

גליונות מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים

כרך 7 מס' 1

יוצא לאור בחסות

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך: גיליס



עם הופעת חוברת זו אנו פותחים כרך 7 של "גליונות מתמטיקה". נסינו להגיש הפעם חוברת מגוונת ועל הקוראים לשפוט את מידת הצלחתנו. בין השאר הוצאנו מגנזי העתון "דפים למתמטיקה ופיסיקה", מאמר שחיבר פרופ' ת.ש. מוצקין ז"ל בפברואר 1944, בצירוף כמה פרטים אישיים על המתמטיקאי הדגול הזה.

החוברת החדשה היא השניה המופיעה בשני"ל זו. הוצאת שתי חוברות במשך שנת לימודים אחת כרוכה במאמצים גדולים מצד כל המתנדבים לעבודה ואנו תקוה כי התוצאות יצדיקו את המאמצים האלה.

תוכן הענינים

2	בעיות בלוח הכפל
4	לחישוב של π
8	פתרון גרפי לבעיית הרקה של נחל איתן
10	הפתעות בבעיה מתמטית
12	כיסוי המישור בעזרת מצולעים חופפים
15	בעיות חדשות
16	פתרון בעיות מכרך 6 מס' 4
20	רשימת הפותרים מכרך 6 מס' 4
21	מעולם המחשבים

בעיות בלוח הכפל

ת.ש. מוצקין ז"ל

טור החילוק	טור ההכפלה
37	51
18	102
9	204
4	408
2	816
1	1632
	1887

עכשיו מחברים יחד את אותם האיברים בטור ההכפלה שנמצאים מול איבר בלתי זוגי בטור החילוק. הסכום שמתקבל הוא המכפלה של שני המספרים המקוריים. קל לבדוק כי אמנם

$$37 \times 51 = 1887$$

דוגמא ב'

בטבלה 2 אנו מדגימים את הפעלת שיטה זו לחישוב של 2709×419 .

טור החילוק	טור ההכפלה
419	2,709
209	5,418
104	10,836
52	21,672
26	43,344
13	86,688
6	173,376
3	346,752
1	693,504
	1,135,071

ולכן

$$2709 \times 419 = 2709 + 5418 + 86,688 + 346,752 + 693,504 = 1,135,071$$

לוח-הכפל, המכשיר האדיר לביצוע פעולות הכפל והחילוק בשיטה העשרונית, שגור אצלכם כבר במשך רוב שנות חייכם ולכן אולי תביטו מלמעלה על נושא כה פשוט; אך הבה נראה האם אין טמונים גם בו דברים משונים, חדשים או עמוקים יותר.

אני מניח כי לוח-כפל מונח לפני עיניכם, הגשמיות או הרוחניות, ברגע זה. אבל ישנן שיטות עזר המכוונות למנוע את הצורך בלוח זה בכלל, ונציג שיטה אחת כזאת בעזרת דוגמאות.

דוגמא

א. נניח שרוצים לחשב 37×51 . שיטה אחת היא לכתוב את שני הגורמים זה על יד זה. עכשיו ממלאים שני טורים. את הטור האחד (טור החילוק) מקבלים ע"י חילוק חוזר של המספר ב-2, בלי להתחשב בשארית, עד שמגיעים בסוף לתוצאה 1. את הטור השני (טור ההכפלה) מקבלים ע"י הכפלה חוזרת ב-2. במקרה שלנו נקבל את שני הטורים שבטבלה 1.

פרופי תיאודור שמואל מוצקין ז"ל נולד בגרמניה בשנת 1908, בן למנהיג הציוני הותיק, ליאו מוצקין. למד מתמטיקה בגטינגן וברלין וגמר את עבודת הדוקטור בבזל, שוויצריה, בשנת 1934. נושא עבודה זו היה אי-שיונים לינאריים וכמה מהתוצאות שהשיג נמצאות בשימוש עד היום בעיקר בתורת המשחקים ובמיאוריה של חכנות לינארי. אחרי שקיבל את הדוקטורט עלה ארצה והצטרף לסגל המתמטי של האוניברסיטה העברית, שם עבד עד 1948. משנת 1950 עד מותו ב-1970 היה פרופי למתמטיקה באוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס. בעבודתו המדעית הצטיין לא רק כחוקר מבריק אלא גם כמורה מסור שידע למשוך תלמידים למקצוע. רבים מהמדענים הידועים היום בארץ נמנים על תלמידיו.

אולי ינסו הקוראים להוכיח כי שיטה זו נותנת תמיד תוצאה נכונה.

למעשה לוח הכפל אינו אלא כתיבה מכונסת של 100 משוואות מהסוג $2 \times 8 = 16$. בין אלה אפשר למצוא "מקורבות", דהיינו זוג משוואות שהאחת מתקבלת מהשניה ע"י הוספת מספר קבוע לכל ספרה. דוגמא לזוג כזה היא

$$2 \times 8 = 16$$

$$3 \times 9 = 27$$

אשר כל ספרה במשוואה השניה גדולה ב-1 מחברתה במשוואה הראשונה. האם ניתן למצוא זוגות נוספים מסוג זה? והאם קיימים זוגות כאלה גם בבסיסי ספירה אחרים, מלבד 10? יהיה n בסיס הספירה. אנחנו מחפשים איפוא a, b, c, d, x כך ש-

$$(1) \quad ab = cn + d$$

$$(2) \quad (a+x)(b+x) = (c+x)n + (d+x)$$

אם נחסר את המשוואה (1) מ-(2)

$$x^2 + (a+b)x = xn + x$$

ומאחר שהפתרון $x = 0$ אינו מעניין אותנו (מדוע?), אנו מקבלים

$$(3) \quad x = n + 1 - (a+b)$$

מכאן רואים שלכל משוואה כמו (1) אפשר להצמיד לכל היותר משוואה אחת כמו (2), וזאת ע"י הוספת $(a+b) - n + 1$ לכל ספרה. אם נחזור עכשיו לבסיס הרגיל $n = 10$, נקבל $x = 11 - (a+b)$. למשל אם נצא מ-

$$3 \times 7 = 21$$

$$\text{נקבל } 1 = (3+7) - 11 = x, \text{ ואמנם}$$

$$4 \times 8 = 32$$

ברור שהשיטה תתקל בקשיים אם יהיה אחד המספרים $a+x, b+x, c+x$, או $d+x$ גדול מ-9. אבל

$$a+x = 11-b$$

ולכן לא יוכל לעלות על 9 אלא אם כן b הוא 0 או 1. שיקול דומה נכון גם לגבי $b+x$ ולכן נתעלם משני המקרים הטריביאליים האלה. מאידך המספרים $c+x$ או $d+x$ יכולים בהחלט להיות גדולים מ-9. למשל

