גליונות מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים

כרך 6 מס' 2
יוצא לאור בחסות
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך י. גליס

גליונות מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים

כרך 6 מס' 2
יוצא לאור בחסות
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך י. גיליס

לפני למעלה מ- 30 שנה יצא לאור בירושלים עיתון בשם "דפים למתמטיקה ולפיסיקה לנוער המתלמד". בין עורכיו היו כמה מתמטיקאים ומחנכים דגולים של התקופה ההיא, מהם אשר כבר אינם אתנו ומהם, לשמחתנו, הממשיכים עד היום ליצור במתמטיקה ולתרום לחינוך. מחברי המאמרים היו בעיקר תלמידים ומדריכים באוניברסיטה העברית (אז האוניברסיטה היחידה בארץ), וישנם ביניהם שהגיעו עם הזמן למקומות מכובדים מאד בעולם המדע. עוד יותר מעניין להסתכל בשמות התלמידים שפתרו את הבעיות בעיתון, כי כמה מהם הגיעו בינתיים לצמרת המדעית, של הארץ ואף של העולם.

מערכת שלמה של החוברות נשמרה אצל פרופ. נ. שרון, ממכון ויצמן שנמנה אז על התלמידים, קוראי העיתון והודות לכך יש לנו עכשיו העתקים מכולן. תודתנו נתונה לפרופ. שרון.

מעצם קריאת החוברות האלה ניתן לשחזר משהו מתקופת הבראשית של המערכת המדעית בארץ. לצערנו אין כאן מקום לניתוח כזה, אבל החלטנו לפרסם מדי פעם בעיתון שלנו מאמרים מהעיתון דאז, בין השאר כדי להעלות את זכרם של מחברי המאמרים.

בגליון זה אנו מביאים מאמר שפרסם י. בר-הלל ז"ל, בקיץ של 1942. ד"ר בר-הלל, אח"כ פרופ. בר-הלל באוניברסיטה העברית, מתמטיקאי ולוגיקאי דגול, היה לתקופה מסויימת עורכו של "דפים למתמטיקה ולפיסיקה". תרומותיו המקצועיות הקנו לו שם מכובד מאד בעולם המדע, ופטירתו לפני כמה חדשים היתה אבידה חמורה לחיים האקדמאיים בארץ. מאמרו מופיע כאן כמעט בצורתו המקורית, פרט לכמה שינויים קלים שנועדו בעיקר להתאים את השפה לסגנון של ימינו.

תוכן הענינים

פתרון גרפי לשאלות הרקה

י. בר-הלל ז"ל

"למוזג שלושה כדים המכילים 8, 5 ו 3 ליטרים. הכד הגדול מלא יין. ברצון המוזג לחלק את היין לשתי כמויות שוות בעזרת הכדים הללו בלבד. כיצד יעשה זאת?"

מי מכם לא נשאל בילדותו שאלה זו ע"י חבר שרצה להראות את חכמתו? ומי לא בילה רבעי שעות בהתרתה ובהתרת שאלות דומות להן? ובכל זאת מסופקני אם עלה בדעתכם לחפש אחרי דרך שיטתית להתרת סוג שאלות זה, שהיו אהובות ביותר על אבות-אבותינו לפני 200 שנה. במאמר זה נציג דרך שיטתית כזאת, בעזרת תיאור גרפי.

ברור כי המוזג יכול לעשות רק שתי פעולות, להריק אחד הכדים עד תומו או למלא אחד הכדים עד תומו; יתכן כמובן שבפעולה אחת גם יריק וגם ימלא. מכיון שהכדים מכילים מספר שלם של ליטרים וכל פעולה מוסיפה או גורעת מספר שלם של ליטרים, מסתבר שבכל כד נמצא תמיד מספר שלם של ליטרים, אם יש בו בכלל משהו. כמו כן נניח שהמוזג לא יאבד בהעברות הללו אף טיפה מן המשקה, כך שתמיד ימצאו בכל הכדים ביחד 8 ליטרים.

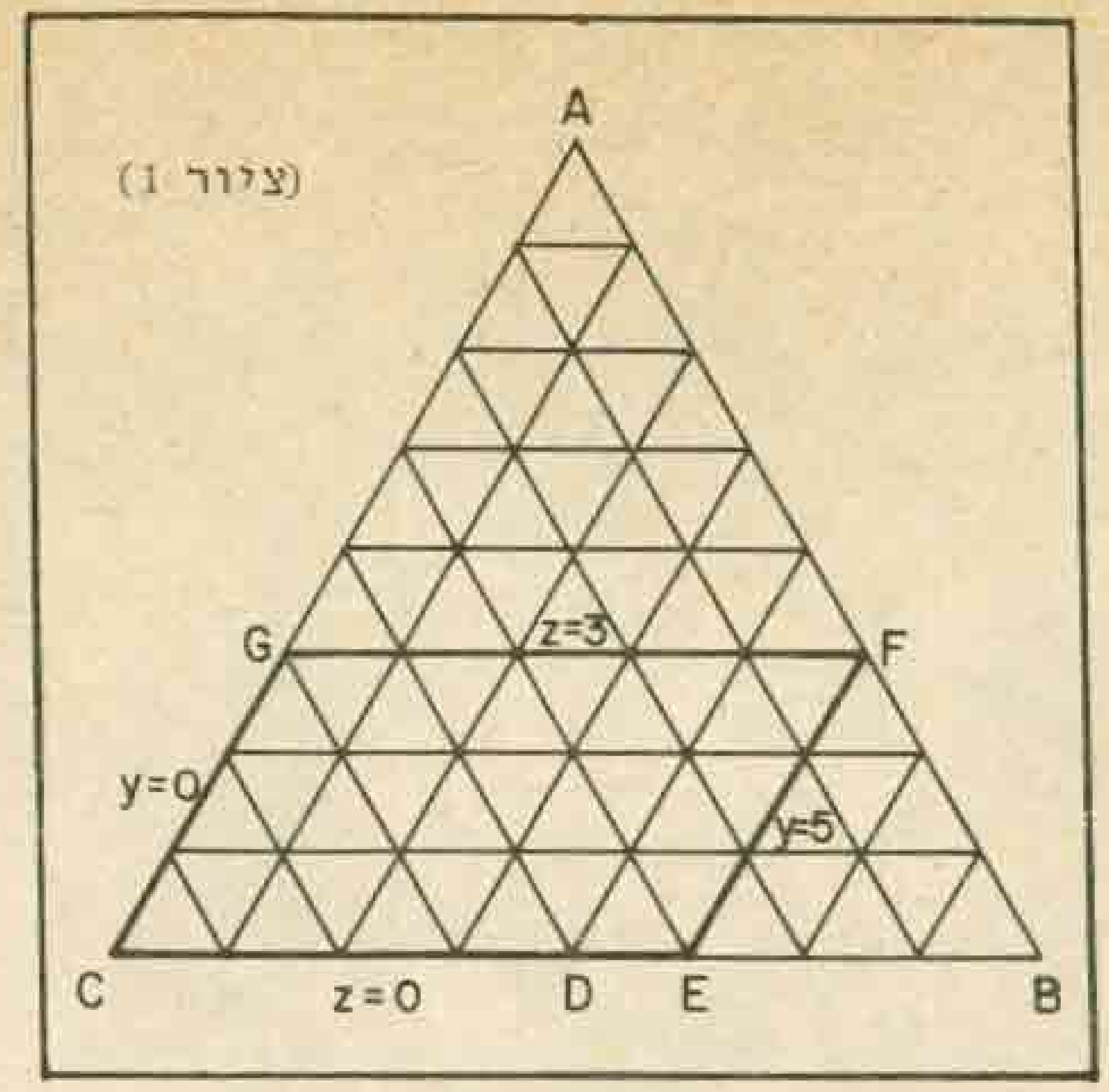
נניח איפוא, כי בכד הגדול ימצאו אחרי פעולה מסוימת x ל', בכד הבינוני y ל', ובקטן z ל' (x,y,z מספרים טבעיים; $0\leq x\leq 8$; $0\leq y<5$; $0\leq z<3$; $x+y+z=8$).

ידוע כי סכום המרחקים של כל נקודה הנמצאת בפנים משולש שוה צלעות או על שפתו מצלעותיו הוא קבוע ושווה לאחד מגבהיו. (נשאיר לקורא להוכיח עובדה זו). ניקח כעת משולש שוה צלעות בעל גובה של 8 יחידות, ונסמן את קדקדיו ב- A,B,C. את המרחקים של נקודה, הנמצאת במשולש, מצלעותיו נקרא בשם "השעורים" שלה, וביתר דיוק נקרא למרחקה מ- AB בשם "שעור ראשון", למרחקה מ- AC בשם "שעור שני" ולמרחקה מ- BC "שעור שלישי".

וכעת עיקר החכמה: כל מצב אפשרי של שלושת הכדים ייוצג ע"י נקודה בפנים המשולש או על שפתו, המצב ההתחלתי (x=8, y=0, z=0) ע"י הקדקד C , המצב המבוקש (x=4, y=4, z=0) ע"י הנקודה ששעורה הראשון הוא 4, שעורה השני 4 ושעורה השלישי 0, ובדרך כלל המצב x,y,z ע"י הנקודה ששעוריה הם x,y,z, ובסדר זה. מובן ששני שעורים בלבד קובעים את הנקודה. כשם שמצבם של שני כדים הוא קבוע מבחינה פיסיקלית, כך קבוע סכום המרחקים מבחינה הנדסית, לפי המשפט הנ"ל. (ראה ציור מס' 1).

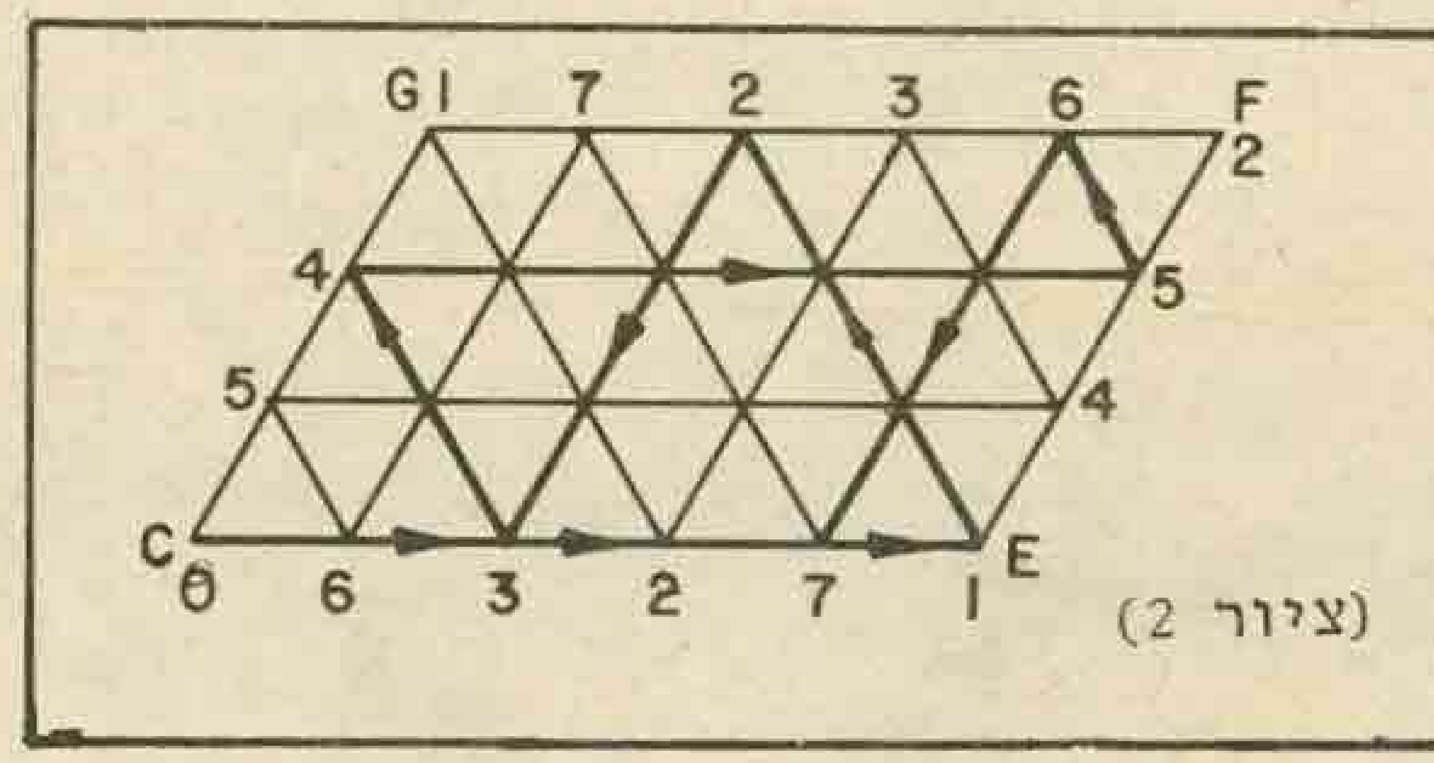
בהתאם לאי-השויונות הנובעים מן הנתונים, מוכרחה כל נקודה מיצגת להימצא בפנים המקבילית CEFG או על שפתה (ברור?). כל פעולה של המוזג משאירה את המצב באחד הכדים ללא שנוי, בו בזמן שהיא מביאה אחד הכדים האחרים למצב גבולי, כלומר ריק לגמרי או מלא לגמרי. פעולה כזאת תיוצג איפוא ע"י תנועת הנקודה המיצגת לאורך ישר מסויים, מקביל לאחת מצלעות המשולש (למה?) עד שפת המקבילית או לאורך אחת מצלעותיה עד אחד מקדקדיה.

