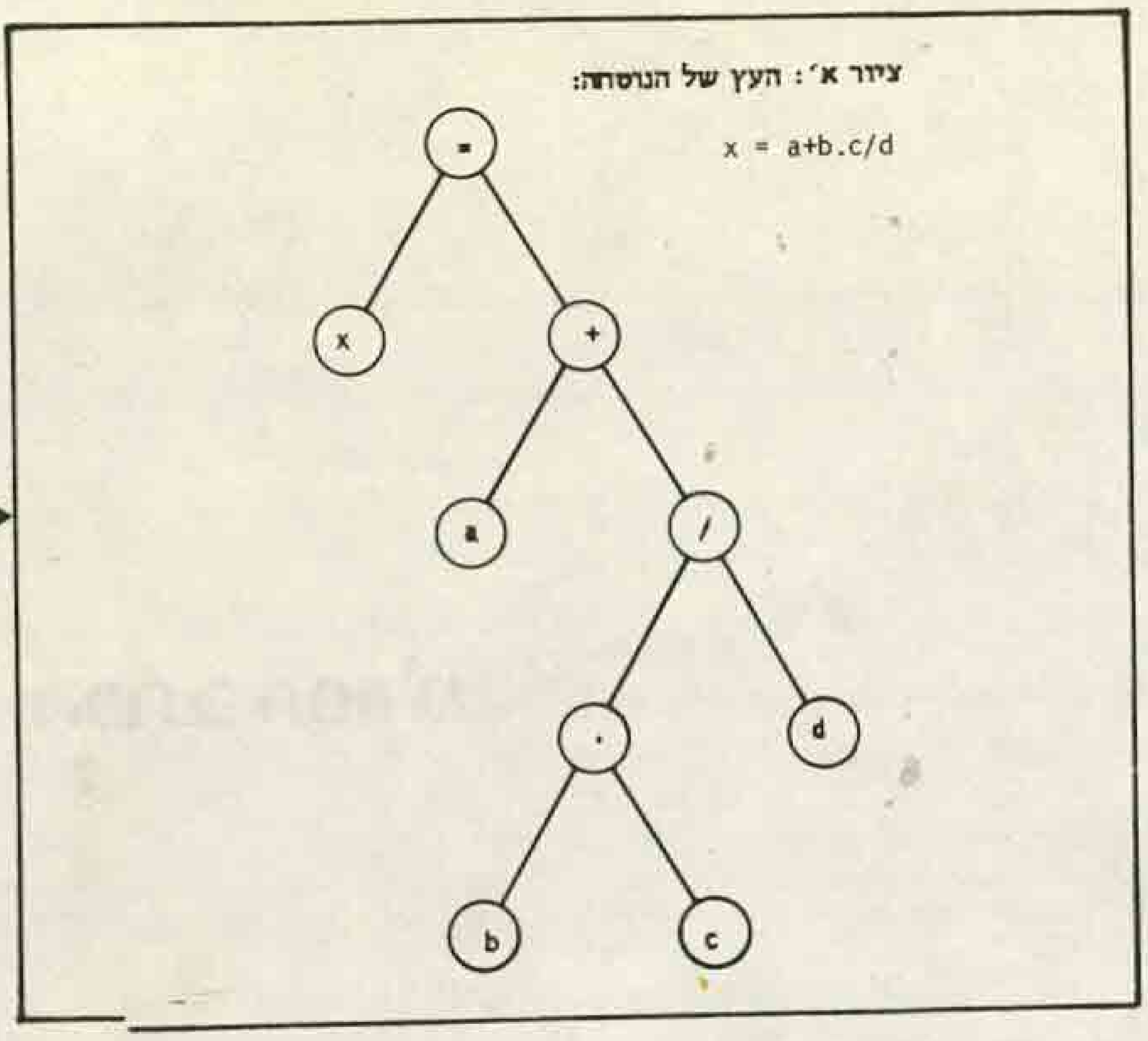
הכלל אומר בפשטות: שים כל סימן משמאל לשני האיברים שהסימן קושר. במלים אחרות, במקום לכתוב a+b, כתוב +ab. במקום לכתוב x=y כתוב =xy.

מפליא שכלל פשוט זה מספיק בכל המקרים ונותן תוצאה חד-משמעית גם לנוסחה המסובכת ביותר; ולהיפך - גם הנוסחה המסובכת ביותר בכתיב הפולני מתורגמת באופן חד-משמעי לנוסחה בכתיב המקובל.
ניקח לדוגמה את הנוסחה:

x=a+b.c/d

הפעולה הראשונה שעלינו לבצע היא הכפל, אחריה החילוק, ואחריה החיבור. רק לאחר ביצוע כל הפעולות הללו מגיע תורו של הסימן "שווה" הקושר בין תוצאת הפעולות ובין האגף השמאלי. כל סימן, בתורו, נכתוב עכשיו משמאל לשני האיברים שהוא קושר. הכפל ייכתב בצורת .bc. אנו רואים עכשיו את .bc כאיבר אחד, אשר יש לחלקו ב- d. נכתוב זאת כך: /.bcd. כל זה נחשב כאיבר יחיד, אשר יש לחברו ל- a: +a/.bcd. ולבסוף, כל זה נחשב לאיבר יחיד, אשר הסימן "שווה" קושר אותו ל- x: =x+a/.bcd