אם נצא מ-

$$3 \times 6 = 18$$

$$\text{נקבל } 2 = (3+6) - 11 = x \text{ וזה היה מוביל ל-}$$

$$5 \times 8 = 3 \times 10 + 10$$

עובדה שהיא אמנם נכונה, אבל איננה מופיעה בצורה זו בלוח הכפל. מכאן שהפתרון (3) אינו נותן תמיד בת זוג למשוואה (1). מעניין כי בת הזוג למשוואה

$$3 \times 4 = 12$$

$$7 \times 8 = 56 \quad \text{היא}$$

$$\text{ואת שתי אלה נוכל לכתוב: } 56 = 7 \times 8, 12 = 3 \times 4$$

הניסוח האחרון מעורר שאלה נוספת והיא האם נוכל למצוא ארבעה אברים עוקפים a, b, c, d של טור חשבוני (עולה או יורד) המקיימים

$$(4) \quad ab = cn + d$$

ברור שאם $a = b = c = d$ אזי האפשרות היחידה היא שכולם שווים ל-0. כי מ-

$$a^2 = an + a$$

יוצא $a = 0$ או $a = n + 1$ והאפשרות השניה אינה קיימת אם a היא ספרה בבסיס ספירה n . אמנם נכון הדבר, כי עבור כל n ,

$$0 \times 0 = 0 \times n + 0$$

אבל אינו מעניין ביותר! אבל אברי טור חשבוני בעל הפרש קבוע שאינם 0 הם בהכרח כולם שונים זה מזה, ולכן נוכל להניח כי $a < b$, מאידך, קיים

$$cn \leq cn + d = ab < an$$

ולכן $c < a$, יש לנו איפוא

$$c < a < b$$

עכשיו קיימות ארבע אפשרויות

$$d > b > a > c \quad \text{I}$$

$$b > d > a > c \quad \text{II}$$

$$b > a > d > c \quad \text{III}$$

$$b > a > c > d \quad \text{IV}$$

אם h הוא הפרש הקבוע של הסדרה החשבונית, אזי, במקרה I, יהיו

h	$M_1(h)$	$M_2(h)$	$M_3(h)$	$M_4(h)$
1	-1	1	5	3
2	2	8	22	10
3	9	21	51	21
4	20	40	92	36
5	35	65	145	55
6	54	96	210	78
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

טבלה 4

עבור כל c המקיים את התנאים האלה נוכל לחשב את n מאחת המשוואות (4.1) עד (4.4) בהתאם למקרה. ניקח למשל (4.1) ונניח כי $h = 1$. אזי מטבלה 4 רואים כי האפשרות היחידה היא $c = 1$. מ-(4.1) נובע מאידך כי

$$(7) \quad n = c + (3h-1) + \frac{2h^2-3h}{c}$$

אם $h = c = 1$, נקבל

$$n = 2$$

והתנאי 6 אינו מתקיים. לכן אין כאן פתרון. מאידך נסתכל במקרה III עם $h = 1$. האפשרויות עבור c הן 1 ו-5. אבל ממשוואה (4.3) נובע כי

$$(8) \quad n = c(5h-1) + \frac{6h^2-h}{c}$$

עבור $c = 1$ נקבל

$$n = 10 > c + 3h = 4$$

כאן הכל בסדר ואנחנו מקבלים

$$12 = 3 \times 4$$

בבסיס 10. עבור $c = 5$ נקבל שוב $n = 10$, ומכאן הפתרון הנוסף

$$56 = 7 \times 8$$

באותו מקרה III עם $h = 2$, נראה מטבלה 4 ש- c צריך להיות גורם של 22 ולכן האפשרויות הן 1, 2, 11. עבור $c = 1$ מקבלים מ-(8) כי $n = 32$.

$$a = c + b$$

$$b = c + 2h$$

$$d = c + 3h$$

ו-(4) מקבל את הצורה

$$(4.1) \quad (c+h)(c+2h) = cn + (c+3h)$$

כמו כן, במקרה II, נקבל

$$(4.2) \quad (c+h)(c+3h) = cn + (c+2h)$$

ב-III, יוצא

$$(4.3) \quad (c+2h)(c+3h) = cn + (c+h)$$

וב-IV, יוצא

$$(4.4) \quad (c+h)(c+2h) = cn + (c-h)$$

מ-(4.1) מקבלים

$$(5.1) \quad c^2 + c(3h-n-1) + (2h^2-3h) = 0$$

ומכאן ש- $(2h^2-3h)$ מתחלק ב- c . אם h הוא מספר סופי נתון אזי הוא הדין לגבי $2h^2-3h$ ולכן מספר האפשרויות עבור c גם הוא סופי. אם נכתוב

$$M_1(h) = 2h^2-3h$$

נקבל טבלה 3:

h	$M_1(h)$
1	-1
2	2
3	9
4	20
5	35
6	54

כמו כן אם נסתכל ב-(4.2) נראה שבמקרה זה צריך c לחלק את $3h^2-2h$. נכתוב איפוא $M_2(h) = 3h^2-2h$. מ-(4.3) נגדיר $M_3(h) = 6h^2-h$ ומ-(4.4) את $M_4(h) = 2h^2+h$. עכשיו נשלים את טבלה 3 לטבלה 4 (בעמודה הבאה)

בכל מקרה חייב c להיות גורם של הפונקציה $M_i(h)$ המתאימה. מאידך אל נשכח ש- c הוא מספר טבעי קטן מ- n .

יותר מזה, במקרים I', II, III מופיע גם $c+3h$ כספרה, ולכן

$$(6) \quad c < n - 3h$$

ואילו ב-IV דרוש רק

$$c < n - 2h$$

לחישוב של π

י. גיליס, רחובות

כידוע נהוג להשתמש באות היוונית π לסמן את היחס בין היקף של מעגל לקוטרו, בהיותה האות הראשונה של המילה היוונית περιφέρεια , שפירושה "היקף".