כל נקודה (בעלת שעורים שלמים, כי רק נקודות אלה מענינות אותנו) על שפת המקבילית תקבל מספר בהתאם למספר הצעדים הקטן ביותר אשר בהם אפשר להגיע אליה מ- C . כדי לראות זאת יפה, נשרטט לנו את המקבילית CEFG מחדש: הנקודה C תקבל את המספר 0, E ו G את המספר 1, F את המספר 2, אך עוד שתי נקודות על שפת המקבילית תקבלנה אותו מספר, וכך נמשיך, עד אשר כל נקודה על שפת המקבילית תקבל את מספרה. (ראה ציור מס' 2).



(ציור 1)

מתברר כי כל מצב אפשרי ניתן להשגה אחרי 7 פעולות לכל היותר, ובין המצבים הדורשים את המספר המקסימלי של פעולות נמצא דוקא המצב המבוקש שלנו. מתברר כמו כן שישנה רק דרך אחת קצרה ביותר להשגתו. הקו העבה בעל החצים מתאר אותה. את הפתרון המתקבל נוכל לסכם בטבלה הבאה:



(ציור 2)

x	y	z
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

וכעת נסו את כוחכם בהתרת הבעיה הבאה:
למוזג שלושה כדים המכילים 10, 6 ו 5 ליטר. בכל אחד משני הכדים הגדולים נמצאים 6 ל' יין והקטן הוא ריק. המוזג רוצה לחלק את יינו כך שבאחד הכדים יימצאו 5 ל', בשני 4 ל' ובשלישי 3 ל'. האם אפשרי הדבר? ואם כן, האם הוא יכול לבחור באיזה מהכדים יהיו 5 ל', ובאיזה 4, ובאיזה 3? או האם קיימת רק אפשרות אחת?

פתרון משוואות מסדר 3 ו-4

1. אנו מניחים כי כל הקוראים יודעים איך לפתור משוואות ליניאריות וגם ריבועיות. כאן נציג שיטות לפתור גם משוואות מסדר 3 ו- 4.
נתחיל במשוואה מסדר 3 בצורה הפשוטה ביותר, ונראה אח"כ איך ליישם את הפתרון למשוואה הכללית.

2. המשוואה $x^3+px+q=0$

אנו מתבססים על הנוסחה

$$x^3-abx-(a^3+b^3)=[x-(a+b)][x^2+(a+b)x+(a^2-ab+b^2)]$$

ולכן $x=a+b$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה

$$x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$$

מזה נובע כי אם נוכל למצוא a,b כך ש-

$$(1) \qquad 3ab = -p$$

$$(2) \qquad a^3+b^3 = -q$$

יהיה $(a+b)$ פתרון המשוואה.

משתי המשוואות יוצא כי

$$(a^3-b^3)^2 = (a^3+b^3)^2 - 4a^3b^3$$
$$= q^2 - 4(-\frac{p}{3})^3$$
$$= q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

ולכן

$$(3) \qquad a^3-b^3 = \pm(q^2+\frac{4p^3}{27})^{1/2}$$

מ- (2) ו- (3) נובע כי a^3, b^3 הם

$$\frac{1}{2}\{-q\pm(q^2+\frac{4p^3}{27})^{1/2}\}$$

ולכן

$$(4) \qquad x = a+b = \{\frac{1}{2}[-q+(q^2+\frac{4p^3}{27})^{1/2}]\}^{1/3}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[-q-\left(q^2+\frac{4p^3}{27}\right)^{1/2}\right]\right\}^{1/3}$$

מהעובדה כי $a+b$ מקיים את המשוואה, נובע ש- $x-a-b$ מחלק את הנוסחה x^3+px+q. הגורם השני יהיה נוסחה ריבועית, ופתרונותיה הם שני הפתרונות הנוספים של משוואתנו המקורית.

3. <u>המשוואה $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$</u>

אם נציב $y = x + \frac{\alpha}{3}$, $x = y - \frac{\alpha}{3}$

נקבל

$$\left(y-\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(y-\frac{\alpha}{3}\right)^2 + \beta\left(y-\frac{\alpha}{3}\right) + \gamma = 0$$

דהיינו

$$y^3 + y\left(\beta-\frac{\alpha^2}{3}\right) + \left(\gamma-\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{2\alpha^2}{27}\right) = 0 \qquad (5)$$

משוואה זו דומה ל- (1) אם נציב

$$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$$

$$q = \gamma - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{2\alpha^2}{27}$$

עם ההצבה הזאת נקבל, בהתאם ל- (4) ו- (5),

$$x = \left\{\frac{1}{2}\left[-q+\left(q^2+\frac{4p^3}{27}\right)^{1/2}\right]\right\}^{1/3} + \left\{\frac{1}{2}\left[-q-\left(q^2+\frac{4p^3}{27}\right)^{1/2}\right]\right\}^{1/3} - \frac{\alpha}{3} \qquad (6)$$

4. <u>המשוואה הכללית, $ex^3+fx^2+gx+h=0$</u>

כאשר $e=0$, הרי יש בפנינו משוואה ריבועית, שאינה מהווה בעיה. כאשר $e\neq 0$ נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה ב- e ואם נכתוב

$$\alpha = \frac{f}{e}, \quad \beta = \frac{g}{e}, \quad \gamma = \frac{h}{e}$$

נקבל את המשוואה

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

וכבר ראינו איך לפתור אותה.

5. <u>משוואה מסדר 4, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$</u>

נוכל להניח כי $a\neq 0$, כי אחרת זו משוואה מסדר 3 אשר פתרונה כבר למדנו. נחלק איפוא ב- a ונכתוב $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$, $c = \frac{e}{a}$ והמשוואה הופכת ל-

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0 \qquad (7)$$

עכשיו נחפש α,β,λ,μ כך ש-

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s+(\lambda x+\mu)^2 = (x^2+\alpha x+\beta)^2 \qquad (8)$$

אם נמצא כאלה, הרי אז נוכל לכתוב את (7) בצורה

$$(x^2+\alpha x+\beta)^2 = (\lambda x+\mu)^2$$

$$x^2+\alpha x+\beta = \pm(\lambda x+\mu) \qquad (9)$$

דהיינו הפיכת (7) לזוג משוואות ריבועיות.

נכתוב את (8) בצורה

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s+(\lambda^2x^2+2\lambda\mu x+\mu^2)$$
$$=x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

זה דורש

$$\begin{aligned} p &= 2\alpha \\ \lambda^2 + q &= \alpha^2 + 2\beta \\ 2\lambda\mu + r &= 2\alpha\beta \\ \mu^2 + s &= \beta^2 \end{aligned} \qquad (10)$$

(ראה המשך המאמר בעמ' 20 טור 2)

שיטותיו של פרמה

א. רוזנטולר, נתניה

פייר פרמה (Pierre Fermat ,1601-1665), אחד מגאוני המתמטיקה בכל הדורות, היה עורך דין בדרום צרפת אשר מתמטיקה היתה תחביבו. הישגיו היו עצומים, אבל הוא לא פרסם אף ספר מתמטי אחד וגם לא היה מעוניין לפרסם מאמרים בעתונות המתמטית. מה שידוע לנו היום על חידושיו הנפלאים במתמטיקה נלקט מחלופי מכתבים בינו לבין מדענים בני דורו ומהערות קצרות שרשם בשולי ספר דיופאנטס שנמצא אצלו. בדרך כלל לא היה מקום בשוליים האלה גם עבור הוכחות ואמנם ישנן בין הרשימות האלה כמה משפטים וניחושים אשר עד היום לא הצליח אף אחד להוכיח אותם (או להפריכם). נכון כי היו בין ההערות והניחושים שלו גם אחדים אשר הוכחו אח"כ כבלתי נכונים, אבל אלה מהווים מיעוט מבוטל מתוך הכלל.

פעם שלח לו מתמטיקאי אחד את השאלה: "האם המספר 100895598169 הוא ראשוני או פריק (ז"א בלתי ראשוני)?" . באותו יום שלח פרמה מכתב תשובה בזו הלשון: "המספר בעל 12 הספרות הוא פריק כי הוא שווה למכפלת שני המספרים הראשוניים 112303×898423". אבל פרמה לא גילה איך הגיע לפירוק הזה כל כך מהר. ידוע שפרמה התעניין במספרים $F_n = 2^{(2^n)}+1$, הידועים עד היום בשם "מספרי פרמה", והעלה את הניחוש שכולם ראשוניים.

ואמנם עבור $n = 0,1,2,3,4$ אנו מקבלים $F_n = 3,5,17,257,65537$ בהתאמה, אשר כולם ראשוניים. אבל כמאה שנה אחרי זמנו של פרמה הראה אוילר כי

$$F_5 = 4,294,967,297 = 641 \times 6,700,417$$

יש תוהים איך קרה הדבר שפרמה לא הצליח לפרק את F_5, שהוא בעל 10 ספרות, בעוד שהצליח לטפל כל כך מהר במספר בעל 12 ספרות אשר עליו דברנו בהתחלה. אבל אולי מעצם הקושיה הזאת נוכל להסיק משהו לגבי שיטתו של פרמה לבדוק ראשוניות של מספר.

כל קוראינו יודעים בודאי איך לבדוק האם מספר נתון a מתחלק ב- 3,2, או 5 ורובם גם יודעים איך לבדוק התחלקות ב- 11. כדי לקבוע אם a ראשוני מספיק לבדוק האם הוא מתחלק במספר ראשוני p שהוא קטן מ- $\sqrt{a}$. כי אם $a = mn$ לא יוכלו גם m וגם n להיות גדולים מ-$\sqrt{a}$. ניקח לדוגמא את המספר 851.

$$\sqrt{851} = 29,17\ ...$$

ולכן מספיק לבדוק התחלקות במספרים ראשוניים עד 29. אבל ברור מיד כי אין 851 מתחלק ב- 3,2 או 5 ונשאר איפוא רק לבדוק האם הוא מתחלק באחד המספרים 7,11,13,17,19,23,29 דהיינו 7 בדיקות. אבל אם ניקח

$$a = 100895598169$$

נקבל

$$\sqrt{a} = 31740,\ ...$$

מספר המספרים הראשוניים הקטנים מ-$\sqrt{a}$ הוא למעלה מ- 2,500 ואין להעלות על הדעת שפרמה, בלי עזרת מחשב אלקטרוני, בדק את כל המספרים הראשוניים האלה תוך יום אחד. אם כן, איך פתר את הבעיה?

אם a,b הם מספרים אי-זוגיים אזי $\frac{a\pm b}{2}$ הם שניהם שלמים ו-

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

במיוחד, עבור כל N אי-זוגי אנו יכולים לכתוב

$$N = (\frac{N+1}{2})^2 - (\frac{N-1}{2})^2 .$$

כאשר N הוא פריק, נגיד $N = ab$, אזי גם a,b הם בהכרח אי-זוגיים ולכן קיימת הנוסחה:

$$N = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 .$$

מאידך אם עבור N אי-זוגי כלשהו נוכל למצוא מספרים שלמים x,y **כך** ש-

$$N = x^2 - y^2$$

אזי יהיה $N = (x+y)(x-y)$

ואם $x-y>1$ אזי ברור ש-N הוא פריק. לדוגמה, מהעובדה ש- $407 = 204^2-203^2$ לא נוכל להסיק הרבה, אבל מזה ש- $407 = 24^2-13^2$ ניתן להסיק מיד כי

$$407 = (24+13)(24-13) = 37\times 11$$

על סמך שיקולים אלמנטריים כאלה ניסו היסטוריוני המתמטיקה לשחזר את שיטתו של פרמה בחיפושיו אחרי גורמים אפשריים של מספר N. מעלים את האפשרות כי תכנית הפעולה של פרמה היתה משהו כדלקמן:

1. חשב את החלק השלם של $\sqrt{n}$, נגיד r.
2. קח $x = r+1$, ברור ש- $x > \sqrt{n}$.
3. חשב $x^2 - n$. אם הוא יוצא ריבוע משוכלל, ז"א $x^2-N = y^2$, אזי

$$N = x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$$

בדרך כלל ידובר ב-N גדול למדי (כי אחרת הבעיה פשוטה מאוד) ולכן נוכל להיות בטוחים כי במקרה זה $x-y>1$ (למה?). קבלנו איפוא פירוק של N לגורמים (ותוך כדי כך הוכחנו שאיננו ראשוני).

4. אם x^2-N איננו ריבוע משוכלל אזי תגדיל את x ב- 1 ותמשיך לבדוק.

אנו רואים כי הצלחת השיטה תלויה בכך שנגיע לריבוע משוכלל תוך מספר סביר של צעדים. ניקח שתי דוגמאות:

1. $N = 19043$.

$$\sqrt{N} = 137,...$$

ולכן נתחיל מ- $x = 138$.
עכשיו יש לנו $19044 = x^2$, ואילו

$$N = x^2-1 = (x-1)(x+1) = 137\times 139$$

2. $N = 10001$.

$\sqrt{N} = 100,...$ ונתחיל ב- $x=101$

$$101^2-N = 10201-10001 = 200.$$

וזה איננו ריבוע משוכלל. ננסה איפוא $x=102$.

$$102^2 - N = 10404-10001 = 403$$

וגם זה איננו ריבוע משוכלל.

$$103^2 - N = 608$$

$$104^2 - N = 815$$

$$105^2 - N = 1024 = 32^2$$

הגענו אם כך ל-

$$N = 105^2 - 32^2$$
$$= (105-32)(105+32)$$
$$= 37\times73$$

אנו רואים מהדוגמאות האלה שיעילות השיטה, ואפילו עצם הצלחתה, תלויה באפשרות לפרק את N לשני גורמים אשר ההפרש ביניהם אינו גדול מאוד, כי אחרת יהיה מספר הניסויים הדרושים בהפעלת השיטה גדול מדי. למשל אילו רצינו לבדוק לפי שיטה זו את המספר 6341 היינו צריכים להמשיך עד

$$195^2 - 6341 = 178^2$$

כדי להגיע לתוצאה

$$6341 = (195-178)(195+178) = 17\times373.$$

מאחר שהניסוי הראשון הוא ב-

$$80^2 - 6341 = 59$$

פירוש הדבר שהיינו צריכים לנסות 116 ערכים של x. אמנם ניתן לחסוך חלק מהניסויים האלה אם נתחשב בשיקול הבא: הספרה האחרונה של ריבוע משוכלל אינה יכולה להיות 2,3,7, או 8. מכאן שאם אנחנו מחפשים x כך ש- x^2-6341 יהיה ריבוע משוכלל אזי אסור שהספרה האחרונה של x^2 תהיה 3,4,8 או 9. האיסור על 3 ו- 8 מתקיים כאמור מעצמו, אבל מהאיסור על 4 ו- 9 נובע כי הספרה האחרונה x אינה יכולה להיות 2,3,7 או 8.

