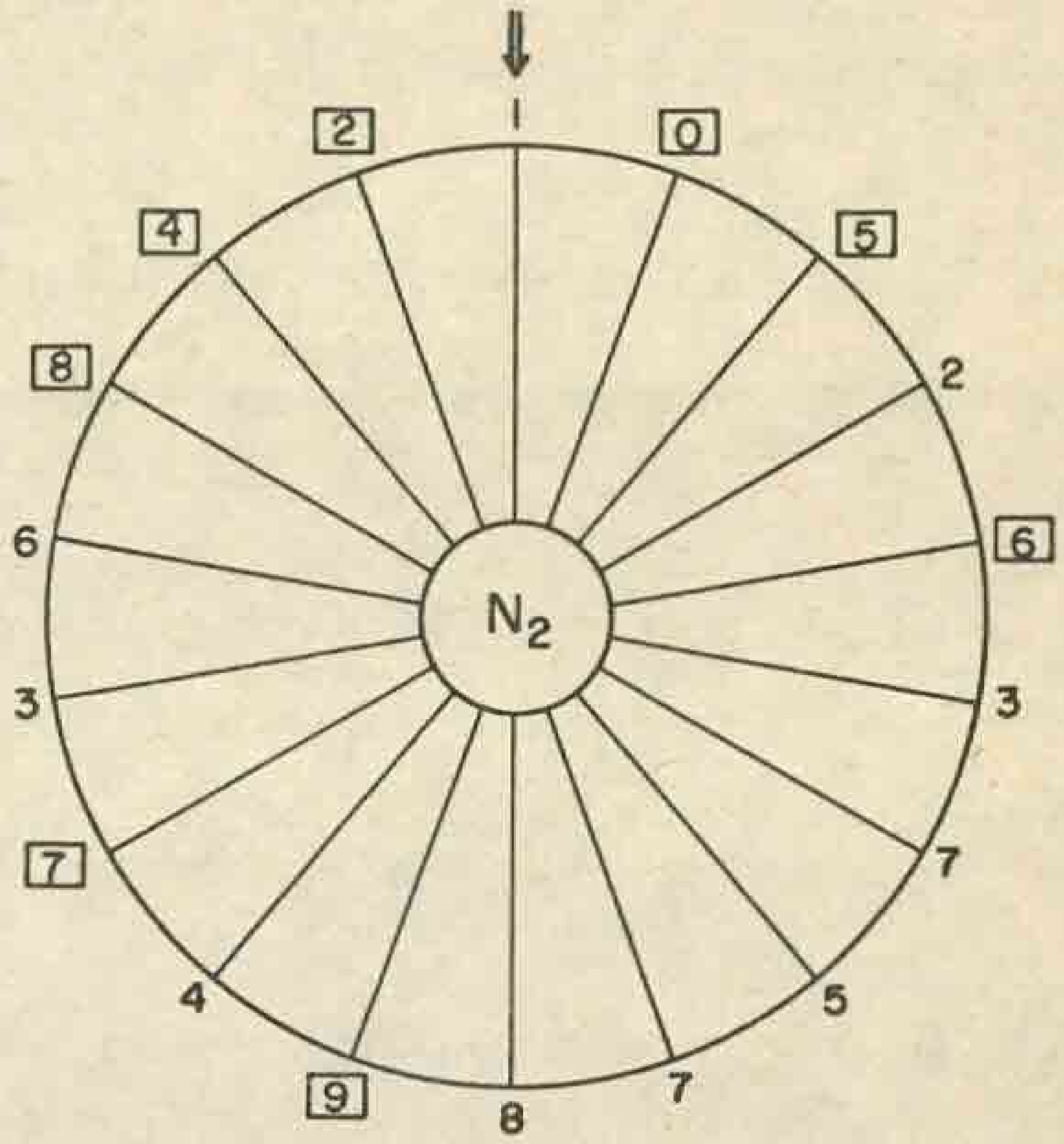
עכשיו נשרטט עיגול ונרשום עליו את הספרות של המספר N_2 לפי הסדר.



בציור הזה הכנסנו חלק מהספרות למסגרות רבועיות (האם תוכלו לראות איך הוחלט איזה מספרים יש להקיף ככה ברבועים?) ונוכל לראות כמה תכונות מעניינות לספרות האלה:

1) אם נבחר את הספרה 2 שבקבוצה זו ונתחיל ממנה ונקרא את כל הספרות שבמעגל לפי כיוון השעון נקבל בדיוק $2N_2$, כי

$$2N_2 = 210,\ 526,\ 375,\ 789,\ 473,\ 684$$

דבר זה אינו מפתיע כי למעשה הוא אך מבטא את התכונה אשר לפיה קבענו את N_2. בדרך דומה, ושוב ללא הפתעה, נראה כי אם נצא מהספרה 4 נקבל את המספר $4N_2$ ואילו אם נתחיל מ-8 נקבל את $8N_2$.