כדי לראות זאת ביתר בהירות נחזור לנוסחה המקורית, x=a+b.c/d, ונצייר אותה בצורת עץ מהופך, שבו כל סימן הוא צומת. הענפים מוליכים מן הצומת אל האיברים שהסימן קושר. בראש העץ יהיה איפוא הסימן "שווה", המפריד בין חלקי העץ העיקריים - אגפי הנוסחה. האגף השמאלי מכיל רק את האיבר x. באגף הימני סימן הפלוס מפריד את האגף לשני חלקים עיקריים. משמאל לסימן זה מופיע רק האיבר a. מימינו סימן החילוק הוא עכשיו המפריד העיקרי. מימינו של החילוק קיים רק האיבר d, ומשמאלו הכפל המפריד בין b ו- c. (ציור א').

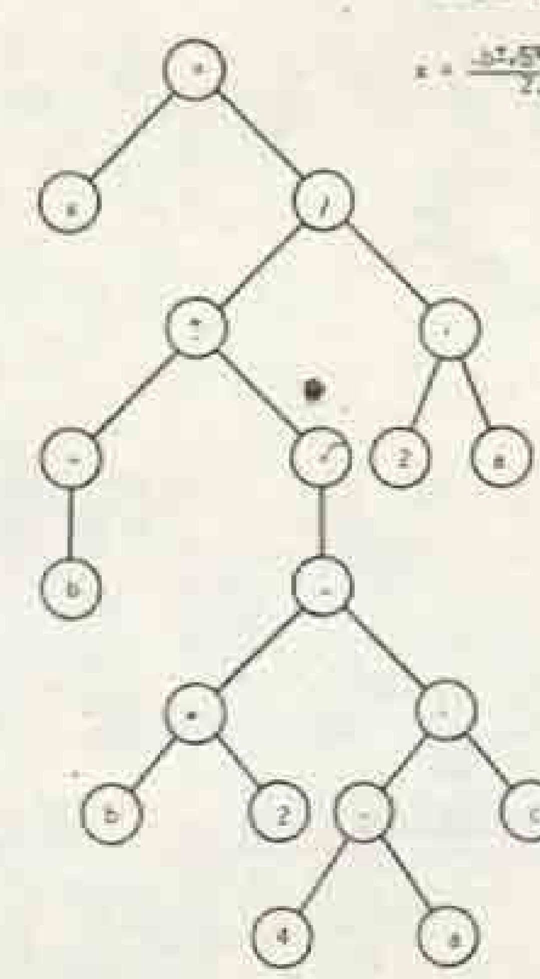


ציור א': העץ של הנוסחה:

כדי לבטא עכשיו את העץ בכתיב הפולני אנו יורדים בו מראשו, ו"תרים" כל ענף עד לסופו: קודם הענף השמאלי ביותר, ואח"כ הענף שמימינו, וכן הלאה:

-x+a/.bcd

ציור ב׳: העץ של הנוסחה



עלינו להביא בחשבון שישנם גם אופרטורים (פעולות) המתיחסים לאיבר אחד, ולא לשנים. לדוגמה, האופרטור "שורש", או "מינוס", בניגוד לחיסור. הפעולה -a פירושה: הפוך את סימנו של a. כדי להבדיל בין אופרטור זה ובין חיסור נסמן אותו בסימן ~.

נחזור עתה לנוסחה הנ"ל לפתרון משוואה ריבועית, אלא שאת פעולת החזקה נסמן בכוכב:

$$x = \frac{\sim b \pm \sqrt{b*2-4.a.c}}{2.a}$$

נצייר אותה כעץ: הסימן "שווה" מפריד את העץ לשני אגפים, כשבשמאלי רק האיבר x. באגף הימני הסימן המפריד העיקרי הוא החילוק, שמימינו המכפלה של 2 ב- a. משמאל לחילוק, (היינו במונה), המפריד העיקרי הוא הסימן "פלוס או מינוס", שמשמאלו האופרטור מינוס עם איבר יחיד, b. מימין הפעולה העיקרית היא השורש, שגם הוא אופרטור בעל איבר יחיד. המפריד העיקרי בתוך השורש הוא החיסור, שמשמאלו החזקה ומימינו המכפלה. למעשה יש מימין שתי פעולות, כשהמכפלה 4.a מוכפלת מצידה ב- c. (ציור ב׳).

כשאנו יורדים בעץ מראשו ותרים קודם בענפים השמאליים כל ענף עד לסופו, מתקבלת הנוסחה הבאה בכתיב הפולני:

=x/±~b√-*b2..4ac.2a

נראה עכשיו את התהליך ההפוך: כיצד לעבור מהכתיב הפולני לכתיב הרגיל. מה משמעותה של הנוסחה -

=x+a/.bcd

כשהמחשב מקבל נוסחה זו, הוא סורק אותה מימין לשמאל, עד שהוא נתקל בסימן הראשון. סימן זה הוא מציב בין שני האיברים שמימינו, ומקיף את שלושתם בסוגריים:

=x+a/(b.c)d

כל מה שבתוך הסוגריים נחשב מעתה לאיבר יחיד. הסריקה נמשכת שמאלה (אין צורך לחזור לקצה הימני של הנוסחה), והסימן הבא הוא החילוק. גם הוא מוצב בין שני האיברים שמימינו, עם סוגריים מסביב לשלושתם:

=x+a((b.c)/d)

הסימן הבא הוא החיבור:

=x(a+((b.c)/d))

והסימן האחרון הוא השוויון:

(x=(a+((b.c)/d)))

עכשיו מותר (אך אין זה הכרחי) להשמיט את הסוגריים מסביב לנוסחה כולה, וכן מסביב לאגף הימני כולו:

x = a+((b.c)/d)

למעשה, בהתאם לכללי סדר הפעולות (כלל ד׳), מותר - אך אין זה הכרחי - להשמיט גם את הסוגריים שמסביב לחילוק ולכפל:

x = a+b.c/d

לבסוף הננו מציעים לקוראינו שתי שאלות:

א) כיצד תכתוב בכתיב הפולני את הנוסחה:

(a+b).(a-b) = a*2-b*2

ב) הנוסחה הבאה נתונה בכתיב הפולני. מה היא בכתיב הרגיל?

=-ab√+ -*a2..2ab*b2

פתרון לבעיית האלגוריתם

בחוברת הקודמת הסברנו מהו אלגוריתם, והבאנו כמה דוגמאות. אגב, באחת מהן נפלה טעות קלה, אשר הקוראים בוודאי עמדו עליה. בעמוד 20, בשורה 10 בטור השמאלי, נאמר כי אנו מניחים שאין בארנק מטבעות בנות 5 אגורות או אגורה אחת. למעשה הנחנו זאת רק לגבי מטבעות בנות 5 אגורות.

הצענו לקוראים לפרט את האלגוריתם למציאת כל המספרים הראשוניים עד 100,000, וזאת בשיטת הכברה של ארטוסתנס. כפי שהסברנו, השיטה מבוססת על הפעולות הבאות:

א. רשום את כל המספרים השלמים מ-2 עד 100,000;

ב. מחק מתוכם את כל הכפולות של 2, של 3 וכן הלאה.

הבעייה היא כיצד לציין בדיוק את כל הצעדים הדרושים מבלי להשתמש במלים כגון "וכן הלאה", ומאידך מבלי שיהיה צורך לפרט רבבות של צעדים. ובכן, להלן צעדי האלגוריתם:

א. רשום, בזה אחר זה, את כל המספרים השלמים מ- 2 עד 100,000.

ב. קבע $i = 2$ (זהו המספר הראשון שאת כפולותיו אנו עומדים למחוק.)

ג. קבע $n = 2$. (זהו הכופל שבו נכפול את i.)

ד. אם $ni > 100,000$ עבור לצעד ז.

ה. מחק בשורת המספרים את המספר ni.

ו. הגדל את n ב- 1 וחזור לצעד ד.

ז. אם $i = 100,000$ גמור.

ח. אחרת הגדל את i ב- 1 (התחל סדרת מחיקות חדשה).

ט. אם i אינו מחוק חזור לצעד ג. אחרת חזור לצעד ז. (אם המספר הראשון בסדרת המחיקות כבר מחוק, כל הסדרה תהיה מחוקה ממילא.)