השיקול הזה חוסך לנו איפוא 40% מהניסויים, אבל נשארים עדיין קרוב ל- 80 ניסויים שנצטרך לבצעם. מאידך אילו היינו תוקפים את הבעיה בשיטה הקלאסית היינו צריכים לבדוק רק את ההתחלקות של 6341 במספרים הראשוניים הקטנים מ- $\sqrt{6341}$, ואלה 23 במספר (למעשה רק 19 אם נוציא מהחשבון 2,3,5,ו-11 אשר לגביהם אפשר לקבוע מיד שאינם מחלקים את 6341). מכל זה יוצא כי במקרה של 6341 השיטה החדשה פחות יעילה בהרבה מהישנה ואין שום תועלת בהפעלתה.

עכשיו נציג שיטה נוספת,דומה מאד לראשונה.

הרעיון הוא לנסות לא רק את המספר N אלא גם כפולות שונות של N . נחפש מכפיל a כך של- aN יהיו זוג גורמים קרובים זה לזה. ברור שאם

$$aN = x^2 - y^2$$
$$= (x+y)(x-y)$$

אזי (x+y) ו-(x-y) הם או שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים, כי הרי ההפרש ביניהם, שהוא 2y,הוא זוגי. מזה נובע ש- aN חייב להיות או אי-זוגי או כפולה של 4. דבר זה יהיה נכון גם לגבי a עצמו מאחר ש-N הוא אי-זוגי, ולכן אין טעם לנסות ערכים כמו 2,6 , וכו' עבור a.

עכשיו ננסה ונקבל עבור N = 10001.

$$3N = 30003 = 174^2-273$$

$$4N = 40004 = 201^2-397$$

$$5N = 50005 = 224^2-171$$

$$7N = 70007 = 265^2-228$$

$$8N = 80008 = 283^2-81$$

$$= 283^2-9^2$$

$$= (283-9)(283+9)$$

$$= 274\times292$$

ולכן

$$N = \frac{274\times292}{8}$$

$$= 137\times73$$

בנקודה זו נוסיף הערה לגבי הדרך להגיע ל-

$$80008 = 283^2-81$$

הדרך הפשוטה ביותר היא לנסות להוציא את שורש המספר בדרך המקובלת ובסוף להוסיף 1.

למשל:

$$\sqrt{80008} = 283$$

	4
48	400
8	384
563	1608
3	1689
	-81

הקורא יבחין שבשלב האחרון לקחנו ספרה גדולה ב-1 מזו שהיינו לוקחים כרגיל בחישוב השורש, ולכן ההפרש האחרון יוצא שלילי, -81.

ניקח עכשיו דוגמא נוספת, 12656.

$$\sqrt{12656} = 113$$

	1
21	26
1	21
22	556
3	669
	-113

ומעצם החישוב מתברר ש-

$$12656 = 113^2-113 = 113\ (113-1)$$

$$= 113\times112$$

הטקטיקה הכללית היא לעבור את כל התהליך של הוצאת שורש (עם הוספת 1 בסוף כפי שהסברנו לעיל). אם קבלנו x^2-aN וראינו שאינו ריבוע משוכלל נוכל לעבור ל- $(x+1)^2-aN$ ע"י הוספה פשוטה של $2x+1$. ואם גם זה אינו מועיל נמשיך ל- $(x+2)^2-aN$ ע"י הוספת $2(x+1)+1$, דהיינו $2x+3$. לפעמים, תוך כדי הוצאת השורש נתקלים בהפתעה נעימה, כמו זו שקרתה זה עכשיו עם 12656, ואז מקבלים את הפירוק מיד. ניגש עכשיו לבעיה של פרמה. אם ננסה את הכופלים השונים לפי הסדר לא יקרה מאומה עד שנגיע ל- $a=8$.

$$8N = 807164785352$$

כשמוציאים את השורש של זה האחרון מקבלים:

$$\sqrt{807164785352} = 898424$$

	64
69	1671
9	1521
1788	15064
8	14304

76078	17964
71856	4
422253	179682
359364	2
6288952	1796844
7187376	4
-898424	

ומכאן ש-

$$8N = (898424)^2 - 898424$$
$$= (898424)(898424-1)$$
$$= 898424\times898423$$

ולכן

$$N = 112303\times898423$$

עכשיו נוכל לראות למה לא יכלו השיטות האלה לטפל במספר

$$F_5 = 4{,}294{,}967{,}297 = 641\times6700417$$

כי ההפרש בין שני הגורמים הוא כה גדול עד שאין תקוה למצוא x,y כך ש- $F_5 = x^2-y^2$, תוך זמן סביר בכלל. מאידך אם ננסה להקל את הבעיה ע"י כפל, נצטרך להשתמש ב- a מסדר גודל $\frac{6700417}{641}$ שזה למעלה מ-10,000. מובן כי כאשר יודעים את הפירוק אפשר לקפוץ ישר ל-a כזה. אבל פרמה לא ידע את התשובה ולכן היה צריך, כדי להפיק תועלת מהשיטה, לנסות כל a לפי התור אחד, אחד, דהיינו יותר מ- 10,000 ניסויים.

ניתן איפוא להסביר גם את הצלחתו המזהירה של פרמה עם המספר שהוצע לו במכתב וגם את כשלונו ב- F_5 אם נניח ששיטת עבודתו היתה זו שתוארה לעיל, או לפחות דומה לה באופן עקרוני. מובן שאין זה מוכיח שזו היתה באמת שיטתו אבל יש לנו לפחות יסוד לנחש שכך היה הדבר.

בעיה במשולש

I. הבעיה ופתרונה

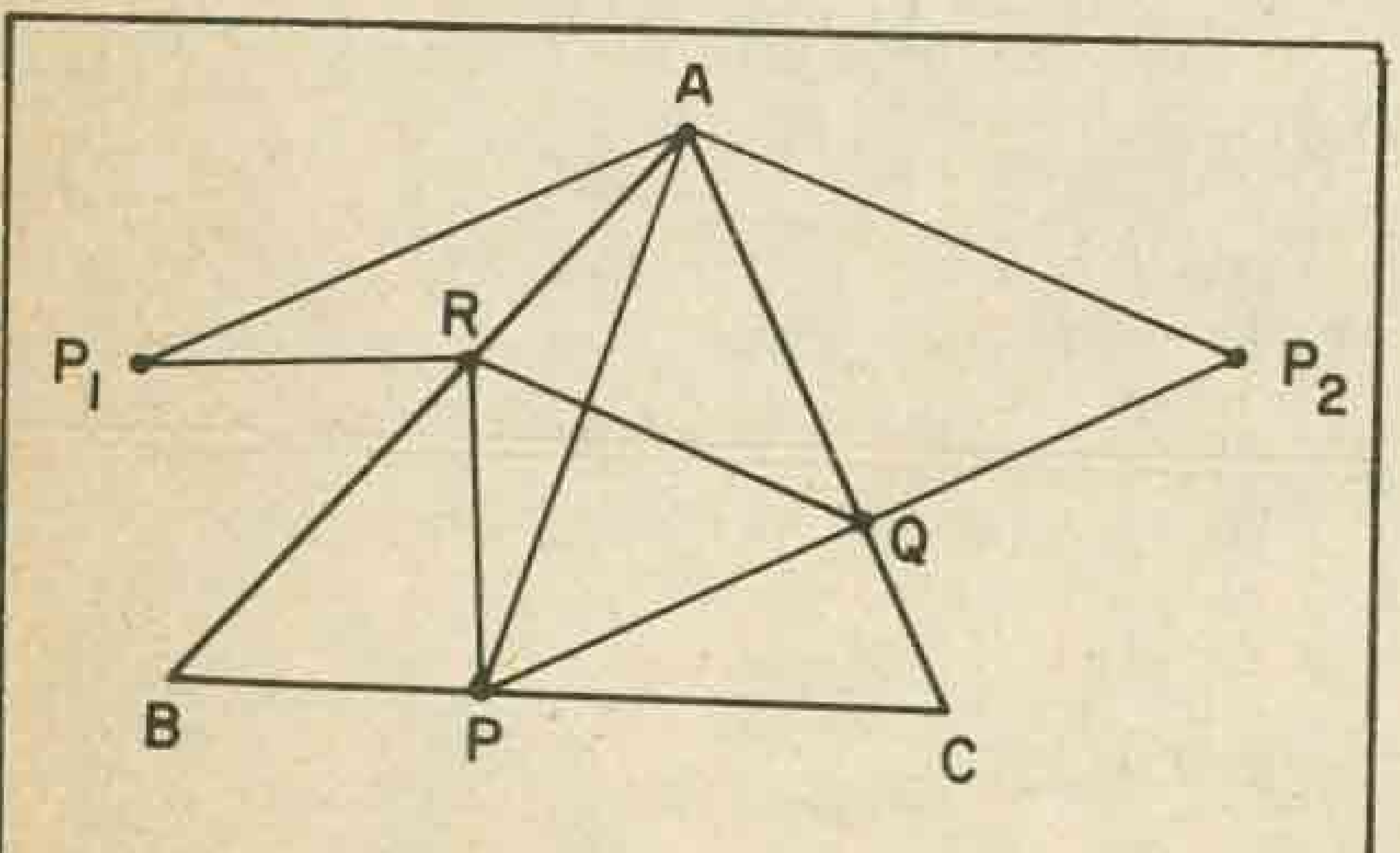
יהיה נתון משולש ABC. אנחנו רוצים לקבוע נקודות P,Q,R על הצלעות AB, CA, BC בהתאמה כך שהיקף המשולש PQR יהיה קטן ככל האפשר. בעיה זו הוצעה כבר במאה ה- 18 ובאה על פתרונה במאה ה- 19 כאשר הוכח כי הסכום PQ+QR+RP יהיה מינימלי כאשר P,Q,R הם רגלי הגבהים מ- A,B,C בהתאמה.
אבל כל ההוכחות של עובדה זאת היו מסובכות למדי, עד שבמאה הנוכחית מצא המתמטיקאי ההונגרי ל. פייר (L. FEJER) הוכחה פשוטה ואלגנטית.

ההוכחה של פייר בנויה משני שלבים:

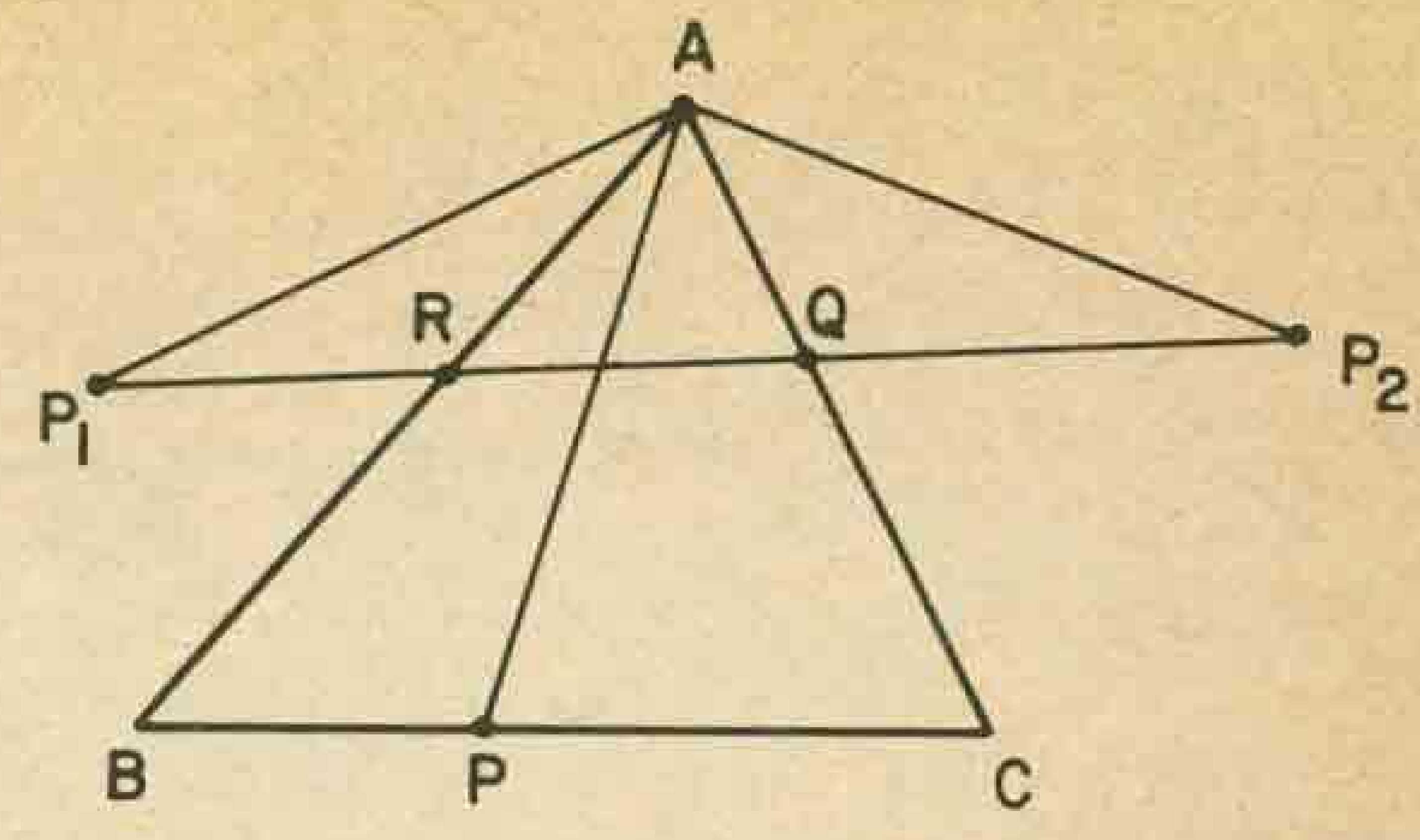
א) כאשר P נקודה נתונה כלשהי על הצלע BC, לקבע Q,R על AB, AC בהתאמה כך שהיקף המשולש PQR יהיה קטן ככל האפשר.