2) קצת יותר מפתיעה היא העובדה שאם נצא מ-6 נקבל $6N_2$, 7 יתן את $7N_2$ ו-9 היה גורר $9N_2$. נשאיר לקורא לבדוק את הנושא הזה ולנסות להבין את הסיבה לתופעה.

3) אם נצא מה-0 נקבל בדיוק $\frac{1}{2}N_2$, כי

$$\frac{1}{2}N_2 = 052,\ 631,\ 578,\ 947,\ 368,\ 421$$

עכשיו נעבור לרגע להתבונן במספר N_5. לא קשה לאשר כי

$$N_5 = 102,\ 040,\ 816,\ 326,\ 530,\ 612,\ 214,\ 897,\ 959,\ 183,\ 673,\ 469,\ 387,\ 755$$

וכי

$$7N_5 = 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285$$

דהיינו מספר עם "מחזור" 714285.

אבל קיים $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$

ויוצא כי N_5 אינו אלא 42 הספרות הראשונות בפתוח העשרוני של $\frac{5}{7} \times \frac{1}{7}$, ז.א. של $\frac{5}{49}$ וכי אלה מהווים למעשה המחזור של מספר זה. במלים אחרות

$$\frac{5}{49} = 0.\dot{N}_5$$

למעשה אפשר להוכיח כי, עבור כל ספרה m,

$$\frac{m}{10m-1} = 0.\dot{N}$$

ראשית כל ברור שהספרה הראשונה של N_m חייבת להיות 1, כי הרי לפי ההגדרה mN_m מתקבל כאשר מעבירים את הספרה האחרונה של N_m, שהיא m, מהמקום האחרון לראשון; יוצא שהספרה הראשונה של mN_m היא m, ולכן זו של N_m היא 1. עכשיו נגדיר

$$x_m = 0.\dot{N}_m$$

לפי האמור יהיה

$$10mx_m = m.\dot{M}$$

ולא קשה להיווכח כי המחזור M יהיה זהה עם N_m.

מכאן נובע ש-

$$10mx_m = m + x_m$$

ולכן

$$x_m = \frac{m}{10m-1}$$

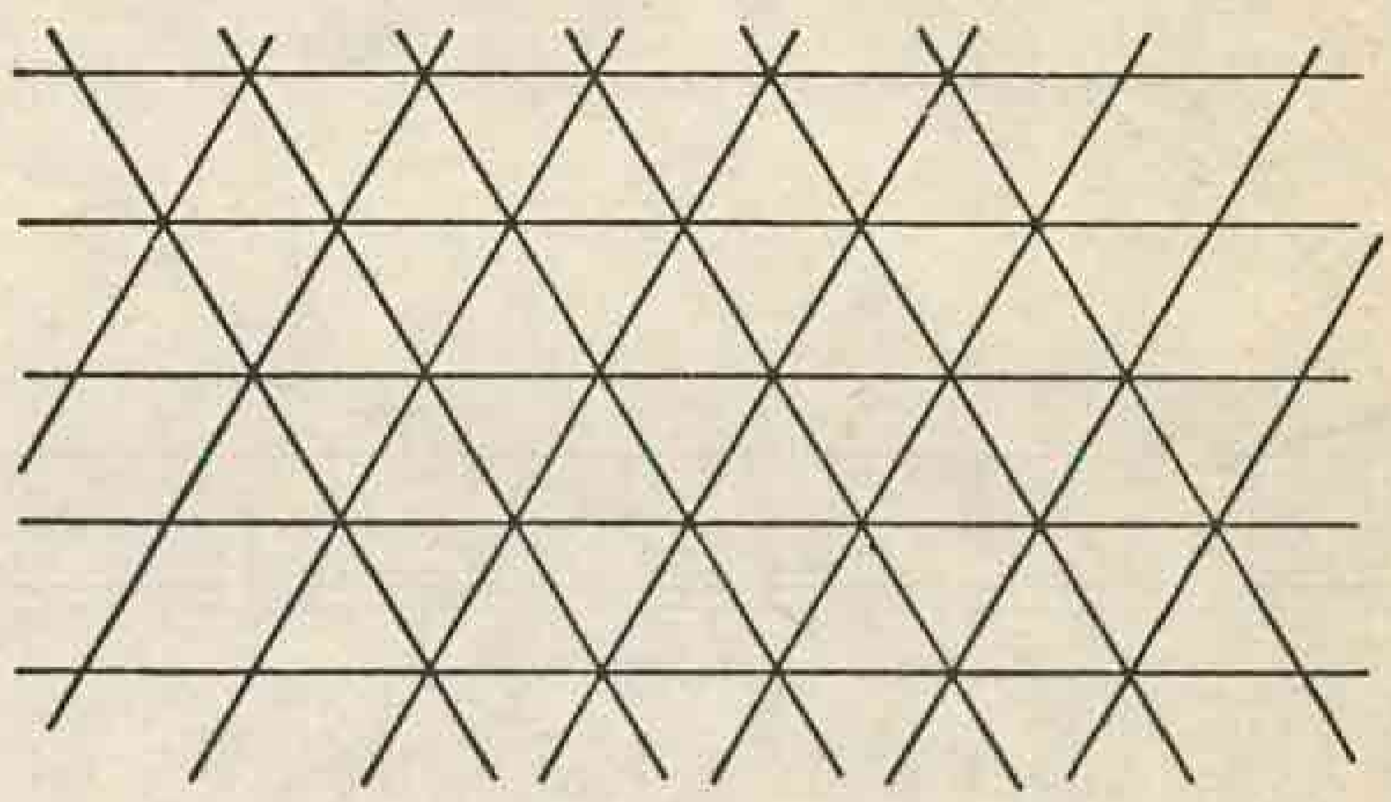
הנה איפוא דרך שלישית (וקלה מאד) לחשב את כל ה-N_m.