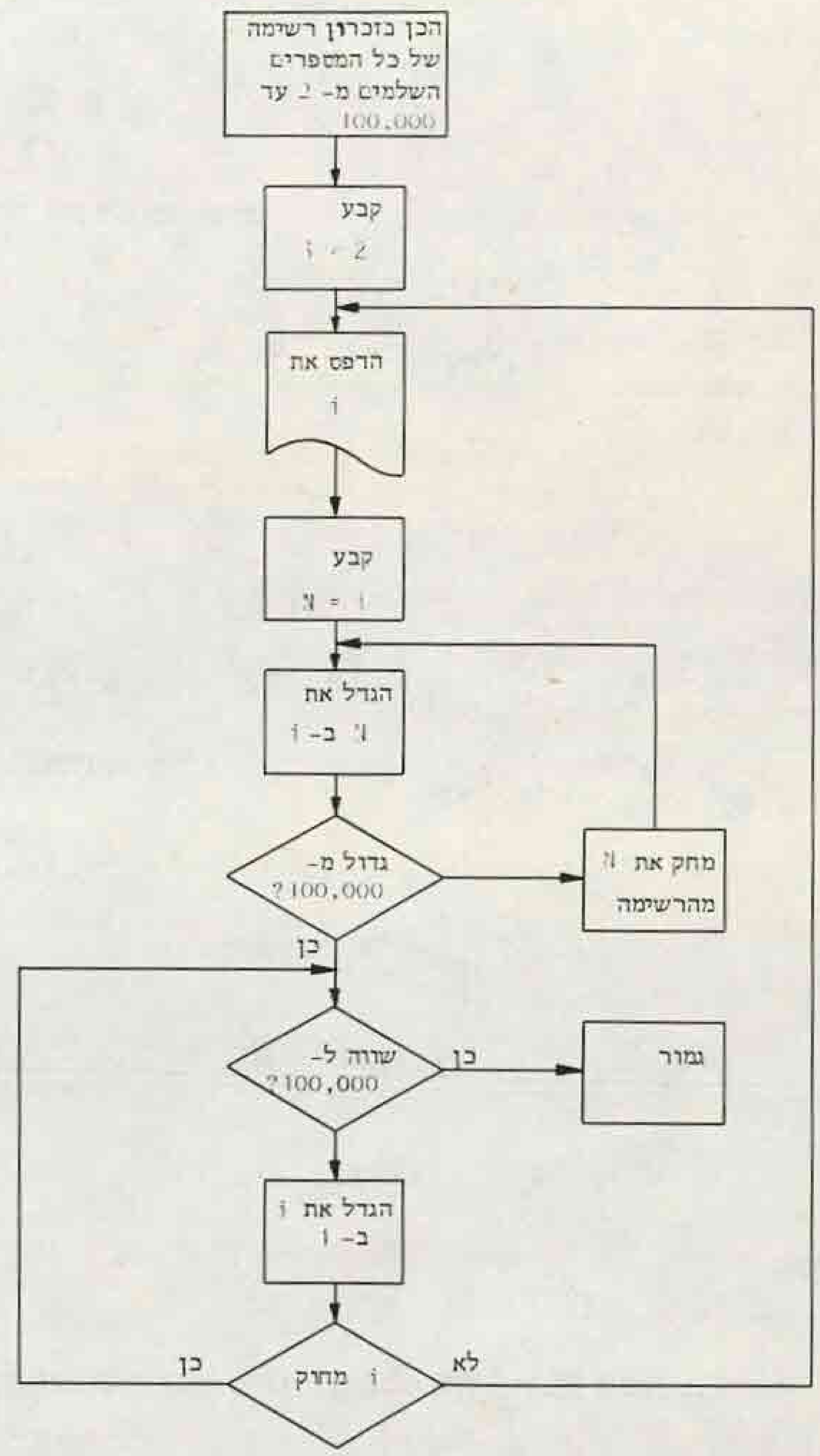
המספרים שישארו ברשימה יהיו ראשוניים כולם. אלגוריתם זה מספיק איפוא כשהפעולה נעשית בידי אדם. ברם, אם המדובר במחשב, הרי רשימת המספרים היא כולה בזכרון המחשב, ועכשיו יש צורך להדפיס אותה. בעצם, פעולת ההדפסה יכולה להיעשות בד בבד עם פעולת המחיקה, שהרי המספר המקדים כל סדרה של מחיקות, אם איננו מחוק, יהיה ראשוני. נוכל איפוא להדפיס אותו לפני שאנו מתחילים סדרת מחיקות חדשה. ע"י כך נחסוך זמן ניכר מפעולת המחשב.

נוכל להשיג חסכון נוסף בפעולת המחשב, אם נשנה את צעד ה׳ ונחליף את הכפל בחיבור. במלים אחרות, במקום לכפול את המספר i ב- 2, ב- 3 וכו׳, אפשר להוסיף אליו בכל פעם i. למחשב, כמו לאדם, החיבור היא פעולה מהירה הרבה יותר מן הכפל, ובמקרה זה כל פעולת כפל מוחלפת בפעולת חיבור אחת.

כתוצאה מן השינויים הללו נקבל את הדיאגרמה הבאה: (בעמ׳ 17)

בעיית פריטת הלירה ששימשה כדוגמה במדורנו הקודם הובאה למחשב ע"י כמה מקוראינו. התכנית בכל המקרים הללו נכתבה בשפת BASIC, והורצה במחשב של המרכז לטכנולוגיה חינוכית. אנו מניחים איפוא כי בעייה זו שימשה כתרגיל כיתתי באחד מבתי הספר. המחשב קיבל כנתון בכל הפתרונות הללו, את מספר המטבעות השונות בארנקך ובתשובה נתן דרך אחת, אם ישנה כזו, לפריטת הלירה. המתכנתים היו: רפי פרל, צבי גלייכמן, אלי האובן, משה בלאו, נחמן גרבסקי וברוך דמידיאנו.

כן קבלנו פתרון לבעיית המספרים הראשוניים מאת איתן בלוך (חיפה), וגם מפותר שני שלא חיים על הפתרון.



אלגוריתם להדפסת כל המספרים הראשוניים עד 100,000.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1) **לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס)**

2) **להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.**

3) **למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו למערכת, יחד עם הפתרונות, לא יאוחר מ- 15.7.73.**

4) **לסמן את המעטפה "פתרונות", ולא להכניס בה כל חומר אחר.**

המספר בסוגריים אחרי מספר כל שאלה הוא מספר נקודות זכות שיוענקו בעד פתרון מלא ומדוייק של השאלה.

1(2). **הוכח כי, עבור** n **טבעי, אין גורם משותף למספרים** $n!+1$ **ו-** $(n+1)!+1$.

2(2). **לקבוע את הערכים החיוביים של** x **המקיימים**

$$\log_e x \leqslant \sqrt{x}$$

3(2). S **הוא שטח של משולש כלשהו ו-** $2p$ **הוא היקף המשולש. הוכח כי** $p^2 \geqslant 3S\sqrt{3}$ **, וכי שוויון קיים אך ורק עבור משולש שווה צלעות.**

4(3). **הוכח כי, עבור** a,b,c **חיוביים,**

$$a^3+b^3+c^3+15abc \leqslant 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

וכי שוויון קיים אך ורק אם $a=b=c$.