בניה

נשקף את הישר AP ב- AC , AB ונקבל AP_2, AP_1 בהתאמה (ציור 1)



ציור 1.



ציור 2.

ברור כי

$$AP_1 = AP_2 = AP$$

$$\sphericalangle BAP_1 = \sphericalangle BAP$$

$$\sphericalangle CAP_2 = \sphericalangle CAP$$

עכשיו יהיו Q,R נקודות כלשהן על AB, AC בהתאמה קל להוכיח כי $RP = P_1R$, $PQ = QP_2$ ולכן

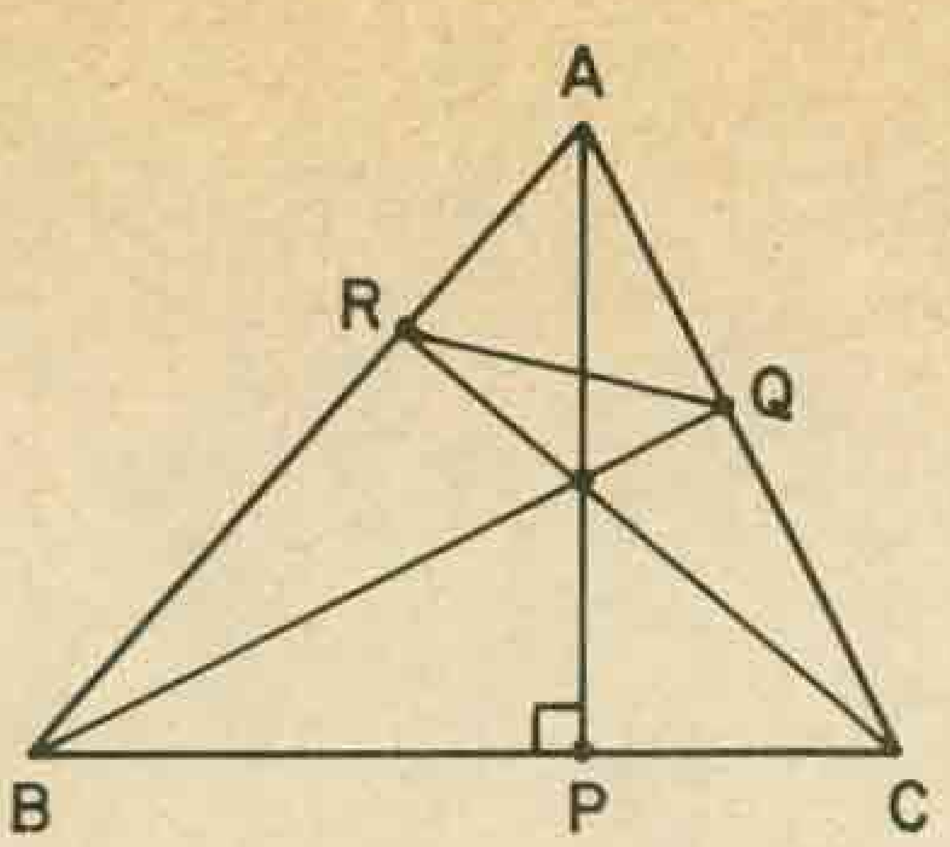
$$PQ + QR + RP = P_2Q + QR + RP_1$$

אבל מקומם של P_2, P_1 אינו תלוי ב- Q,R ולכן הסכום האחרון יהיה קטן ככל האפשר כאשר P_1,R,Q,P_2 נמצאים על קו ישר. הנה איפוא הבניה הדרושה:

1. שקף את P ב AB,AC ותקבל P_1,P_2 בהתאמה.
2. חבר את הישר P_1P_2. הוא יפגוש את AB ב- R ואת AC ב- Q. (ראה ציור 2)

ב) ראינו איפוא איך להתאים לכל P קבוע על BC את Q ו- R כך שהיקף המשולש PQR יהיה מינימלי, וכי מינימום זה שווה לקטע P_1P_2.

כדי לפתור את הבעיה המקורית עלינו לקבוע את P כך ש- P_1P_2 יהיה קטן ככל האפשר. אבל ברור כי $\sphericalangle P_1AP_2 = 2\sphericalangle BAC$ (למה?) ובמיוחד אינו תלוי ב- P . מאידך $AP_1 = AP_2$. יוצא כי AP_1P_2 הוא משולש שווה שוקיים בעל זוית קדקדית נתונה. הבסיס P_1P_2 יהיה איפוא קטן ככל שהשוק AP_1 תהיה קטנה. אבל $AP_1=AP$ ולכן יש לקבוע את P כך ש- AP יהיה קטן ככל האפשר, דהיינו כאשר AP ניצב ל- BC .



ציור 3.

מההוכחה הזאת נובע שאם 'P נקודה כלשהי על BC כך שאין 'AP ניצב ל-BC אזי עבור כל 'R, 'Q על AC, AB יהיה

$$P'Q' + Q'R' + R'P' > PQ + QR + RP$$

אבל ברור כי דבר דומה חייב להיות נכון גם עבור Q,R ולכן המשולש החסום בעל ההיקף המינימלי הוא PQR, כאשר P,Q,R הם רגלי הגבהים של ABC.

II. כמה מסקנות

א) מעצם ההוכחה נובע, שאם P הוא גובה של משולש ABC; P_1,P_2 הם השיקופים של P ב-AC, AB בהתאמה; ו- P_1P_2 פוגש את AC, AB ב- R,Q בהתאמה; אזי גם BQ ו- CR הם גבוהים של המשולש.

ב) נסמן את אורכי הצלעות BC,CA,AB ב- a,b,c בהתאמה, ואת זויות המשולש A,B,C ב- α,β,γ בהתאמה. קל לראות שהמשולשים AQR, ABC דומים (למה?) ולכן

$$\frac{QR}{BC} = \frac{AQ}{AB} = \cos\alpha$$

ומכאן $QR = a\cos\alpha$

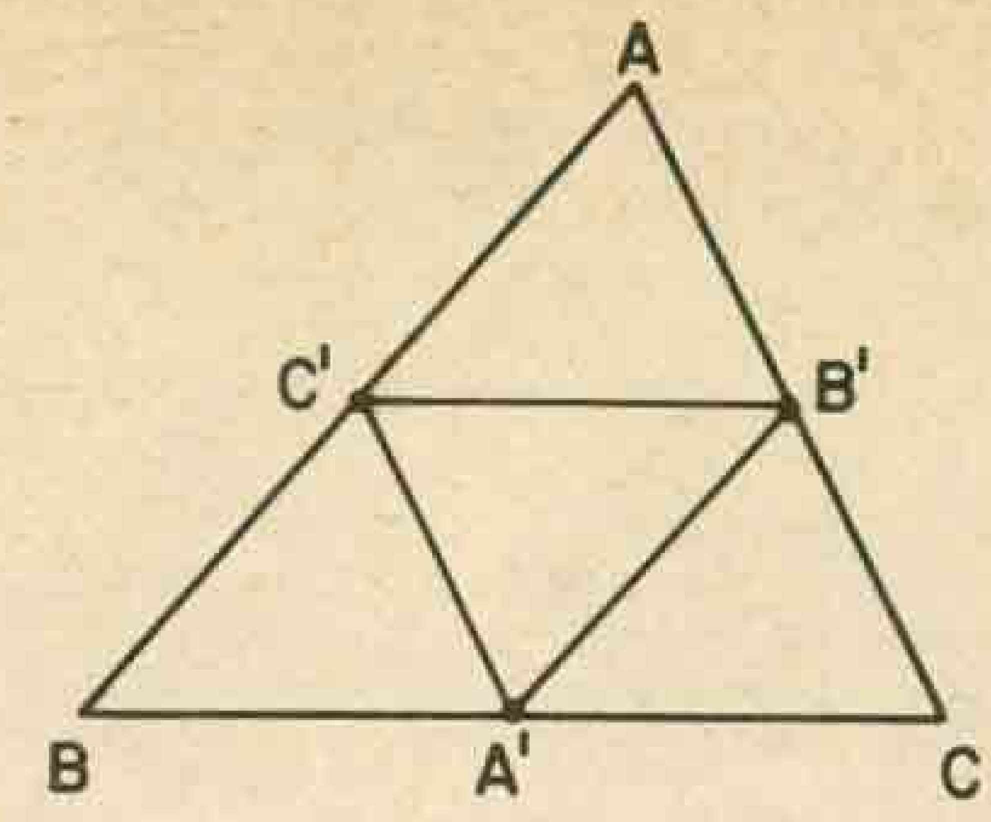
כמו כן $RP = b\cos\beta$, $PQ = c\cos\gamma$. (ראה ציור 3)

מאידך אם 'A','B','C הם אמצעי הצלעות BC,CA,AB (ראה ציור 4) אזי $B'C' = \frac{1}{2}a$, $C'A' = \frac{1}{2}b$, $A'B' = \frac{1}{2}c$.

מהתכונה שהוכחנו עבור PQR נובע איפוא ש-

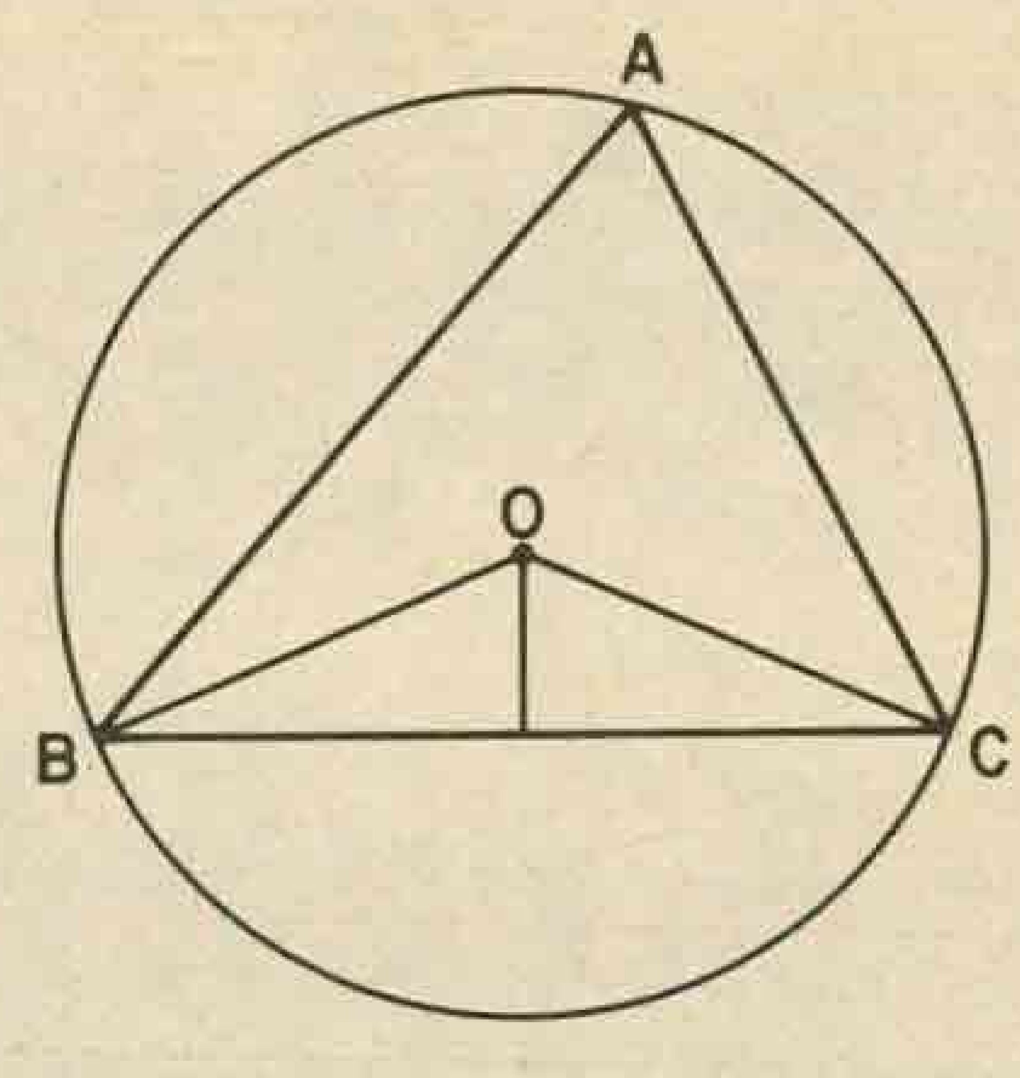
$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \le \frac{1}{2}(a+b+c) \qquad (1)$$

ושויון יתקיים רק במקרה ש- 'A','B','C מתלכדים עם P,Q,R , דהיינו כאשר ABC הוא שווה צלעות.



ציור 4.

ג) יהיה O מרכז המעגל החוסם את ABC ו-R הרדיוס שלו. אזי $OB = OC = R$ ו-$\measuredangle BOC = 2\alpha$ (למה?) (ציור 5)



ציור 5 .

יוצא כי $S_{OBC} = \frac{1}{2}aR\cos\alpha$.