בימי קדם התקבלו בתרבויות שונות קירובים והערכות שונים לגבי ערכו של π , אבל ארכימדס היה הראשון שניסה באופן מדעי לחשב את ערכו המדויק. שיטתו תוארה כבר במאמר בחוברת קודמת של עתון זה (כרך 5, מסי 4) ולא נכנס כאן לפרטים. הגישה העיקרית היתה לחסום מצולעים משוכללים במעגל וגם לחסום את המעגל במצולעים כאלה. ארכימדס ידע לחשב את שטחי המצולעים האלה ומאחר ששטח המעגל גדול מזה של כל מצולע שחסום בו וקטן משטח המצולע החוסם אותו, הצליח ארכימדס לקבוע גבולות שביניהם נמצא π . במיוחד הוכיח כי

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

באופן עקרוני ניתן להמשיך לפי שיטתו של ארכימדס ולחשב את π לכל דיוק שנרצה, אבל החישובים נעשים מסובכים מאד. חסרון שני בשיטת ארכימדס הוא שאי אפשר להסיק ממנה נוסחה מפורשת עבור π .

רוב המאמצים לחשב את π בתקופה האחרונה התבססו על נוסחה המיוחסת למתמטיקאי הגרמני ליבניץ (G.W. Leibnitz).

הנוסחה היא:

$$(1) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots$$

אם $-1 < x \leq 1$, כאשר $\arctan x$ נמדד ברדיאנים. נדחה את הוכחת נוסחה זו לסוף המאמר ובינתיים נראה איר להסיק ממנה מסקנות.

אם נציב $x = 1$, נקבל מיד כי

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

אבל בזה אין תועלת רבה. כי כדי לחשב את π לפי

בשני המקרים $c = 2$, $c = 11$, $c = 22$ מקבלים $n = 22$. ישנם איפוא פתרונות רק עבור הבסיסים 22 ו-32 ונשאיר לקורא להמשיך בבדיקת המקרים האלה.

בסוף ניתן את דעתנו לכמה היבטים גיאומטריים של לוח הכפל.

עבור שני מספרים טבעיים x, y נגדיר את המכפלה

$$z = xy$$

ניקח זוג צירים Ox, Oy במישור ובכל נקודה בעלת שיעורים שהם מספרים טבעיים x, y נעמיד מקל, באורך z , ניצב למישור. עכשיו נפרוש בד או נייר רר על ראשי המקלות האלה. מה תהיה צורת המשטח שיתקבל? נקרא למשטח זה S . כדי להשלים את התמונה נרחיב את הלוח ונרשה ל- x או ל- y . (או לשניהם) להיות 0. במקרים הנוספים האלה יהיה גם z בהכרח 0, פירוש הדבר שלאורך הצירים Ox, Oy יהיה הבד צמוד למישור. ברור ש- S אינו מישור, כי הוא חותר את המישור המקורי של Ox, Oy בשני ישרים, כפי שראינו. מאידך קל לבדוק שאם ניקח את קבוצת הנקודות (a, y) עבור איזה a קבוע וכל הערכים האפשריים של y , נקבל קבוצת נקודות על s המסודרות על קו ישר. למעשה ישנן על S שתי קבוצות אינסופיות של קווים ישרים, עבור x קבוע ועבור y קבוע.

ניתן להוכיח, אם כי לא נפרט כאן את ההוכחה, כי כל מישור מאונך חותר את S בפרבולה וכל מישור אופקי חותר אותו בהיפרבולה או בזוג ישרים. הנה דרך פשוטה לבנות את המשטח S , או לפחות חלק ממנו.

ציין במישור את הנקודות C, B, A, O אשר שיעוריהן $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,10)$, $(10,10)$. חלק את צלעות המרובע הזה, כל אחד למספר (נגיד 20) קטעים שווים וחבר את הנקודות התואמות בצלעות מנוגדות זו לזו על ידי חוט מתוח. החוטים האלה יהוו קטע של המשטח S .

אם נגדיר את קנה המידה של z כך שהמקל CD יחשב כבעל אורך 100 יחידות, אזי יהיה הגובה של המשטח מעל למישור בנקודה (x, y) כלשהו שוב בדיוק למכפלה x, y גם כאשר x, y אינם מספרים שלמים.

מהטור של לייבניץ יוצא עכשיו: -

$$(4) \quad \frac{1}{4} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \dots \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \dots \right\}$$

שני הטורים האלה הם מכשירים יעילים למדי למטרות חישוב נומרי. נניח שנסכם את $2N$ האברים הראשונים של הטור הראשון. השארית תהיה

$$\frac{1}{(4N+1)} \cdot \frac{1}{2^{4N+1}} - \frac{1}{(4N+3)} \cdot \frac{1}{2^{4N+3}} + \frac{1}{(4N+5)} \cdot \frac{1}{2^{4N+5}} \dots$$

$$= \frac{1}{(4N+1)} \cdot \frac{1}{2^{4N+1}} - \left[\frac{1}{(4N+3)} \cdot \frac{1}{2^{4N+3}} - \frac{1}{(4N+5)} \cdot \frac{1}{2^{4N+5}} \right] \dots$$

$$< \frac{1}{(4N+1)} \cdot \frac{1}{2^{4N+1}}$$

$$< \frac{1}{4N \cdot 2^{4N+1}} = \frac{1}{N \cdot 2^{4N+3}}$$

נוכל איפוא לקבל דיוק של 10 ספרות אם

$$N \cdot 2^{4N+3} > 10^{10}$$

וזה יתקיים, כפי שאפשר לברר בקלות, אם $N > 7$.

יוצא כי מספיק לקחת 14 אברים מהטור הראשון (ואפילו פחות מהטור השני) להשיג דיוק של 10 ספרות. למעשה ניתן להוכיח בדרך דומה כי, באופן כללי ההפרש בין הסכום של k האברים הראשונים של הטור (1) לבין הערך המדויק של $\arctan x$, כאשר $-1 < x < 1$, הוא קטן מ-

$$\frac{x^{2k}}{2k(1-x^2)}$$

נסתכל עכשיו בנוסחה (3) ונציב $a = b = \frac{1}{5}$. נקבל

$$2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}}$$

$$= \arctan \frac{5}{12}$$

נוסחה זו עד לדיוק של 10 ספרות, נצטרך להביא בחשבון לפחות שני מיליארד אברים של הטור. כי הרי אם נפטיק את הסיכום אחרי $2N$ אברים, ז.א. באבר $-\frac{1}{4N-1}$, תהיה שארית הטור

$$\left(\frac{1}{4N+1} - \frac{1}{4N+3} \right) + \left(\frac{1}{4N+5} - \frac{1}{4N+7} \right) + \dots$$

$$= \frac{2}{(4N+1)(4N+3)} + \frac{2}{(4N+5)(4N+7)} + \dots$$

$$> \frac{2}{(4N+2)^2} + \frac{2}{(4N+6)^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+3)^2} + \dots \right]$$

$$> \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2N+2)^2} + \frac{1}{(2N+4)^2} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots \right]$$