5(3). **נתונים כי** α,β,γ **הם שורשי המשוואה**

$$x^3-3px^2-3(1-p)x+1 = 0$$

הוכח כי

או $\alpha(1-\beta)=\beta(1-\gamma)=\gamma(1-\alpha) = 1$

או $\alpha(1-\gamma)=\beta(1-\alpha)=\gamma(1-\beta) = 1$

6(3). אם a,b,c,d הם מקדמי ארבעה איברים עוקבים בפיתוח הבינום $(1+x)^n$, הוכח כי

$$(a+b)(c^2-bd) = (c+d)(b^2-ac)$$

7(4). α,β,γ הן זוויות של משולש. הוכח כי

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leqslant 3^{5/4}\, 2^{-1/2}$$

8(4). במישור משרטטים k קוים מקבילים ועוד n קוים שאינם מקבילים זה לזה או ל- k הקוים הראשונים. אין אף שלושה מתוך $(n+k)$ הקוים האלה נפגשים בנקודה אחת. לכמה תחומים מחלקים $(n+k)$ הקוים את המישור?

9(5). למספרים השלמים הבלתי שליליים a,b,c יש התכונה כי, עבור כל מספר ראציונלי r,

$$\left| \frac{a+br+cr^2}{1+r} - \sqrt{2} \right| \leqslant \left| r - \sqrt{2} \right|$$

מה הם הערכים האפשריים עבור a,b,c ?

10(6). אם m,n הם מספרים טבעיים, הוכח כי המספרים $2^{2m+1}-1$, 2^n+1 הם זרים, ז.א. שאין להם גורם משותף.

11(6). שמונה הקבוצות $A_1, A_2 \ldots, A_8$ מורכבות כולן מאיברים הנלקחים מבין ארבעה האלמנטים a,b,c,d. נתון כי הקבוצות הן כאלה שלכל שלוש מתוכן יש לפחות איבר אחד משותף. להוכיח כי יש לפחות איבר אחד משותף לכל שמונה הקבוצות.

פתרון בעיות 495-481

מכרך 4, מס' 8

בעיה 481

לפתור את המשוואות

$$x+y+z = 2$$
$$x^3+y^3+z^3 = x^2+y^2+z^2+2$$
$$xyz = -2$$

פתרון

ידוע כי

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-yx-xy)$$

ולכן, במקרה שלנו

$$x^2+y^2+z^2+2=x^3+y^3+z^3$$
$$=3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$
$$=-6+2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

ומכאן $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = 8$

אבל $x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)=(x+y+z)^2 = 4$

ולכן $yz+zx+xy = -1$

מזה ומהמשוואה הראשונה והשלישית, יוצא כי x,y,z הם שרשי המשוואה $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$

דהיינו $(-1, 1, 2)$.

בעיה 482

נתונה הסדרה

$$119, 142, 167, 230, 315, \ldots$$

למצוא את האיבר השישי (הוצא ע"י סרג'יו הכט).

פתרון

אברי הסדרה הם אותם מספרים, הכתובים בבסיסים שונים.

$$119_{10} = 142_9 = 167_8 = 230_7 = 315_6$$

ולכן האיבר הבא בסדרה יהיה 434_5 . (בדוק!)

בעיה 483

הוכח שאין למצוא מספרים טבעיים n, z, y, x , כך ש- $z < n$ ו- $x^n + y^n = z^n$ (מקרה מיוחד מאד של משפט פרמה).

פתרון

ללא הגבלת הכלליות אפשר לבחור $x \geqslant y$.

לכן: $n > z > x \geqslant y$

נגדיר $w = z - x \geqslant 1$ (מדוע?)

ולכן: $y^n = z^n - x^n = (x+w)^n - x^n = nx^{n-1}w + \dots + w^n$

ומכאן $y^n > nx^{n-1}w > x^n w > x^n$

כלומר קבלנו ש: $y^n > x^n$ בניגוד לבחירה ש: $x > y$.

בעיה 484

נתון אוקטואדר משוכלל עם צלע a , ונקודה P כלשהי בפנים האוקטואדר. הוכח כי סכום המרחקים מ- P לשמונה פיאות האוקטואדר קבוע ובלתי תלוי ב- P. לחשב את הסכום.

פתרון

נסמן את הפאות במספרים מ 1 עד 8, ואת מרחק P מהפאה ה-i כ- d_i . ע"י חיבור הנקודה P לקדקדי האוקטאדר נקבל 8 פירמידות, שבסיסן הם פאות האוקטאדר, וקדקדן משותף ב- P. אם שטח הפאה יהיה $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

נפח כל הפירמידות יהיה:

$$V = \sum_{i=1}^{8} \frac{S}{3} d_i = \frac{S}{3} \sum_{i=1}^{8} di$$

ומכאן סכום המרחקים מ- P לפיאות הוא קבוע.