מאחר שנוסחאות דומות קיימות גם עבור S_{OCA}, S_{OC}

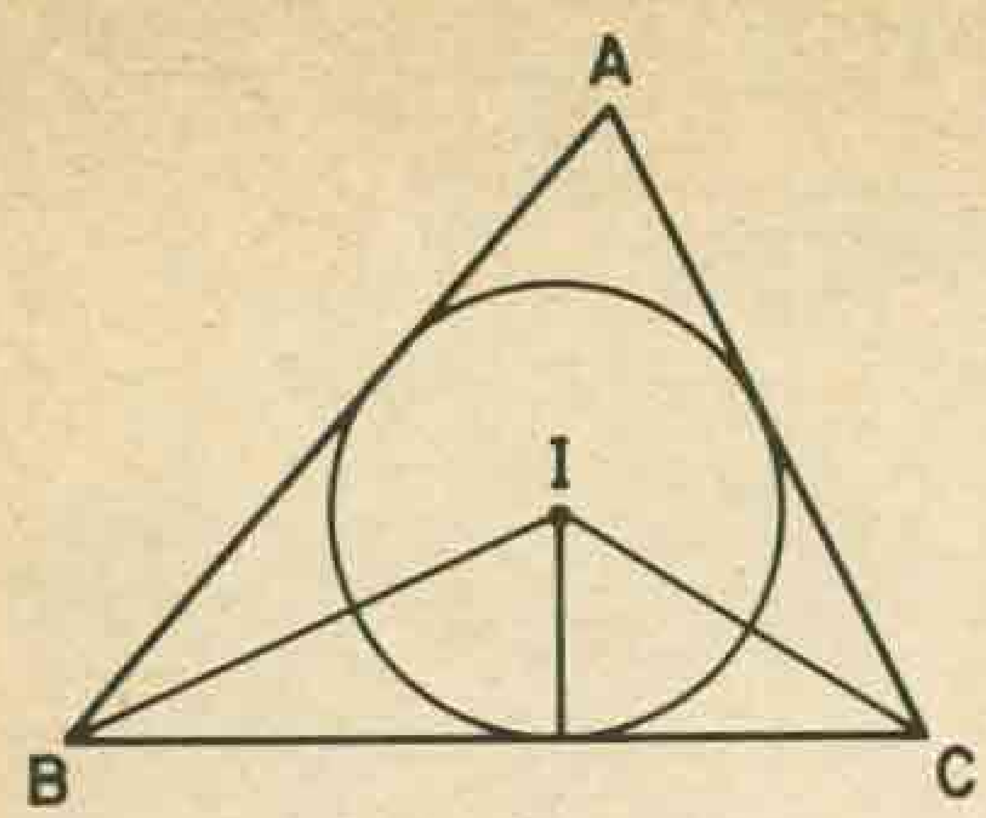
יוצא כי

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) \qquad (2)$$

מאידך יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש ABC ו-r הרדיוס שלו. (ראה ציור 6)

ברור כי

$$S_{IBC} = \frac{1}{2}ar$$



ציור 6.

וכו', ולכן

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r(a+b+c) \qquad (3)$$

מ- (2) ו- (3) נובע כי

$$\frac{R}{r} = \frac{a+b+c}{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}$$

$$\geqslant 2$$

לפי (1). הוכחנו איפוא כי עבור משולש כלשהו

$$R \geqslant 2r$$

עם שויון רק עבור משולש שווה צלעות.

שאלה

שכני סיפר כי זו שנה שלמה כאשר הוא יוצא מהבית בבקר, האיש הראשון שהוא רואה הוא בעל מספר רגלים יותר מהממוצע. האם אני יכול להאמין לו?

(תשובה בעמוד 15).

משפט הממוצעים וייעול המכבסה

1. משפט הממוצעים

יהיה n מספר טבעי ו- $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מספרים חיוביים. אם נגדיר את הממוצע החשבוני

$$A=\frac{1}{n}(x_1+x_2\ldots x_n)$$

ואת הממוצע ההנדסי

$$G=(x_1,x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

אזי

$$A\geqslant G$$

ושויון יתקיים רק כאשר $x_1=x_2\ldots=x_n$.

ברור שבמקרה האחרון יהיו גם A וגם G שווים לערכם המשותף של ה- x_i. משפט זה ידוע בודאי לכל קוראינו וניתן להוכיחו בעשרות דרכים שונות.

מטרתנו העיקרית כאן היא להסיק ממנו כמה רעיונות לגבי ייעול תהליכי כביסה (!), אבל נתחיל בהצגת אחת ההוכחות הפשוטות ביותר של המשפט עצמו.

הוכחה

כאשר $x_1=x_2\ldots=x_n$, ראינו כבר כי כולם שווים גם ל- A וגם ל- G ולכן A = G. אחרת יהיה לפחות אחד האיברים גדול מ- A ולפחות אחד קטן ממנו. נניח כי $x_1>A>x_2$

עכשיו ניקח, במקום הקבוצה המקורית, את הקבוצה

$$A,\ x_1+x_2-A,x_3,x_4,\ldots,x_n$$

ברור כי הסכום של הקבוצה החדשה שווה לסכום המקורי ולכן לא ישתנה גם הממוצע החשבוני. מאידך קל לראות כי

$$A(x_1+x_2-A)-x_1x_2=(x_1-A)A-x_2)\geqslant 0$$

ולכן

$$A(x_1+x_2-A)\geqslant x_1x_2$$

ואילו האיברים $x_3,x_4,\ldots,x_n$ לא השתנו. מכאן נובע שהממוצע ההנדסי של הקבוצה החדשה גדול מזה של הקבוצה המקורית.

נוכל להמשיך בדרך זו, כאשר בכל שלב אנחנו מגדילים את הממוצע ההנדסי בלי לפגוע בממוצע החשבוני עד שנגיע לקבוצה אשר כל איבריה שווים ל- A . אבל גם הממוצע ההנדסי יהיה אז שווה ל- A , ומכאן שזה של הקבוצה המקורית היה קטן מ- A , ז.א. G < A.

2. יישום המשפט ליעול במכבסה

נדון כאן רק בשלב אחד של תהליך הכביסה, והוא שטיפת הדטרגנט מהבגדים אחרי שכובסו. ברגע זה הבגדים רוויים מים המכילים גם חומרי נקוי. התהליך הרגיל הוא להכניס את הבגדים למים נקיים ולסובבם שם עד שהדטרגנט מתחלק במידה פחות או יותר שווה בין המים שבבגדים לבין המים שמסביבם. כתוצאה מכך יורדת כמות הדטרגנט בבגדים לרמה נסבלת ומותר למסור אותם ללבוש.

נניח כי בבגדים הרוויים נמצאים α ליטר של מים וכי הוספנו למטרת שטיפה β ליטר. גם נניח כי כמות הדטרגנט בבגדים לפני השטיפה היתה M גרם. כתוצאה מהשטיפה יתחלק החומר הזה בין המים שבבגדים לבין המים הסביבתיים והכמות שתישאר בבגדים תהיה איפוא $\frac{M\alpha}{\alpha+\beta}$ גרי. נניח כי הכמות המירבית של הדטרגנט

שאנחנו מוכנים לסבול בבגדים בתום הכביסה היא m גר'.
דרוש איפוא כי

$$\frac{M\alpha}{\alpha+\beta} \leqslant m \qquad (1)$$

דהיינו

$$\frac{M}{m} \leqslant \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \qquad (2)$$

ולכן

$$\frac{\beta}{\alpha} \geqslant \frac{M}{m} - 1 \qquad (3)$$

המשוואה (3) קובעת כמה מים דרושים להשיג רמה רצויה של שטיפה. אבל למעשה, בהתבסס על משפט הממוצעים, נוכל לחסוך חלק גדול מהמים האלה.

מה יהיה אם במקום שטיפה חד-פעמית נעשה את הפעולה ב- n שלבים, כאשר בשלב ראשון נשתמש ב-β_1 ליטר מים, בשלב שני ב- β_2 ליטר וכו'?

בגמר השלב הראשון תהיה כמות הדטרגנט בבגדים $\frac{M\alpha}{\alpha+\beta_1}$
בגמר השלב השני $\frac{M\alpha}{\alpha+\beta_1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta_2}$ וכו' ואחרי השלב הסופי היא תהיה

$$\frac{M\alpha^n}{(\alpha+\beta_1)(\alpha+\beta_2)\ldots(\alpha+\beta_n)}$$

הדרישה היא איפוא כי

$$\frac{M\alpha^n}{(\alpha+\beta_1)(\alpha+\beta_2)\ldots(\alpha+\beta_n)} \leqslant m \qquad (4)$$

ז.א.

$$(\alpha+\beta_1)(\alpha+\beta_2)\ldots(\alpha+\beta_n) \geqslant \frac{M}{m}\alpha^n \qquad (5)$$

מאידך כמות המים שתידרש תהיה $(\beta_1+\beta_2\ldots+\beta_n)$ ליטר.

אם כן עלינו למצוא בין כל הקבוצות $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ המקיימות את (5), זו אשר סכום איבריה הקטן ביותר. רואים מיד כי עבור הקבוצה האופטימלית הזאת יתקיים שוויון ב- (5), כי אחרת היינו יכולים להקטין אחד מהאיברים, נגיד β_1 עוד יותר בלי לפגוע בקיום התנאים. לכן נוכל לנסח את הבעיה כדלקמן:

עבור M,m,α,n נתונים למצוא מספרים חיוביים $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ כך ש-

$$(\alpha+\beta_1)(\alpha+\beta_2)\ldots(\alpha+\beta_n) = \frac{M\alpha^n}{m} \qquad (6)$$

ואילו $\beta_1+\beta_2\ldots+\beta_n$ קטן ככל היותר.

אם נגדיר

$$A = \frac{1}{n}(x_1+x_2\ldots x_n), \quad (i=1,2,\ldots,n), \quad x_i=\alpha+\beta_i,$$

$$G=(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}$$

נראה כי

$$G=\alpha\left(\frac{M}{m}\right)^{1/n}$$

ולכן הוא קבוע, ואילו

$$A = \alpha + \frac{1}{n}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)$$

יוצא כי הסכום יהיה מינימלי כאשר A הוא מינימלי. אבל, לפי משפט הממוצעים $A \geqslant G$, ושווה לו רק כאשר $\beta_1=\beta_2\ldots=\beta_n$. יהיה γ ערכם המשותף. מ- (6) נובע כי

$$(\alpha+\gamma)^n = \frac{M\alpha^n}{m}$$

ולכן

$$\gamma = \left[\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]\alpha \qquad (7)$$

הכמות הכללית של מים תהיה

$$\beta_1+\beta_2...+\beta_n = n\gamma = n\alpha[(\frac{M}{m})^{\frac{1}{n}} - 1] \qquad (8)$$

השיקולים האלה מובילים לחסכון ניכר מאד בצריכת המים בשטיפת כביסה. נניח למשל כי $\frac{m}{M}=0,01$, ז.א. שאנחנו רוצים להוציא בשטיפה 99% מהדטרגנטים שהוכנסו לבגדים לשם כביסה. נכתוב $\alpha=1$, ז.א. שאנו לוקחים כיחידה של מים את הכמות הספוגה בבגדים הרוויים. כדי להשיג את השטיפה בפעולה אחת יידרשו, לפי (3), 99 יחידות של מים. מאידך אם נעשה את זה בשני שלבים יהיה, לפי (7),

$$\gamma = \sqrt{99} - 1 = 8.95$$

וכמות המים הדרושים תהיה 2γ, דהיינו 19.9. אם נעשה ב- 3 שלבים יידרשו

$$3[(99)^{\frac{1}{3}} - 1]$$

דהיינו 10.88 , ואילו ב- 4 שלבים 8.62.

בסיכום אנו רואים כי שיטת השטיפה בשלבים חוסכת חלק גדול מהמים הדרושים לשטיפה, וממשפט הממוצעים נובע שהחסכון יהיה מירבי אם נדאג להשתמש בכל שלב באותה כמות מים. מכונות כביסה מודרניות פועלות למעשה לפי העקרון הזה והן מבצעות את השטיפה בכמה שלבים.

בעיות חדשות

הפותרים מתבקשים להקפיד על התנאים הבאים:

1) לכתוב בצורה ברורה (או להדפיס).
2) להשתמש רק בצד אחד של הדף, ולהתחיל כל בעיה בדף חדש.
3) למלא את הטופס המצורף לחוברת זו ולהחזירו למערכת יחד עם הפתרונות לא יאוחר מ- 29.2.76.
4) לסמן את המעטפה "פתרונות", ולא להכניס בה כל חומר אחר.

המספר בסוגריים אחרי מספר כל שאלה הוא מספר נקודות זכות שיוענקו בעד פתרון מלא ומדוייק של השאלה.

1. (2) הוכח כי עבור x,y,z חיוביים,

$$(x+y+z)^{x+y+z} \geq x^x \cdot y^y \cdot z^z$$

האם יתכן שוויון, ובאיזה תנאים?

2. (2) C',B',A' הם אמצעי הצלעות BC,CA,AB בהתאמה של משולש ABC. הוכח כי, עבור כל נקודה P,

$$PA^2+PB^2+PC^2 > PA'^2+PB'^2+PC'^2$$

3. (3) P,Q,R הן נקודות כלשהן בצלעות AB, CA, BC בהתאמה של משולש ABC. הקוים הישרים AP, QR נפגשים ב- S. הוכח כי

$$\frac{SR}{SQ} = \frac{AB}{AQ} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{AC}{AB}$$

4. (3) הוכח כי למשוואה $6^x=x^2-2x$ אין פתרונות רציונליים. (הוצע ע"י עדין רון).

5.(3) למצוא מספר חיובי x כך ש-

$$\text{arcctg}\,x - \text{arcctg}(x+2) = 15°$$

6.(3) הוכח שאם $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$, אזי גם

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$$

7.(3) הוכח כי $217^{216}+216^{217}$ אינו ריבוע משוכלל.