וניתן להוכיח, אם כי לא נציג כאן את ההוכחה, כי הנוסחה האחרונה בסוגריים ערכה בערך $\frac{1}{N}$. ראינו איפוא כי אם ניקח $2N$ אברים מהטור ניתקל בשגיאה של לפחות $\frac{1}{8N}$. כדי להשיג דיוק של 10 ספרות דרוש כי

$$\frac{1}{8N} < 10^{-10}$$

ולכן $N > 10^9$, ז.א. שידרוש, כפי שאמרנו, לפחות 2×10^9 אברים. מאידך ידוע כי, עבור כל α, β

$$(2) \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

אם נכתוב $\tan\alpha = a$, $\tan\beta = b$ ובכך $\alpha = \arctan a$, $\beta = \arctan b$ נקבל

$$(3) \quad \arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

במיוחד, אם ניקח $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, נקבל

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}$$

$$= \arctan 1$$

$$= \frac{1}{4}\pi$$

$$4 \arctan \frac{1}{5} = 2 \arctan \frac{5}{12}$$

$$= \arctan \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}}$$

$$= \arctan \frac{120}{119}$$

מאידור, בהסתמר שוב על (3), קיים

$$\arctan 1 + \arctan \frac{1}{239} = \arctan \frac{1 + \frac{1}{239}}{1 - \frac{1}{239}} = \arctan \frac{120}{119}$$

ומכאן ש-

$$(5) \quad \frac{1}{4}\pi = \arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

אם נציב $x = \frac{1}{5}$ ב- (1) נראה, לפי האמור לעיל, שנקבל דיוק של 10 ספרות אם ניקח k אברים כר ש-

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2k}}{2k \cdot \frac{24}{25}} < 10^{-10}$$

ולזה מספיק ש- $k > 7$. באשר לטור (1) כאשר $x = \frac{1}{239}$, קל לראות כי 3 אברים יספיקו. ההצבה (5) מאפשרת איפוא לחשב את π בדיוק רב בעבודה קלה יחסית. בעזרת הנוסחה (4) הצליח המתמטיקאי האנגלי יוהן מציין (John Machin) כבר בשנה 1706 לחשב את π עד לספרה ה-100. קיימות מספר רב של נוסחאות אלטרנטיביות, ביניהם זו של אוילר (L. Euler) משנת 1779, והיא

$$(6) \quad \frac{1}{4}\pi = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$$

המתמטיקאי שנקס (W. Shanks) המשיך במאמצים האלה ובשנת 1873 פרסם רשימה של 707 הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של π . עם פיתוחם של מחשבים אלקטרוניים לבשה בעית החישוב צורה חדשה. עכשיו יכול כל תלמיד תיכון היודע תכנות לחשב את π עד לדיוק של מליוני ספרות תוך כמה דקות.

בהקשר זה נזכיר מקרה מבדר במקצת. בשנת 1937 התקיימה בפאריז (בירת צרפת) תערוכה גדולה ואחד הביטנים בה היה "ביתן המדעי". לשם קישוט בבנין זה שמו על ארבעה הקירות מסביב את 707 הספרות של π שהיו ידועות עד אז. הבנין קיים, על כל קישוטיו,

עד ליום הזה ומשמש כ"מוזיאון המדעי". אבל לפני כשלושים שנה, כאשר התחילו להשתמש במחשבים אלקטרוניים חישבו את π לדיוק של כמה אלפי ספרות ואחת העובדות שהתגלו היתה שבחישוביו של שנקס היתה כנראה טעות והספרות אחרי הספרה ה-135 אינן נכונות!

בסוף נזכיר שתי גישות אחרות לחישוב של π .

א. המתמטיקאי האנגלי ברונקר (Brouncker) הוכיח בשנת 1658 את הנוסחה הבאה:

$$(7) \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \frac{121}{2 + \dots}}}}}}$$

לא נוכל להוכיח נוסחה זו כאן ואנו מצטטים אותה בעיקר מפני שהיא כל כך שונה מאלה שניתנו למעלה.

ב. הנוסחה השניה הומצאה ע"י המתמטיקאי הצרפתי ויטה (F. Vieta) שחי במאה ה-16. הוא יצא מהעובדה כי

$$\sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} (2 \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4})$$

$$= 2^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4}$$

$$= 2^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} (2 \cos \frac{\alpha}{8} \sin \frac{\alpha}{8})$$

$$= 2^3 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \sin \frac{\alpha}{8}, \dots$$

רואים כי ניתן להמשיך בדרך זו ובאופן כללי,

$$\sin \alpha = 2^n \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2^3} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2^3} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \quad \text{דהיינו:}$$

נציב את כל אלה ב-(9) ונקבל את נוסחת ויטה

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{4}} \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} \dots$$

הוכחת הנוסחה (1)

ההוכחה הפשוטה ביותר מתבססת על חשבון אינטגרלי: -

נניח כי $0 < x < 1$ אזי

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{du}{1+u^2} \\ &= \int_0^x (1-u^2+u^4-u^6+\dots) du \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

ברור שהפיתוח של $\frac{1}{1+u^2}$ בטור הנדסי אפשרי אך ורק

אם $u^2 < 1$ ולכן התנאי $0 \leq x < 1$ היה דרוש.

נוסף על זה הנחנו שהאינטגרל של סכום של טור אינסופי

שווה לסכום האינטגרלים של אברי הטור. דבר זה אינו

נכון תמיד אבל ניתן לאשר כי הוא קיים במקרה זה.

המעבר ל-x שלילי הוא מידי מאחר שגם $\arctan x$ וגם

נוסחת ליבניץ מחליפים את סימנם כאשר מציבים -x

במקום x.