כיסוי המישור בעזרת מצולעים חופפים

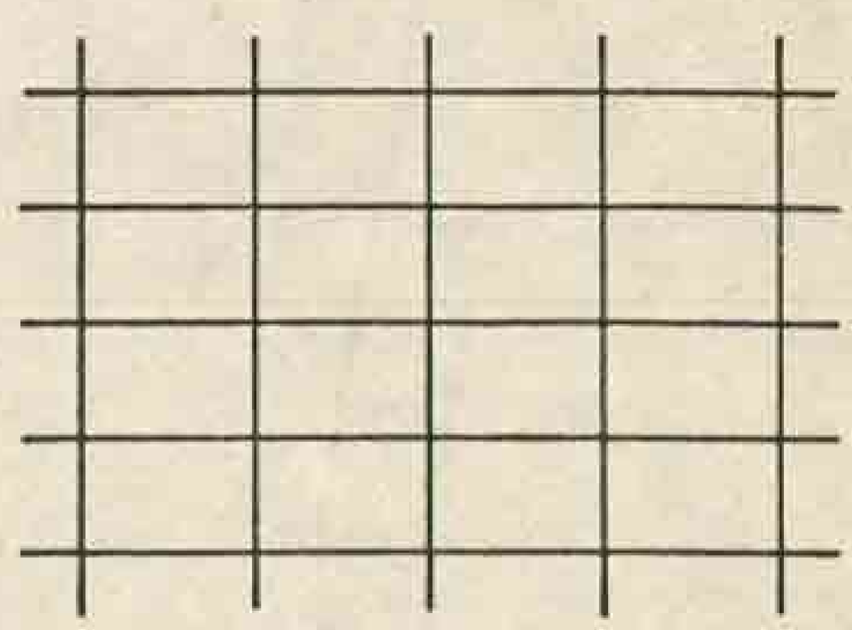
י. קופיץ, רמת-גן

נניח שיש לנו מלאי בלתי מוגבל של אריחים דומים, כולם חופפים לאיזו צורה נתונה A. האם נוכל לכסות בהם את המישור כולו, כך שכל נקודה של המישור תכוסה ע״י אחד האריחים (פרט לנקודות שעל השפה בין שני אריחים סמוכים)? ליתר דיוק הבעיה היא, מה הן הצורות A שלגביהן הדבר אפשרי? במאמר זה נגביל את הדיון למקרים ש-A הוא מצולע, אבל נעיר כי גם במקרים אלה אין התשובה תמיד חיובית. האריחים הם דו-צדדיים ומותר גם להפוך אותם לצד השני.