8.(4) למצוא את כל המספרים הממשיים x המקיימים

$$|x| \geqslant [x]$$

$$\{\tfrac{1}{x}\} \geqslant \frac{x}{4x-3}$$

[עבור כל x ממשי מסמן $|x|$ את ערכו המוחלט של x, $[x]$ את המספר השלם הגדול ביותר שאינו עולה על x , ו- $\{x\} = x-[x]$.
לדוגמה $\{2.1\} = 0.1$,$[2.1] = 2$,$|2.1| = 2.1$
ואילו $\{-2.1\} = 0.9$,$[-2.1] = -3$,
$|-2.1| = 2.1$.]

(הוצע ע"י עדין רון)

9.(4) אם המספר העשרוני $\underbrace{100\ldots01}_{n \text{ ספרות}}$ ראשוני אזי $\log_2(n-1)$ מספר טבעי. (הוצע ע"י עדין רון).

10.(6) אם A מסמן קבוצה כלשהי של מספרים ממשיים, נגיד $A = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, אזי נסמן ב-$T(A)$ את הקבוצה $(|a_1-a_2|, |a_2-a_3|, \ldots\ldots, |a_{n-1}-a_n|, |a_n-a_1|)$.

אם חוזרים ועושים אותה פעולה על הקבוצה $T(A)$ מקבלים קבוצה חדשה, שאותה נסמן ב $T^2(A)$, וכו', הוכח כי אם $n = 4$ ו-a_1,a_2,a_3,a_4 הם מספרים שלמים אזי, עבור k מספיק גדול תהיה הקבוצה $T^k(A)$ $(0,0,0,0)$.
האם נכון משפט דומה עבור $n = 3$?

תשובה לשאלה שבעמוד 11

בודאי תוכל להאמין לו. ישנם אנשים בעלי שתי רגלים, בעלי רגל אחת, ואפילו בלי רגלים בכלל. עוד טרם נשמע על איש בעל יותר משתי רגלים. בלי לדעת את הערך המדויק של הממוצע ניתן להגיד בודאות שהוא פחות מ- 2.

פתרון בעיות מכרך 6, מס' 1

1. (2) הוכח כי עבור כל n שלם, בלתי זוגי וגדול מ- 1,

$$2^{n-1}(2^n-1) - 1$$

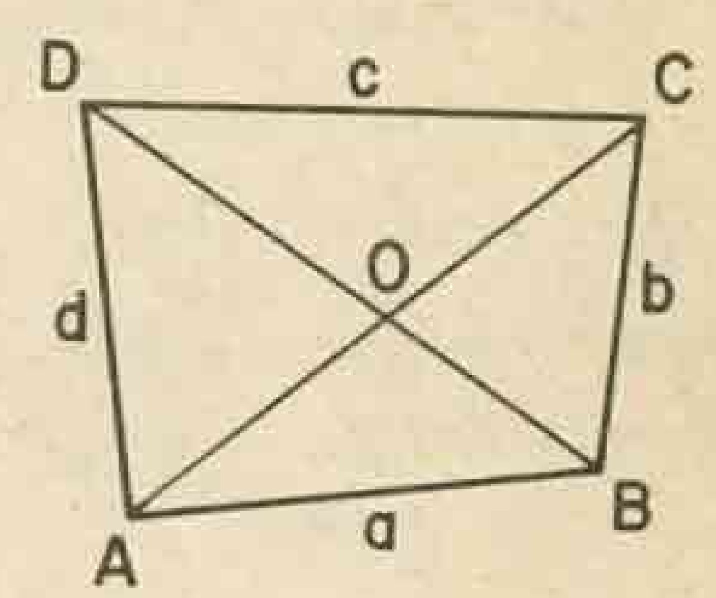
מתחלק ב- 9.

פתרון

מאחר ש- $2^6=64\equiv1 \pmod 9$, מספיק לבדוק את התוצאה עבור $n<6$, דהיינו $n=1,3,5$.

2. (3) האלכסונים AC, BD של המרובע ABCD נפגשים ב- O ונתון כי $AO=OC$ ו- $BC+CD=AB+AD$. הוכח כי ABCD הוא או מקבילית או דלתון (ראה ציור).

פתרון



שאלה 2.

נסמן $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ ו $BD=x$. מאחר ש-$AO=OC$ יוצא כי $S_{ABD}=S_{BCD}$ (למהי?) ולכן, מתוך נוסחת הירון

$$(a+d+x)(-a+d+x)(a-d+x)(a+d-x)$$
$$= (b+c+x)(-b+c+x)(b-c+x)(b+c-x)$$

אבל נתון ש- $a+d=b+c$ ולכן

$$(x-a+d)(x+a-d) = (x-b+c)(x+b-c)$$

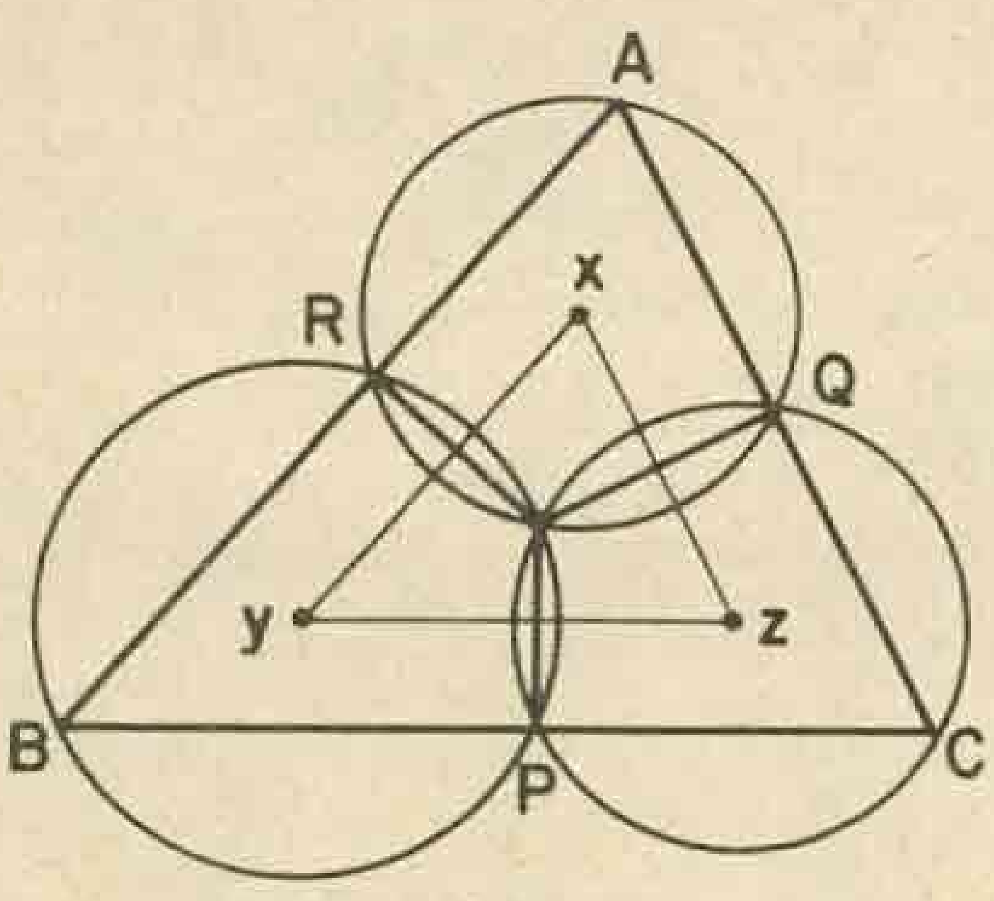
דהיינו $x^2-(a-d)^2 = x^2-(b-c)^2$

ולכן $a-d = \pm(b-c)$

אבל $a+d = b+c$

ולכן <u>או</u> $a-d = b-c$, ומכאן $c=d$, $a=b$, דהיינו דלתון,
<u>או</u> $a-d=c-b$ ולכן $a=c$, $b=d$, דהיינו מקבילית.

3. (3) הנקודות P,Q,R נמצאות על הצלעות BC,CA,AB בהתאמה של משולש A,B,C.
X,Y,Z הם מרכזי המעגלים AQR, BRP, CPQ בהתאמה. הוכח כי המשולש XYZ דומה ל-ABC.



שאלה 3.

פתרון

נניח כי המעגלים BPR, CPQ נפגשים ב- O. יש לנו

$$\measuredangle BRO = \measuredangle CPO$$
$$= \measuredangle AQO$$

ולכן הנקודות A,Q,R,O נמצאות על מעגל אחד, ז.א. שגם המעגל AQR עובר דרך O.

ברור ש- YZ, ZX, XY ניצבים ל- OP, OQ, OR בהתאמה

$$\measuredangle YXZ = 180^\circ - \measuredangle QOR$$
$$= \measuredangle BAC$$

4. (3) α,β,γ הם זויות של משולש. הוכח כי

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \sqrt{3}\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

באילו תנאים יתקיים שוויון?

<u>פתרון</u>

נפלה שגיאת דפוס מצערת. למעשה ניתן להוכיח יותר, והוא ש-

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq 3\sqrt{3}\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

(אם כי מובן מניה וביה שגם השאלה כפי שהוצגה נכונה). אם אחת הזויות α,β,γ היא קהה או ישרה אין מה להוכיח (למה?) ולכן מספיק להוכיח את הנוסחה עבור המקרה שכל הזויות חדות, ואז כל הפונקציות הטריגונומטריות המופיעות בנוסחה חיוביות.

הנוסחה נובעת משתי נוסחאות:

(1) $$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \geq \frac{27}{8}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

(2) $$\frac{1}{8} \geq \cos\alpha\cos\alpha\cos\alpha$$

וברור שהנוסחה שלנו נובעת מהכפלת (1) ו- (2).

<u>הוכחה</u>

(1)

$$\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$
$$=2\sin\alpha[\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha]$$
$$=2\sin\alpha[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta-\gamma)]$$
$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

ולכן

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$$
$$\geq 3\ (\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma)^{1/3}$$

בגלל משפט הממוצעים. יוצא כי

$$64\ \sin^3\alpha\sin^3\beta\sin^3\gamma \geq 27(\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma)$$
$$= 216\ \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma$$

דהיינו (1).

(2)

$$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=(2\cos^2\alpha-1)+2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$
$$=2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)-1$$
$$=-2\cos\alpha[\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)]-1$$
$$= -1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

ולכן

$$-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=(2\cos^2\alpha-1)+(2\cos^2\beta-1)+(2\cos^2\gamma-1)$$
$$1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$
$$\geq 3(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^{1/3}$$

שוב בגלל משפט הממוצעים. אם נכתוב $u=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ נקבל

$$1 - 2u \geq 3u^{2/3}$$

ז.א. $$27u^2 \leq (1-2u)^3$$
$$=1-6u + 12u^2 - 8u^3$$

ולכן $8u^3 + 15u^2 + 6u - 1 \leqslant 0$

אבל הנוסחה הזאת מתאפסת כאשר $u = \frac{1}{8}$, שלילית בין 0 ל- $\frac{1}{8}$ וחיובית עבור $u \geqslant \frac{1}{8}$. יוצא כי $u \leqslant \frac{1}{8}$,
ז.א. (2). ברור שיתקיים שוויון רק כאשר הוא מתקיים בכל האי-שוויונים דלעיל, וזה יהיה רק עבור $\alpha=\beta=\gamma$.

5.(4) הוכח כי קיימת קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים m אשר יש להם התכונה כי המספר n^4+m הוא פריק (ז.א. לא ראשוני) עבור כל מספר טבעי n.

פתרון

עבור כל x שלם קיים

$$n^4 + 4x^4 = (n^2+2x^2)^2 - 4x^2n^2$$

$$= (n^2-2xn+2x^2)(n^2+2xn+2x^2)$$

ולכן m יכול להיות כל מספר מהצורה $4x^4$.

6.(4) אם a,b,c,d ממשיים ו- $S = \frac{a+b+c+d}{3}$,
הוכח כי

$$(S-a)(S-b)(S-c)(S-d) \leqslant \frac{abcd}{81}$$

פתרון

ההנחה היא כי כל המספרים a,b,c,d חיוביים. נכתוב $x=S-a$, $y=S-b$, $z=S-c$, $w=S-d$. אזי

$$x+y+z+w = 4S - (a+b+c+d) = 4S-3S=S$$

ולכן $a = S-x$

$$= y+z+w$$

$$\geqslant 3(yzw)^{1/3}$$

לפי משפט הממוצעים.