אבל ידוע כי $\frac{\sin \theta}{\theta}$ שואף לערך הגבולי 1 כאשר θ שואף ל-0. מכאן שכאשר n גדל לקראת אינסוף ישאף

$$2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}$$

שהוא אינו אלא

$$\alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}$$

לערך הגבולי α . מהשיקולים האלה הסיק ויטה את

הנוסחה

$$(8) \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cos \frac{\alpha}{2^3} \cos \frac{\alpha}{2^4} \dots$$

נציב ב-(8) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ וניזכר כי $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, נקבל

$$(9) \quad \frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cos \frac{\pi}{2^4} \dots$$

אבל, עבור כל זווית θ , קיים

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

ולכן

$$(10) \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$$

כולנו יודעים כי

$$\cos \frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

ולכן, לפי (10),

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2^3} &= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

אם נמשיך, נקבל

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2^4} &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} \end{aligned}$$

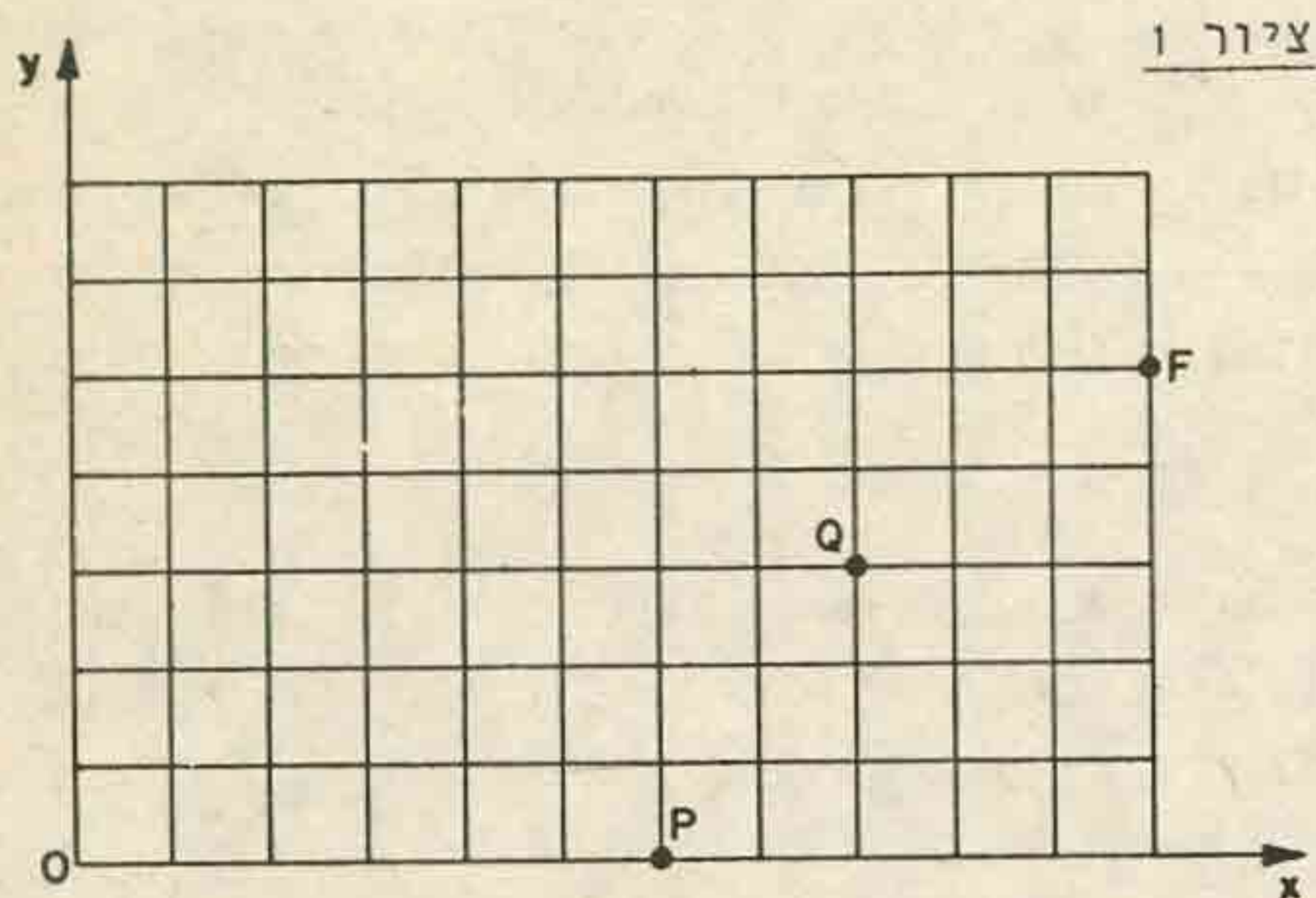
ובאותה דרך

$$\cos \frac{\pi}{2^5} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}}$$

וכו'.