V - נפח האוקטאדר הוא $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ (מדוע?),

ולכן
$$\sum_{i=1}^{8} d_i = \frac{4\sqrt{6}}{3} a$$

בעיה 485

הוכח כי

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ \cdots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

פתרון

$$\frac{[1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)]^2\ (2n+1)}{[2\cdot4\cdots\cdot(2n)]^2} =$$

$$\frac{1\cdot[(1\cdot3)][(3\cdot5)]\dots[(2n-3)(2n-1)]\cdot[(2n-1)(2n+1)]}{[2\cdot4\cdots(2n)]^2}$$

$$= \frac{[(2^2-1)(4^2-1)]\cdots[(2n)^2-1]}{(2)^2\cdot(4)^2\cdots(2n)]^2} < 1$$

ולכן
$$\frac{[1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)]^2(2n+1)}{[2\cdot4\cdots(2n)]^2} < 1$$

$$\frac{[1\cdot3\cdot5\dots\ (2n-1)]^2}{[2\cdot4\dots(2n)]^2} < \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$$

בעיה 486

עבור אלו ערכים ממשיים של m יהוו כל פתרונות המשוואה

$$(m^2-3)\sin^4 x-2(m^2+m+1)\sin^2 x+(m^2+m+2) = 0$$

סדרה חשבונית אחת?

פתרון

נניח של-$\sin x$ יש 4 פתרונות שונים, שכולם באים בחשבון (בין 1 ל- -1). נניח בהתחלה שכולם שונים מ- 1, 0, -1. וכך יש עבור כל $\sin x$ 2 פתרונות בכל מעגל. אם הפתרון הראשון והקטן ביותר הוא α, הפתרון התשיעי יהיה $360 + \alpha$, ואם כולם סדרה חשבונית - הפרשה $45°$, וקל לראות שהפתרונות הם: $22.5°, 67.5°, 112.5°..$. כמו כן: $22.5°, 67.5°$, מתקבלים מפתרונות שונים עבור $\sin x$ (למדייק!) ולכן נקבל:

$$\sin 22.5° \cdot \sin 67.5° = \frac{m^2+m+2}{m^2-3}$$

אין ערך ממשי של m שמקיים זאת.

אם אחד מהפתרונות עבור $\sin^2 x$ הוא 0, קל לראות שהפתרונות הם: $0°, 60°, 120°, 180°$. נשאיר לקורא לבדוק שגם זה לא יתכן עבור כל ערך ממשי שהוא של m. בצורה דומה לא בא בחשבון ש- 1 הוא פתרון של $\sin^2 x$.

עכשיו נניח של- $\sin x$ יש רק 2 פתרונות הבאים בחשבון (בין 1 ל- -1) נבחין ב- 2 מקרים: א) שני הפתרונות שונים מ- 0, 1, -1. ב) אחד הפתרונות הוא 0, או 1.

נשאיר לקורא לבדוק בצורה דומה לזו לעיל שמקרה א) לא יתכן, וכי יתכן מקרה ב), ואז: $\sin^2 x = 1$.

והפתרונות הם: $90°, 270°, 450° \ldots$.

וכי הערך המתאים של m הוא -3.

בעיה 487

הוכח כי, עבור $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כלשהם,

$$2 + \cos(\alpha_1-\alpha_2) + \cos(\alpha_1-\alpha_3) + \cos(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+ \cos(\alpha_2-\alpha_3) + \cos(\alpha_2-\alpha_4) + \cos(\alpha_3-\alpha_4) \geq 0$$

פתרון

ע"י פתיחת הסוגריים ושימוש בנוסחאות טריגונומטרית:

$$0 \leq (\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4)^2+$$
$$+ (\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)^2 =$$
$$2[2+\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_4)+\cos(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+ \cos(\alpha_2-\alpha_4) + \cos(\alpha_3-\alpha_4)]$$

ומכאן

$$2+\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_3)+\cos(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+\cos(\alpha_2+\alpha_3)+\cos(\alpha_2-\alpha_4)+\cos(\alpha_3-\alpha_4) \geq 0$$

בעיה 488

נתון כי הפונקציה

$$f(x) = a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+a_4\cos 4x$$

איננה אף פעם שלילית, הוכח כי $a_1=a_2=a_3=a_4 = 0$.

פתרון

מאחר ש- $f(x) \geq 0$ עבור כל x יוצא כי גם

$$g(x) = f(x) + f(x+\pi) \geq 0$$

עבור כל x, וכמו כן

$$h(x) = g(x)+g(x+\tfrac{\pi}{2}) \geq 0$$

אבל $g(x)=2(a_2\cos2x+a_4\cos4x)$ ו- $h(x)=4a_4\cos4x$
ולא יתכן ש- $a_4\cos4x \geq 0$ עבור כל x אלא אם כן
$a_4 = 0$. מכאן ש-

$$g(x) = 2a_2\cos2x \geq 0$$

עבור כל x , ולכן $a_2=0$. מכאן ש-

$$f(x) = a_1\cos x + a_3\cos3x$$

ולכן

$$0\leq f(x) + f(x+\frac{\pi}{3}) = a_1[\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{3})]$$

$$= 2\sqrt{3}a_1\cos(x+\frac{\pi}{3})$$

ויוצא כי גם $a_1=0$. מכל זה נובע כי $f(x)=a_3\cos3x\geq0$
עבור כל x, ולכן $a_3=0$.