כמו כן

$$b \geqslant 3(zwx)^{1/3}$$

$$c \geqslant 3(xyw)^{1/3}$$

$$d \geqslant 3(xyz)^{1/3}$$

ולכן

$$abcd \geqslant 81(x^3y^3z^3w^3)^{1/3}$$

$$= 81xyzw$$

ז.א.

$$xyzw = (S-a)(S-b)(S-c)(S-d)$$

$$\leqslant \frac{abcd}{81}$$

7.(4) הוכח שאי אפשר למצוא מספרים חיוביים a,b,c,d,e שיקיימו

$$\frac{a+b}{c+d+e} + \frac{b+c}{d+e+a} + \frac{c+d}{e+a+b} + \frac{d+e}{a+b+c} + \frac{e+a}{c+c+d} = \frac{3}{2}$$

פתרון

עבור כל a,b,c,d,e חיוביים קיים

$$\frac{a+b}{c+d+e} + \frac{b+c}{d+e+a} + \frac{c+d}{e+a+b} + \frac{d+e}{a+b+c} + \frac{e+a}{b+c+d}$$

$$> \frac{1}{a+b+c+d+e}\{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+e)+(e+a)\}$$

$$= \frac{2(a+b+c+d+e)}{a+b+c+d+e} = 2$$

8.(4) n הוא מספר גדול מ- 3, ו-

$x_1, x_2, \dots, x_n$ הם שרשי המשוואה

$$x^n - (n-3)^7 x - 1 = 0$$

הוכח כי

$$x_1^{2n} + x_2^{2n} \dots + x_n^{2n} = n$$

פתרון

מאחר שהמקדמים של x^{n-1} ושל x^{n-2} הם 0, יוצא כי

$$x_1 + x_2 \dots + x_n = 0$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 \dots + x_{n-1}x_n = 0$$

ולכן

$$x_1^2+x_2^2\dots+x_n^2=(x_1+x_2\dots+x_n)^2 - 2(x_1x_2\dots + x_{n-1}x_n) = 0$$

(ומכאן אגב אורחא שאין כל השרשים $x_1, x_2, .., x_n$ ממשיים)

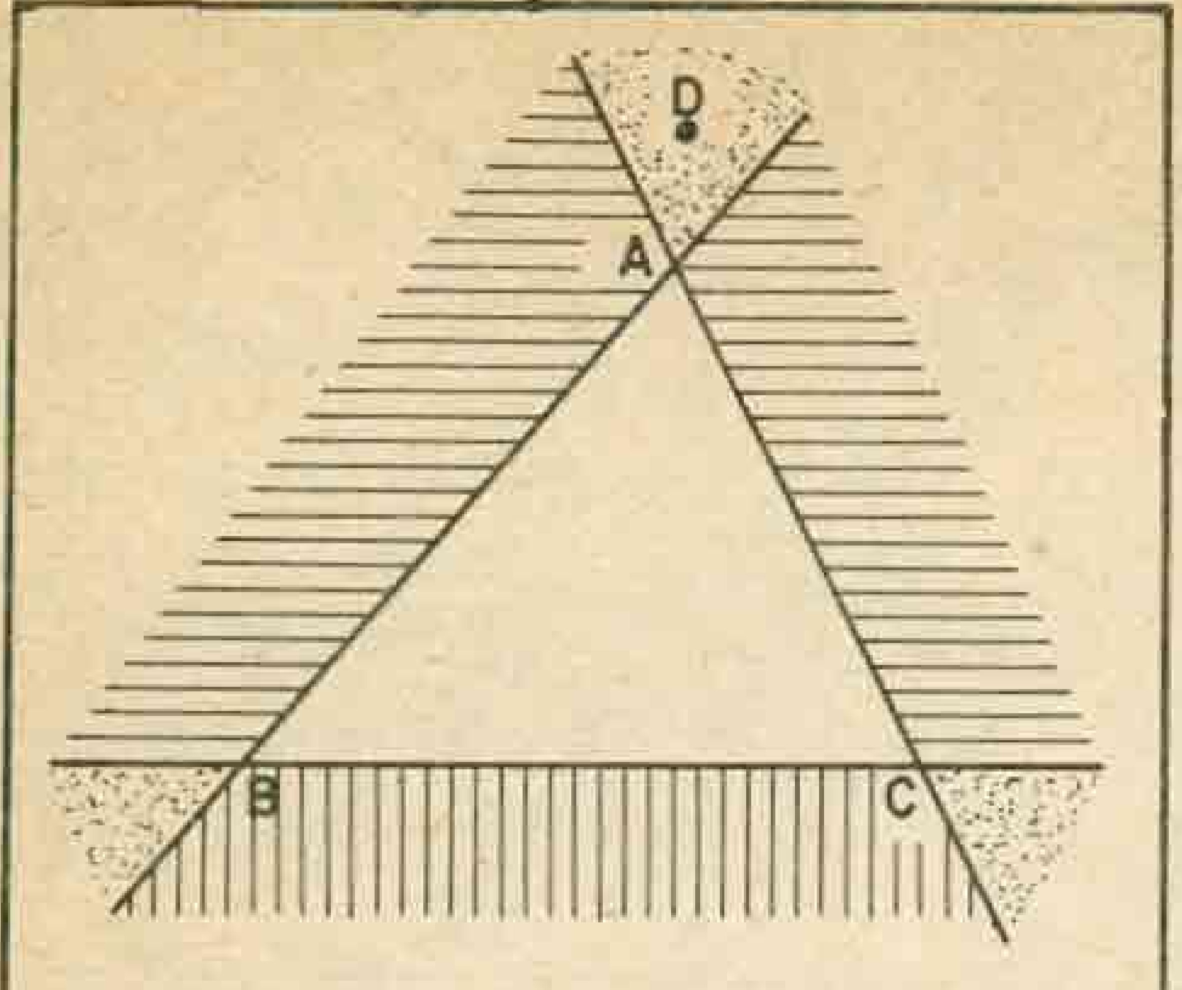
אבל x_1 מקיים את המשוואה, ולכן $x_1^n=(n-3)^7x_1+1$.
יוצא כי

$$x_1^{2n} = (n-3)^{14}x_1^2 + 2(n-3)^7x_1+1$$

כמו כן $x_2^{2n} = (n-3)^{14}x_2^2 + 2(n-3)^7x_2+1$

וכו'. מזה נובע כי

$$x_1^{2n} + x_2^{2n}\dots+x_n^{2n} = (n-3)^{14}(x_1^2+x_2^2\dots+x_n^2) + 2(n-3)^7(x_1+x_2\dots+x_n) + n = n.$$



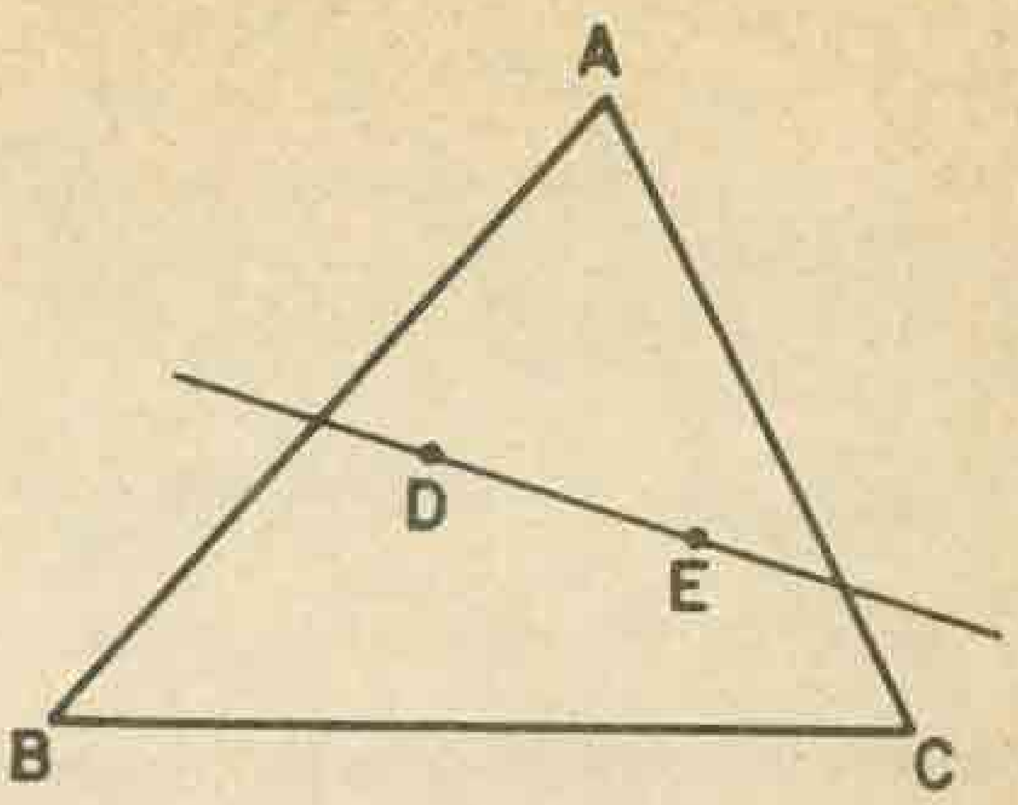
שאלה 9(א)

9.(5) נתונות 6 נקודות במישור כך שאין שלוש ביניהן הנמצאות על קו ישר. הוכח כי אפשר בשלוש דרכים (לפחות) לבחור מתוך 6 הנקודות קבוצה של 4 שהן קדקדי מרובע קמור.

פתרון

נוכיח למטה כי מכל קבוצה של 5 נקודות במישור אשר אין שלוש ביניהן נמצאות על קו ישר אפשר תמיד לבחור 4 שהן קדקדי מרובע קמור. מזה נוכל להסיק מיד את מסקנתנו. כי יהיו A,B,C,D,E,F שש הנקודות הנתונות. מתוך הקבוצה החלקית A,B,C,D,E נוכל למצוא לפחות רביעיה אחת המהווה קבוצת קדקדי מרובע קמור. נקרא למרובע הזה M_{ABCDE}. כמו כן נוכל לקבוע מרובע קמור בכל אחת מתוך שש החמישיות שניתן לבחור מתוך A,B,C,D,E,F וכך נמצא ששה מרובעים, לאו דוקא כולם שונים זה מזה. אבל אין אותו מרובע יכול להופיע יותר מפעמיים ברשימה הזאת של ששה מרובעים. כי ניקח לדוגמא את המרובע ABCD. הוא יכול (גם אם אינו חייב) להיות המרובע M_{ABCDE} וגם המרובע M_{ABCDF}, אבל אלה האפשרויות היחידות עבורו. יש לנו כאן רשימה של ששה מרובעים אשר בה אין שלושה זהים זה לזה. ולכן ברשימה לפחות שלושה איברים שונים.

נשאר להוכיח את העובדה הראשונה שציינו. תהיינה A,B,C,D,E 5 נקודות במישור אשר אין 3 ביניהן על קו ישר. אם C או D נמצאת באחד התחומים המקווקוים בציור אזי היא תוכל, יחד עם ABC ליצור מרובע קמור.
אם D נמצא באחד התחומים המנוקדים (ראה ציור 9א') אזי נוכל לקחת במקום המשולש ABC את D ושתי נקודות מבין A,B,C והשלישית תהיה בתוך המשולש שיווצר. בדרך זו נגיע למשולש בנוי מתוך 3 נקודות כאשר שתי האחרות



שאלה 9 (ב)

הן בפנים. אם המבנה הוא כמו בציור 9(ב) אזי הישר DE חייב לפגוש שתי צלעות של המשולש. אם, כמו בציור, הוא פוגש את AB ו-BC אזי BCDE הוא קמור.

10. (5) פתור את המשוואה

$$\frac{\cos^3\alpha}{\cos x}+\frac{\sin^3\alpha}{\sin x}=1$$

פתרון

$$\sin x\,\{\cos^3\alpha-\cos x\}=-\sin^3\alpha\cdot\cos x$$

נכתוב $\lambda=\cos x$ ונקבל

$$\lambda^2\sin^6\alpha=(1-\lambda^2)(\cos^3\alpha-\lambda)^2$$

ומכאן ש-

$$\lambda^4-2\lambda^3\cos^3\alpha-3\lambda^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha-\cos^6\alpha=0$$

דהיינו

$$(\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+\cos^2\alpha)(\lambda^2-2\lambda\cos\alpha\sin^2\alpha-\cos^4\alpha)=0$$

הגורם הראשון נותן את הפתרון $\lambda=\cos x=\cos\alpha$ ולכן $x=2n\pi\pm\alpha$, ואנו רואים ע"י הצבה במשוואה המקורית שהאפשרות היחידה כאן היא $x=2n\pi+\alpha$.
הגורם השני נותן

$$\lambda=\cos\alpha\sin^2\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$$

ז.א.

$$x=2n\pi\pm\mathrm{arc}\cos\{\cos\alpha[\sin^2\alpha\pm\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha}]\}$$

המשך המאמר שבעמודים 3-4

ומכאן

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 2\beta-q+\alpha^2\\ &= 2\beta-q+\frac{p^2}{4}\\ 2\lambda\mu &= 2\alpha\beta-r=p\beta-r\\ \mu^2 &= \beta^2-s\end{aligned}\qquad(11)$$

ולכן

$$\begin{aligned}(p\beta-r)^2 &= 4\lambda^2\mu^2\\ &= 4(\beta^2-s)(2\beta-q+\frac{p^2}{4})\end{aligned}$$

ז.א.

$$(12)\qquad 8\beta^3-4q\beta^2+2(pr-4s)\beta-[s(p^2-4q)+r^2]=0$$

משוואה זו מסדר 3, ולכן לפי מה שראינו למעלה, אנו יכולים למצוא את β. אם נציב את β ב- (11) נוכל לקבוע את μ,λ,α ולבנות את המשוואות ב- (10). יש לנו איפוא זוג משוואות ריבועיות.

מעולם המחשבים

בעריכת נחמן גבעולי

קוד המחשב

כשעבודת המחשב מתנהלת כסידרה, אנו רואים את האורות מהבהבים על לוח הבקרה, הסרטים המגנטיים מסתובבים הלוך ושוב, הדיסקים מסתחררים במהירות עצומה (למעשה אין רואים זאת), והמדפסת פולטת חומר כגון דו״חות, הודעות חיוב וכדומה. אך כשקורית תקלה - וזו מתרחשת לעתים די קרובות כאשר תכניות המחשב הן חדשות וטרם נופו כליל - עבודת המחשב נעצרת, ואז יש צורך לבדוק מה סיבת התקלה. לשם כך אפשר לקבל מהמחשב הדפסה של תוכן הזכרון שלו.

תוכן זכרון המחשב אינו דומה כלל לתוכן הדו״חות המודפסים, אלא הוא מכיל בעיקר את פקודות התכנית שהפעילה אותו. אך גם הדמיון בינו ובין התכנית המקורית של התכניתן הוא קלוש ביותר. התכניתן כותב את תכניתו בשפת תיכנות, ואילו בזכרון נמצאת התכנית בשפת המכונה.

הפקודות המקוריות של התכניתן, תורגמו לפני שהמחשב ניגש לעצם ביצוען, לקודים מיוחדים, שרק הם מסוגלים להפעילו במישרין. פקודת ״חיבור״, למשל, מיוצגת במחשב יב״מ 360 בקוד המכיל את 8 הספרות הבינאריות 01011010.