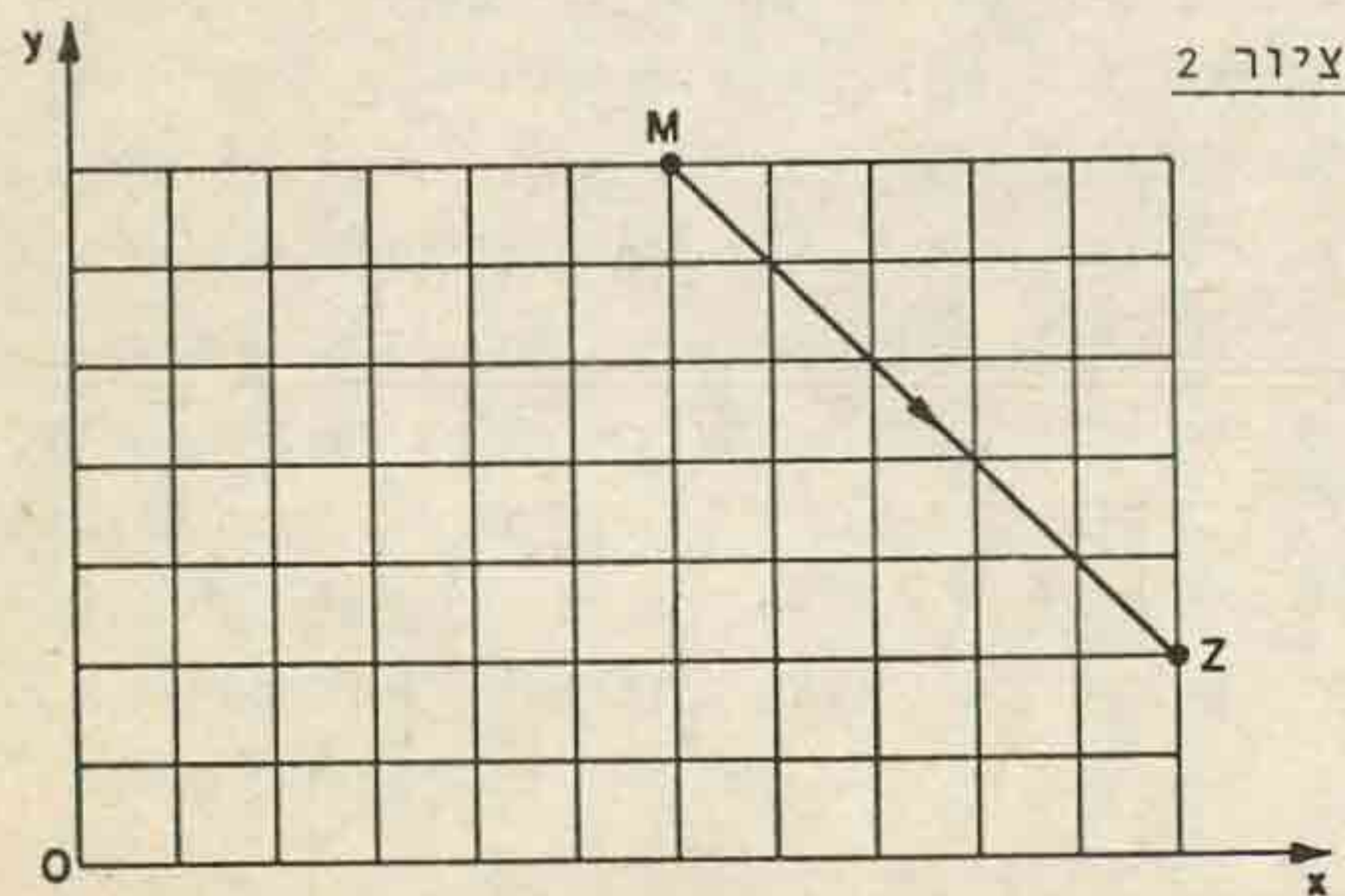
פתרון גרפי לבעיית הרקה של נחל איתן

מ. שמשוני, רחובות



ברור כי ביצוע אחת הפעולות המותרות תגרור הזזת הנקודה המייצגת. מלוי הכד הגדול מהמעין יזיז את הנקודה באופן אופקי לצלע הימנית של המלבן ואילו הרקת אותו כד ארצה היתה מזיזה אותה לצלע השמאלית. כמו כן מלוי הכד הקטן מהמעין או הרקתה ארצה היו גוררות תנועה מאונכת של הנקודה המייצגת.

כאשר מבצעים פעולה מסוג ג) הרי כל המים היוצאים מכד אחד נכנסים לשני ולכן $x + y$ נשאר קבוע. תנועת הנקודה המייצגת תהיה איפוא לאורך קו אלכסוני היוצר עם הכיוון החיובי של Ox את הזווית 135° . לדוגמא נניח שהכד הקטן מלא ובגדול נמצאים 6 ליטרים (הנקודה M בציור 2), ומלאנו את הגדול מתוך הקטן.



בגליונות מתמטיקה, כרך 6 מס' 2, הודפס מחדש מאמר של פרופסור י. בר-הלל ז"ל אשר הופיע לראשונה בעיתון "דפים למתמטיקה ולפיסיקה" בשנת 1942. המאמר תיאר שיטה גרפית נאה לפתרון בעיות מן הסוג: "למוזג שלושה כדים המכילים 8, 5 ו-3 ליטרים. הכד הגדול מלא יין. ברצון המוזג לחלק את היין לשתי כמויות שוות בעזרת הכדים הללו בלבד. כיצד יעשה זאת?"

כאן נתאר שיטה גרפית לבעיות דומות, בהן יש רק שני כדים ונוסף לכך מעין איתן כמקור בלתי מוגבל של מים (בגלל בזבוז הנוזלים שבשיטה נאלצנו לעבור מיין למים!). ברצוננו להגיע לכמות מוגדרת מראש של מים באחד הכדים במספר פעולות קטן ככל האפשר.

להדגמת השיטה נטפל במקרה בו שני הכדים מכילים 7 ו-11 ליטרים והמטרה היא שבאחד הכדים יהיו בדיוק 6 ליטרים של מים.

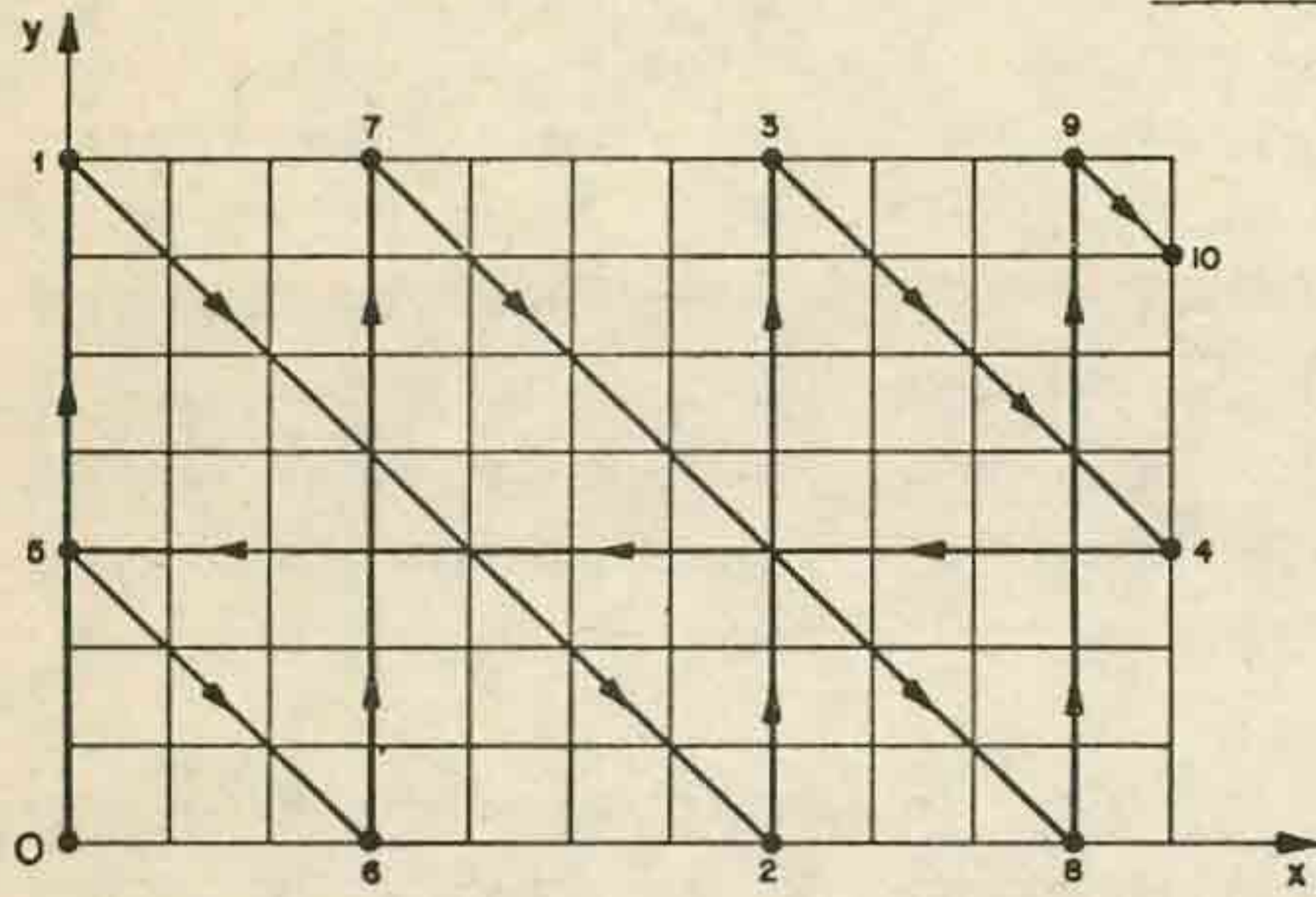
בבעיות מסוג זה הפעולות המותרות הן:

- א) למלא אחד הכדים במי המעין.
- ב) להריק כד אחד על-ידי זה ששופכים ארצה את המים אשר בו.
- ג) לשפוך מכד אחד לשני עד שהראשון יתרוקן או שהשני יתמלא (או שני הדברים האלה גם יחד).

בבעיות בהן טיפל, נעזר פרופסור בר-הלל במשולש אשר המרחקים מצלעותיו תיארו את כמות הנוזל בכל אחד משלושת הכדים. בבעיות שלנו נעזר במערכת צירים קרטזית. מצב המערכת יתואר בעזרת נקודה אשר שעוריה שווים לכמויות המים בשני הכדים. נקודה זו תיקרא הנקודה המייצגת. בציור 1 מייצגת הנקודה P את המצב אשר בכד הגדול נמצאים 6 ליטרים בעוד שהכד הקטן ריק. מאידך F מייצגת מצב אשר הגדול מלא ובקטן נמצאים 5 ליטרים, בעוד Q מייצגת מצב כאשר בכד הגדול יש 8 ליטרים ובקטן 3 ליטרים.

בציור 4 אנו חוזרים על הפתרון המוצלח. כדאי לשים לב לכך שלסירוגין אנו צועדים "בצעדי צריחי" ו"צעדי רץ" של שחמט (למה?).

ציור 4



נראה גם בצורת טבלה את הפעולות אותן ביצענו על מנת להגיע לפתרון.

מס' הצעד	תכולת כד 7	תכולת כד 11
0	0	0
1	7	0
2	0	7
3	7	7
4	3	11
5	3	0
6	0	3
7	7	3
8	0	10
9	7	10
10	6	11

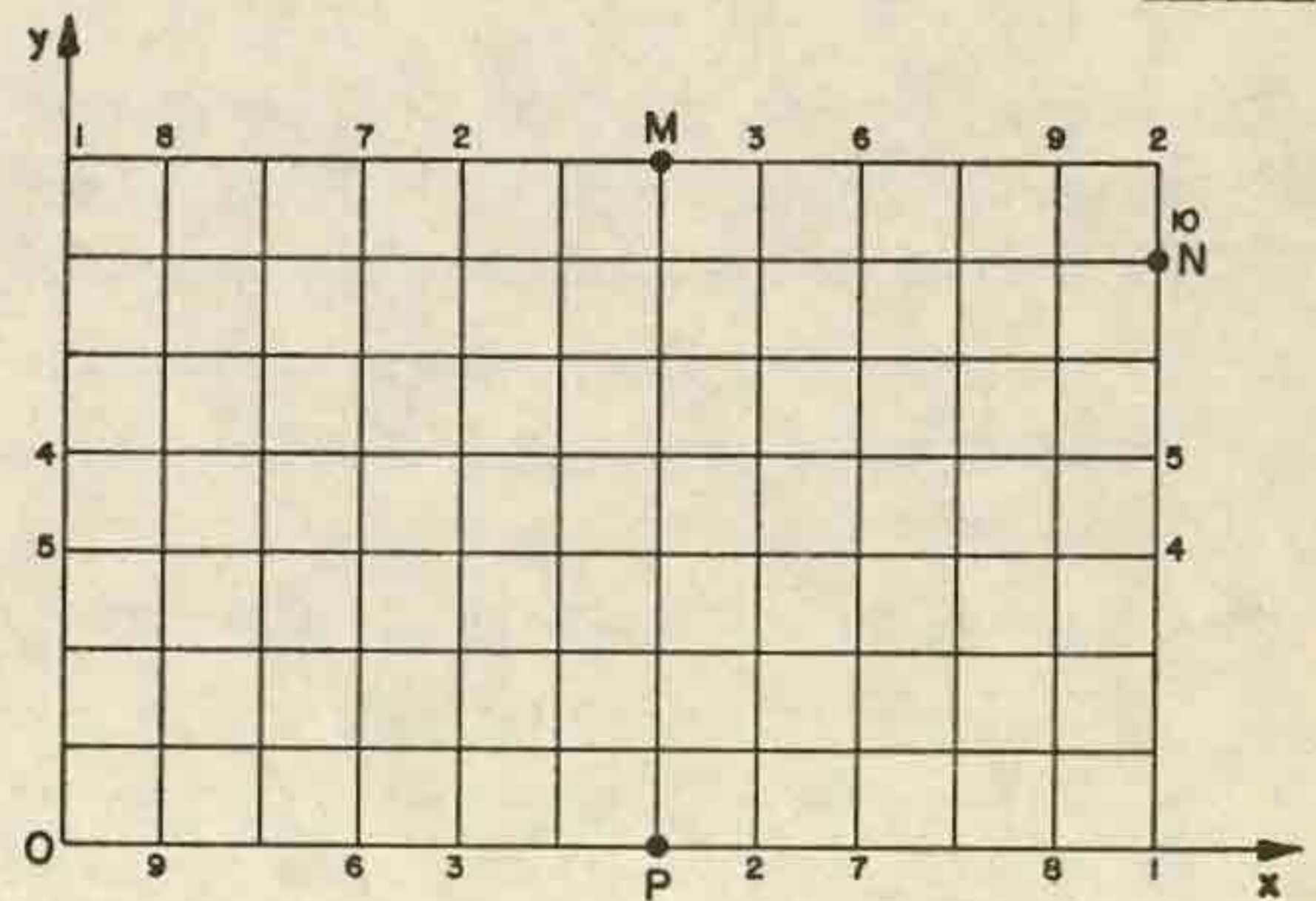
אולי ינסו הקוראים לפתור את הבעיה הבאה: ברשותנו מעין איתן ושני מיכלים בקיבולים 8 ו-11 ליטרים. ברצוננו להגיע למצב שבאחד המיכלים תהיה כמות כפולה של מים מאשר במיכל השני (אין הכוונה למצב $(0,0)$). ניתן לבצע את הפעולה ב-16 צעדים.