<u>בעיה 489</u>

הוכח כי אין למצוא מספרים חיוביים m,n המקיימים

$$3m^2 - 5n^2 = 25$$

<u>פתרון</u>

נניח שקיימים n,m טבעיים כך ש- $3m^2-5n^2 = 25$
כלומר $\frac{3}{5}m^2 = n^2 + 5$
האגף השמאלי שלם ומכאן ש- m^2 , ולכן גם m
מתחלקים ב 5. כלומר: $m = 5k$, כאשר k טבעי.
ע"י הצבה לשוויון נקבל ש: $\frac{n^2}{5} = 3k^2 - 1$ ומכאן n
מתחלק ב- 5 (למה?)
ניקח $n=5\ell$. ולכן $1 + 5\ell^2 = 3k^2$
באגף השמאלי נקבל מספר שמסתיים ב 1 או 6 (למה?)
כלומר k^2 מסתיים ב 7 או ב- 2. אולם אין מספר טבעי
שריבועו יסתיים ב 7 או ב- 2.

<u>בעיה 490</u>

נתונים מספרים חיוביים
$a_1, a_2, \ldots, a_n$, $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
הוכח כי

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < 1+s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}+\ldots+\frac{s^n}{n},$$

והשוויון יתקיים אך ורק כש- $n=1$.

<u>פתרון</u>

מתוך משפט הממוצעים

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leq \left[\frac{(1+a_1)+(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{n}\right]^n = \left(\frac{n+s}{n}\right)^n = \left(1+\frac{s}{n}\right)^n$$

מתוך משפט הבינום

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$$

ולכן

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \quad \text{(למה?)}$$

השוויון מתקיים רק כאשר $n=1$ ואז גם במשפט הממוצעים נקבל את סימן השוויון. עבור $n>1$ שני האי-שוויונות יהיו חדים.

ומכאן:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leq 1+s+\frac{s^2}{2!}\ldots+\frac{s^n}{n!}$$

והשוויון מתקיים רק כאשר $n=1$.

<u>בעיה 491</u>

S הוא שטח של משולש אשר צלעותיו הן a,b,c . הוכח כי

$$S \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)$$

פתרון

מתוך משפט הירון:

$$S^2 = P(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$$

$$= \frac{1}{16}[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]$$

מתוך

$$(a^2-b^2)^2 + (a^2-c^2)^2 + (b^2-c^2)^2 > 0$$

נקבל ש:

$$3[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4] < (a^2+b^2+c^2)^2$$

ומכאן נובע:

$$S \leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}} (a^2+b^2+c^2)$$

בעיה 492

אם מגדירים $F_n=(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$, הוכח כי F_{15} מתחלק ב- F_3.

פתרון

אם נראה את F_n כפונקציה של x נראה כי, עבור n אי-זוגי, הצבת $-y$ במקום x נותנת את התוצאה אפס. מכאן נובע כי $(x+y)$ הוא גורם של F_n, וכמו כן $(y+z)$ ו- $(z+x)$. אבל F_3 הוא ממעלה 3, ולכן $F_3 = C(x+y)(y+z)(z+x)$ כש- C הוא קבוע. אבל, מאותה סיבה, $(z+x)$, $(y+z)$ ו- $(x+y)$ מחלקים גם את F_{15}, ומכאן המסקנה.

בעיה 493

גוף קמור מסויים הוא כך שכל חתך מישורי שלו הוא מעגל. הוכח כי הגוף הוא כדור.

פתרון

בין כל המיתרים האפשריים נבחר את הגדול ביותר. (אם ישנם כמה שווים נבחר אחד מהקבוצה הזאת). נסמן את קצות המיתר הזה ב- A,B. דרך AB נעביר מישור כלשהו. מתוך הנתון חתוך המישור והגוף יתן מעגל ולכן AB הוא מיתר במעגל.

AB הוא גם קוטר במעגל (למה?). אם נקרא לאמצע המיתר AB כ- O נבחר נקודה P כלשהי על הגוף ונעביר דרך B,A ו- P מישור - נקבל שוב מעגל (כחיתוך של המישור והגוף). מכאן ש: $\overline{OP} = \overline{OB} = \overline{OA}$
כיון ש- P הוא נקודה כלשהי על הגוף, וקבלנו שמרחק נקודה כלשהי אל נקודה קבועה - O בגוף הוא קבוע, ולכן הגוף הוא כדור.

בעיה 494

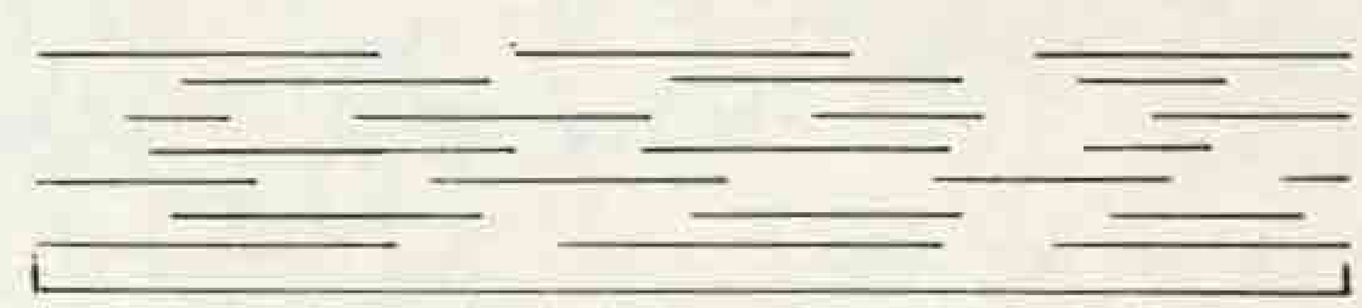
קוים ישרים, במספר סופי, משורטטים על דף ניר ומחלקים אותו למספר סופי של אזורים. הוכח כי ניתן לצבע את ה"מפה" הזאת, בהשתמש בשני צבעים בלבד, כך ששני אזורים בעלי קו גבול משותף יקבלו צבעים שונים.