הזכרון מורכב מתאים, שכל אחד מהם יכול לקבל שני מצבים שונים. אנו מסמנים מצבים אלה בספרות 0 ו- 1, ואומרים כי התא יכול להכיל את הסיפרה 0 או את הסיפרה 1.

ברם, כשהתכניתן מעיין בהדפסת תוכן הזכרון, אין הוא רואה לפניו דפים מלאים בספרות 0 ו- 1 בלבד. אילו היה הדבר כך, בודאי לא היה מסוגל לעכל את החומר, במקום זאת כל סיפרה בהדפסה מייצגת קבוצה של כמה תאים, וגודל הקבוצה תלוי בסוג המחשב. אם ניקח קבוצות של 3 תאים, הרי כל אחת מהן יכולה להכיל אחד מ- 8 צירופים שונים של הספרות 0 ו- 1:
000, 001, 101, 011, 100, 101, 110, 111. אם נסמן את הצירופים הללו, לפי אותו הסדר, בספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, נוכל לומר כי המספר הבינארי 101, למשל, מיוצג על ידי המספר ה״אוקטאלי״ 5. אוקטו פירושו ביוונית 8, ושיטת המספרים הזו נקראת כך משום שיש בה 8 ספרות שונות בלבד (כולל האפס). המספר 8 נקרא בסיס השיטה, כשם שבשיטה העשרונית המקובלת 10 ספרות שונות, ובסיסה הוא איפוא 10.

במחשבים רבים, כל קבוצה של 4 תאים מיוצגת על ידי סיפרה. כאן דרושות 16 ספרות שונות, והשיטה נקראת השיטה ההכסאדצימלית (הכס פירושו ביוונית 6), שבסיסה 16. עשרת הצירופים הבינאריים הראשונים, 0000, 0001 וכו' עד 1001, מיוצגים על ידי הספרות 0, 1 וכו' עד 9. שש הספרות הנוספות הדרושות לקוחות מן הא״ב הלטיני ובדרך כלל הן האותיות A עד F.

לדוגמה, הקוד 01011010 שהזכרנו לעיל, של פקודת החיבור, מחולק לשתי קבוצות בנות 4 תאים - 1010, 0101 - ובהדפסת הזכרון הוא מופיע כ- 5A.

לנוחיות הקורא מובאות בסוף המאמר טבלאות קצרות של המרה בין שיטות המספרים השונות.

המשותף בכל השיטות המספריות הנהוגות במחשב, הוא שהבסיס בכולן הוא חזקה של 2, משום שהוא מבטא את מספר הצירופים השונים של 2 הספרות, 0 ו- 1. עובדה זו מאפשרת מעבר קל מן השיטה הנתונה לשיטה הבינארית ולהיפך. במקרה הראשון ממירים כל סיפרה בנפרד לקבוצה של ספרות בינאריות, ובמקרה השני - להיפך. דרך זו אינה טובה כאשר הבסיס אינו חזקה של 2. לדוגמה, תרגום המספר העשרוני 34 לבינארי אינו יכול להעשות סיפרה-סיפרה, כי אז יתקבל 100, 011, בעוד שהתשובה הנכונה היא 100,010. לעומת זאת, המרת המספר האוקטאלי 34 לבינארי אמנם נותנת 011,100. בדומה לכך, תרגום המספר ההכסאדצימלי 34 לבינארי

הוא 0100, 0011 (הפסיק איננו משמש כנקודת שבר, כמובן אלא לצורך הפרדה בלבד!)

גם המעבר בין כל שתי שיטות מספריות כאלו הוא קל למדי. לדוגמה, כדי להמיר את המספר ההכסאדצימלי 5A לאוקטאלי, ממירים אותו קודם, סיפרה-סיפרה לבינארי: 1010, 0101; אח"כ מקבצים את הספרות הבינאריות בקבוצות של 3 ספרות, תוך הוספת אפסים משמאל לפי הצורך: 010, 011, 001; לבסוף ממירים קבוצה-קבוצה מבינארי לאוקטאלי: 132.

כה רגילים אנו בשימוש בשיטה העשרונית, עד שהיא נראית לנו "טבעית" ונוחה יותר מכל שיטה אחרת. לאמיתו של דבר, אין זו אלא שאלה של הרגל. הטענות נגד השיטות הלא עשרוניות שהיו נהוגות באנגליה באשר למטבעות, ועדיין נהוגות שם במידות אורך, משקל וכד', מוצדקות רק משום שאין עקביות בשיטות אלו; בעוד שהמידות אינן עשרוניות, הרי החישובים נעשים בשיטה העשרונית. ומה שמכביד בעיקר הוא הצורך במעברים תדירים משיטה לשיטה. החישובים כשלעצמם אינם קשים יותר בשיטה האוקטאלית, למשל, מאשר בשיטה העשרונית.

כדי לכפול ב- 10 בשיטה העשרונית מספיק להוסיף אפס מימין; הוא הדין בכפל ב- 8 בשיטה האוקטאלית, וכדומה.

אנו מביאים להלן כמה טענות לגבי שיטות מספריות אחרות. עליך לציין אילו מהן נכונות, ואילו אינן נכונות:

1. מספר אוקטאלי מתחלק ב- 7 אם, ורק אם, סכום ספרותיו מתחלק ב- 7. (מהו הכלל המקביל לגבי מספרים עשרוניים?)
2. מספר הכסאדצימלי מתחלק ב- E אם, ורק אם, סכום ספרותיו מתחלק ב- E .
3. מספר אוקטאלי מתחלק ב- 4 אם, ורק אם, סיפרתו הימנית היא 0 או 4. (מהו הכלל המקביל לגבי מספרים עשרוניים?)
4. כל מספר בינארי המורכב מהספרות 1 בלבד (ללא אפסים) הוא ראשוני.
5. טענה 4 נכונה, בתנאי שמספר הספרות הוא אי-זוגי.
6. טענה 4 נכונה, בתנאי שמספר הספרות הוא ראשוני.
7. המספר האוקטאלי 7 הוא 111 בשיטה הבינארית. לכן, אם טענה 6 נכונה, אזי נכונה גם הטענה הבאה:

כל מספר אוקטאלי המורכב מהספרות 7 בלבד, ומספר ספרותיו ראשוני, הוא ראשוני. (שים לב! איננו שואלים אם טענה זו היא נכונה, אלא אם היא נובעת מטענה 6).

עשרונית	בינארית	אוקטלית	הכסאדצימלית
שיטות מספריות			
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

פתרון ל"סידור חומר בזכרון המחשב"
(ראה חוברת קודמת)

בשיטת השיבוץ אנו מגדירים קובץ ב', שהוא מלא בתחילה ב- n פריטי ∞ . n הפריטים של קובץ א' יסומנו ב-x_1 עד x_n , והפריטים בקובץ ב' יסומנו ב-y_1 עד y_n . האלגוריתם למיון בשיטת השיבוץ יהיה כדלקמן (**ראה** ציור):

א. קבע $i = 1$. זהו מספר התא הראשון בקובץ א'.

ב. קבע $j = 1$. זהו מספר התא הראשון בקובץ ב'.

ג. האם הפריט x_i קטן מהפריט y_j ? אם כן, דלג לשלב ט' לשם שיבוץ x_1 בקובץ ב'.

ד. אם לא - הגדל את j ב- 1 כדי להמשיך בסריקת קובץ ב'.

ה. האם עדיין קטן מ- i? אם כן, חזור לשלב ג'.

ו. אם לא, גמרנו לערוך $1 - i$ פריטים והגענו למקום פנוי בקובץ ב'. הכנס לשם את x_i , כלומר, קבע $y_j = x_i$.

ז. האם i שווה כבר ל- n ? אם כן, המיון נסתיים.

ח. אם לא, הגדל את i ב- 1 וחזור לשלב ב'.

ט. לצורך השיבוץ, עלינו לבדוק אם יש צורך להזיז פריטים בקובץ ב': האם j עדיין קטן מ- i ? אם לא, אנו נמצאים מעבר ל- $1 - i$ הפריטים בקובץ ב', ולכן אין צורך להזיז פריטים. דלג לשלב ו'.

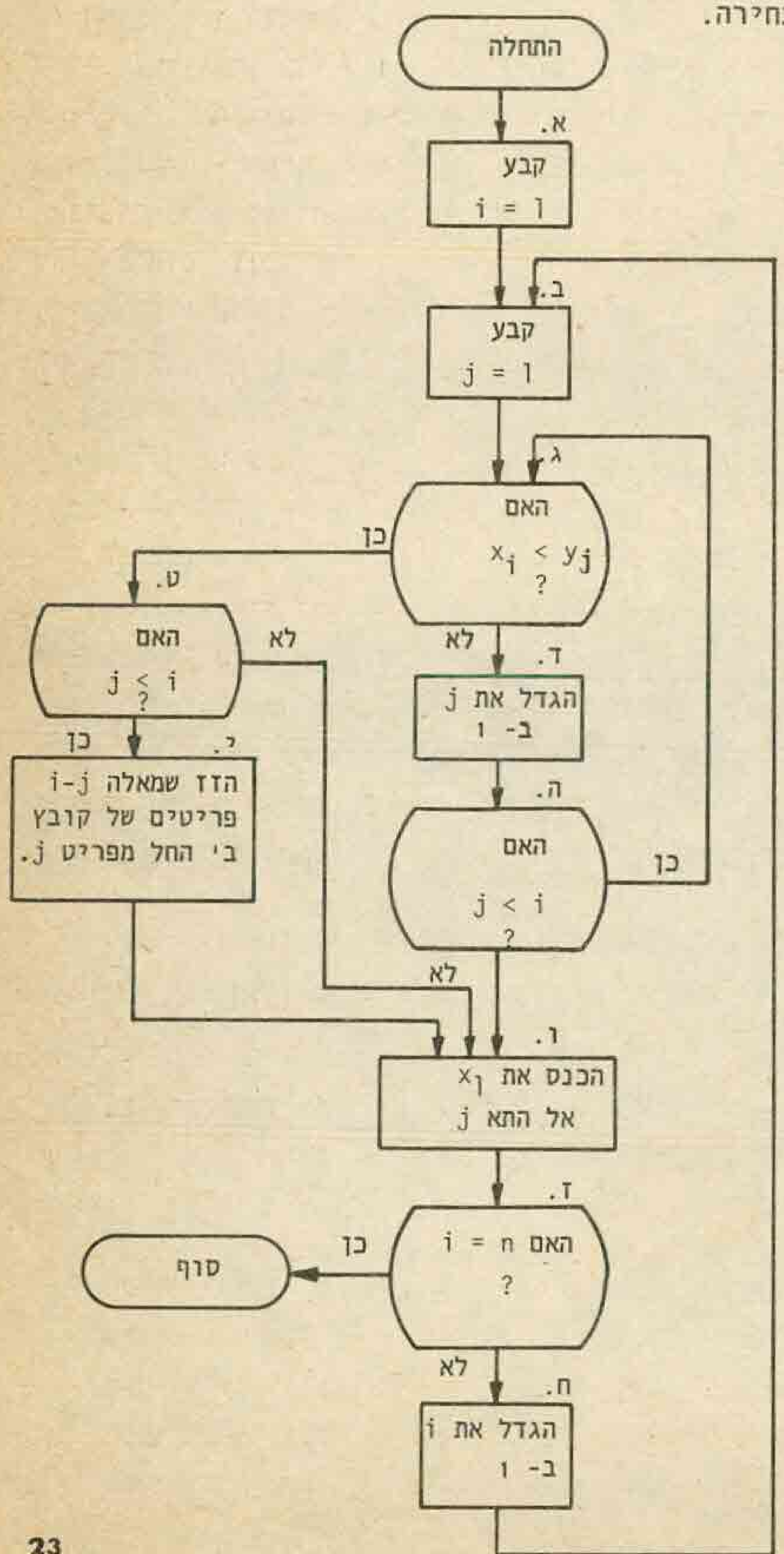
י. אם כן, הזז שמאלה $j - i$ פריטים החל בפריט j , ודלג לשלב ו'.

נראה עתה מהו מספר פעולות ההשוואה והעברות הפריטים הדרוש בשיטה זו. כשאנו נוטלים את פריט i מקובץ א' עלינו להשוותו, בממוצע, ל- $\frac{i}{2}$ פריטים בקובץ ב', עד שאנו מגיעים לפריט גבוה ממנו. לכן מספר ההשוואות הכולל הוא:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{n(1+n)}{4}$$

לגבי n גדול, מספר זה שווה בערך ל- $\frac{n^2}{4}$. ובכן, מספר ההשוואות בשיטה זו קטן פי 4 ממספר ההשוואות בשיטת הבחירה.

כדי לשבץ את פריט i במקומו עלינו להזיז, בממוצע $\frac{i}{2}$ פריטים. לכן גם מספר ההזזות הכולל הוא בערך $\frac{n^2}{4}$. מספר זה שווה למספר ההזזות בשיטת הבחירה.



רשימת הפותרים מכרך 6 מס' 1

.1	אדמירלסקי ויקטור	י"ב	הריאלי העברי, חיפה	(10)
.2	אולשינסקי משה	י"ב	הריאלי העברי, חיפה	(32)
.3	ברכה גבריאל		צה"ל	(17)
.4	דובדבני ניצן		חולון	(31)
.5	זיתוני עפר	י"א	הריאלי העברי, חיפה	(10)
.6	לפלשטיל דב		חיפה	(13)
.7	מלצר עזר	י"א	הריאלי העברי, חיפה	(24)
.8	נאור זהר	י"א	הריאלי העברי, חיפה	(13)
.9	עדין רון	י"ב	הריאלי העברי, חיפה	(37)
.10	פרץ נורית	י"א	"רמות", בת-ים	(5)
.11	קדישביץ יוסי	י"א	הריאלי העברי, חיפה	(19)
.12	קפלן יהונתן	י"ב	הריאלי העברי, חיפה	(25)
.13	רוסק צבי	י"ב	הריאלי העברי, חיפה	(37)
.14	רינגולד איל	י"א	ביה"ס ע"ש בן-צבי, גבעתיים	(9)