פעולה זו היתה מיוצגת על ידי תנועת הנקודה בקו האלכסוני מ-M עד Z (ציור 2). מאידך אילו יצאנו מהמצב המיוצג על-ידי הנקודה Z, דהיינו שהכד הגדול מלא ובשני 2 ליטרים, ומלאנו את הקטן על-ידי מזיגה מהגדול, אזי היתה הנקודה המיוצגת נעה כלפי מעלה מ-Z עד M.

קיים שיקול נוסף והוא שפעולה נגמרת תמיד במלוי אחר הכדים או בהרמת אחד הכדים (או שניהם). עובדה זו תתבטא בדיאגרמה בזה שכל תנועה של הנקודה המיוצגת יכולה להיגמר אך ורק על אחת מצלעות המלבן ולא בפנים המלבן.

להדגמת הפתרון נעזר בציור 3 בו העתקנו את הנקודות M, P, את הראשית O ואת N, שהיא נקודת המטרה (6,11) הפעולה מתחילה בנקודה O. בצעד הראשון ניתן רק ללכת

ציור 3



לשתי נקודות אשר את שתיהן נסמן במספר 1. בצעד הבא ניתן לעבור לשלוש נקודות שונות אותן נסמן ב-2. לא לקחנו בחשבון את האפשרות לחזור לראשית O, וגם בעתיד נפסול כל אפשרות לחזור לנקודה אותה כבר ביקרנו, כי הרי אנו מעוניינים בפתרון בעל מספר צעדים מזערי. הנקודה 2 בפינה הימנית העליונה היא נקודה עקרה כי ממנה ניתן רק לחזור לאחת מן הנקודות 1, ולכן נתעלם ממנה. הצעד הבא יוביל לשתי נקודות 3 וכן הלאה עד שבצעד העשירי אחת מן הנקודות 10 היא נקודת המטרה N, דהיינו 6 ליטרים בכד הקטן (11-10 ליטרים בגדול).

הפתעות בבעיה מתמטית

א. רוזנטולר, נתניה

ישנה בעיה ידועה והיא:

מספר טבעי מסויים אשר ספרת היחידות שלו היא 2, הוא כזה שאם מעבירים את הספרה 2 הזאת מהמקום האחרון למקום הראשון יוצא מספר שהוא פי 2 מהמספר המקורי. מהו המספר הקטן ביותר שיש לו תכונה זו?

למעשה ניתן להציג בעיה כללית יותר:

מספר טבעי מסויים אשר ספרת היחידות שלו היא k, הוא כזה שאם מעבירים את הספרה k מהמקום האחרון לראשון מקבלים מספר גדול פי k מהמספר המקורי. מהו המספר הקטן ביותר המקיים את התנאי הזה? נסמן את המספר הקטן ביותר ב- N_k . בעיתנו הראשונה היתה איפוא למצוא את N_2 וכאן נציג שתי דרכי פתרון שונות.

א. הספרה האחרונה של N_2 היא 2, לפי ההגדרה. העברתה למקום הראשון מכפילה את N_2 פי שניים, דהיינו שהיא יוצרת מספר אשר ספרתו האחרונה 4. הספרה שלפני 8 היתה צריכה להיות 16, אבל מאחר שאין ספרה כזאת בבסיס העשרוני אנו מקבלים 6 ומעבירים 1 לספרה הבאה. זו תהיה איפוא $2 \times 6 + 1$, ז.א. 3, עם שוב העברת 1 למקום הבא. נמשך בדרך זו עד שנקבל את הספרה 2 והנה פתרנו את הבעיה. נוכל להציג את סדר הפעולות בדיאגרמה הבאה:

1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4

רואים מיד מהדיאגרמה כי

$$N_2 = 105, 263, 157, 894, 736, 842.$$

בדרך דומה ניתן לחשב את N_k עבור כל k אחר. רואים, למשל, כי

$$N_7 = 1,014, 492, 753, 623, 188, 405, 797.$$

ב. קיימת גישה שניה לפתרון הבעיה. נניח כי מספר

הספרות ב- N_2 הוא m

$$N_2 = 10x + 2 \quad \text{ונכתוב}$$

אזי רואים מיד מתנאי הבעיה ש-

$$2 \cdot 10^m + x = 2(10x + 2)$$

$$\text{ולכן } 19x = 2 \cdot 10^m - 4$$

$$= 199 \dots 96$$

כאשר במספר האחרון מופיעה הספרה 9 בדיוק (n-1) פעמים.

$$x = \frac{1999 \dots 6}{19} \quad \text{מאחר ש-}$$

נוכל לקבוע את x כדלקמן: -

חלק את 19... 9... 9... ב-19

$$\begin{array}{r} 10526315 \\ 19 \overline{) 199 \dots 9 \dots 96} \\ \underline{19} \\ 99 \\ \underline{95} \\ 49 \\ \underline{38} \\ 119 \\ \underline{114} \\ 59 \\ \underline{57} \\ 29 \\ \underline{14} \\ 109 \\ \underline{95} \\ 149 \end{array}$$

והמשיך עד שתקבל את השארית 7. אם קיבלת שארית זו תוכל לסיים את המספר ב-6 כי 76 מתחלק ב-19.

שיטה דומה טובה לקביעת N_k גם עבור ערכים אחרים של k.