פתרון

ההוכחה היא באינדוקציה על מספר הקוים. עבור $n=1$ המשפט נכון.

נניח שהמשפט נכון עבור n קוים, ודף הניר נצבע בהתאם

לאמור במשפט. נעביר קו נוסף שיחלק את הדף כך שאפשר יהיה לעבור מצד אחד של הקו לצידו השני רק אם חוצים אותו. נשאיר את מצב הצבעים בצד אחד של הקו כפי שהיה, ובצד השני נהפוך את הצבעים של השטחים. בצד שהצבעים לא שונו, תנאי המשפט המתקיימים לפי הנחה מהצד הקודם. בצד השני נבחין בין שני סוגי משטחים. א׳: משטחים שגבולם אינו הקו החדש. כאן שוב יתקיימו תנאי המשפט מתוך ההנחה (כי רק החלפנו את הצבעים). ב׳: במשטחים שלאורך הקו נקבל כעת צבעים השונים לזה של המשטחים מצדו השני של הקו (כי החלפנו צבעים), ולכן תנאי המשפט יתקיימו גם כאן.



ציור לבעיה 495

בעיה 495

קטע ישר מכוסה כליל ע"י מקלות המונחים עליו. מקלות אלה יכולים להיות בעלי אורכים שונים וגם לחפוף אחד את השני בכל דרך שהיא. הוכח שאפשר לסלק חלק מהמקלות כך שתישאר קבוצה חלקית מהם, שאינם נוגעים אחד בשני, ושמכסים לפחות מחצית הקטע.

פתרון

קל לראות כי במקרה של שלושה מקלות יש חלק משותף אזי אחד מהם מכוסה ע"י שני האחרים (ראה ציור), ולכן נוכל לסלק אותו מבלי לפגוע בכיסוי של הקטע הכללי. נניח כי סלקנו בדרך זו כל מקל שהוא מכוסה ע"י מקלות אחרים, ואז לא יהיו שלושה חופפים זה את זה. אם נספור עכשיו את המקלות משמאל לימין, נראה כי המקלות בעלי מספרים אי-זוגיים לא יכסו אחד את השני, ואותו דבר נכון לגבי המקלות בעלי המספרים הזוגיים. אבל יחד מכסות שתי הקבוצות האלה את כל הקטע, לכן לפחות אחת מהן מכסה לפחות מחצית הקטע.

רשימת פותרי הבעיות
481-495

מכרך 4, מס' 8

1.	אריאלי עמנואל			(3)
2.	בלן יונה	יא'	הריאלי העברי, חיפה	(7)
3.	בן-מזרחי אברהם	יא'	תיכון עירוני ט', תל-אביב	(3)
4.	גלזמן דני	יב'	ביה"ס ע"ש בליך, רמת גן	(21)
5.	גפנר דורון	יא'	"רמות", בת-ים	(38)
6.	גרינפלד זיו	יא'	כצנלסון, כפר סבא	(4)
7.	דואניס בני	יא'	"רמות", בת-ים	(3)
8.	דובינר משה		תל-אביב	(41)
9.	דוד פלורין	יב'	תיכון עירוני א', בת-ים	(40)
10.	הלוי יאיר	יב'	ישיבת נחלים	(26)
11.	הלפמן צבי		קבוץ גבולות	(21)
12.	הרניק אמיר	יא'	תיכון עירוני ד', תל-אביב	(40)
13.	הרשקוביץ נפתלי	יא'	אליאנס, חיפה	(5)
14.	ויסמן דוד	יא'	ביה"ס להנדסאים ע"י אוניברסיטת ת"א	(11)
15.	זיתוני עפר	ד'	הריאלי העברי, חיפה	(3)
16.	ישע יעקב		אוניברסיטת ת"א	(30)
17.	לין אבי		הטכניון, חיפה	(33)
18.	מיזל סער	יב'	ישיבת נתיב מאיר, ירושלים	(52)
19.	נדלקו אלכסנדר	יא'	רמות, בת-ים	(3)
20.	סגל דן	יא'	רמות, בת-ים	(14)
21.	פייברג חיים	יא'	יבנה, חיפה	(7)
22.	פלדמן יוסי	יא'	ברנר, פתח-תקוה	(45)
23.	קמיל ליאור	יב'	תיכון עירוני י', תל-אביב	(11)
24.	קניפל עמוס			(8)
25.	רבר ברכה		צ.ה.ל.	(3)
26.	שוחט חיים			(51)
27.	שור בני	י'	תיכון עירוני ה', תל-אביב	(25)