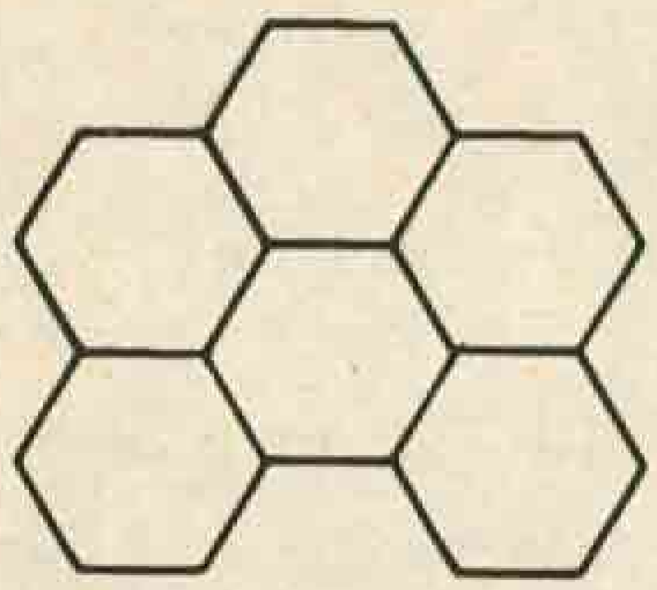
מתוך הסתכלות בציורים 1-3 אנו רואים מיד כי התשובה <u>חיובית</u> כאשר A הוא משולש שווה צלעות, מלבן, או משושה משוכלל. כאשר A הוא מחומש משוכלל אין הדבר אפשרי, כי הרי הזוית הפנימית של מחומש משוכלל היא 108° ואי אפשר להרכיב מהן בנקודת מפגש זוית של 360°.



<u>ציור 1</u>



<u>ציור 2</u>

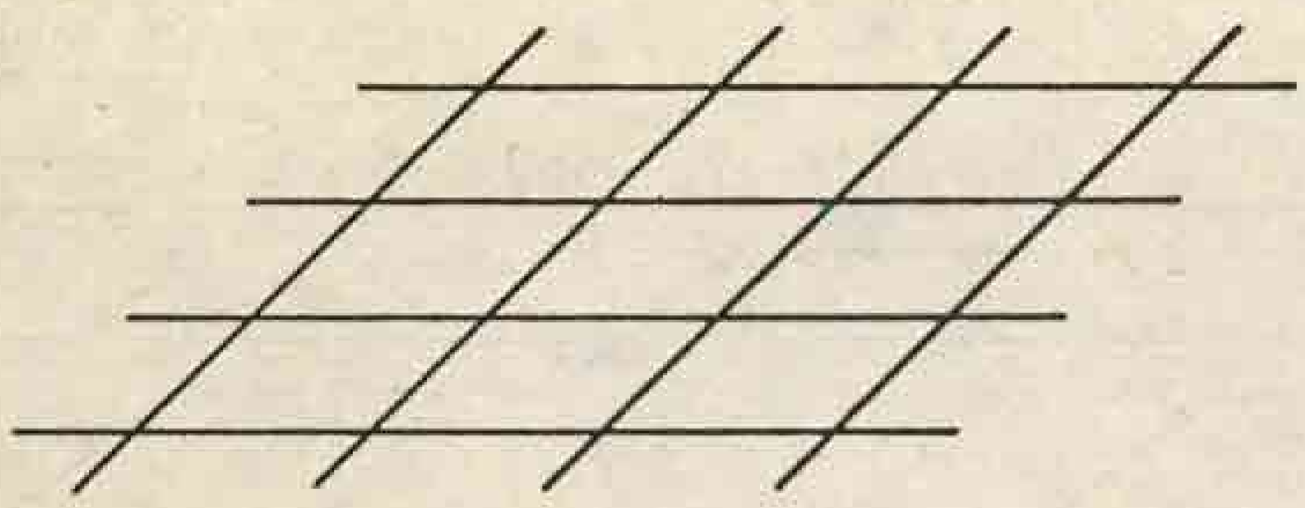


<u>ציור 3</u>

מאידך ישנם דוקא מצולעים בלתי משוכללים רבים שבהם ניתן לכסות את המישור ואלה ישמשו כנושא העיקרי לדיוננו. צורה שיש לה התכונה המבוקשת, דהיינו שניתן לכסות בצורות חופפות לה את כל המישור, תיקרא בהמשך <u>צורה טובה</u>. ועכשיו נוכיח כמה משפטים יסודיים.

<u>משפט 1</u> כל מקבילית מהווה צורה טובה.

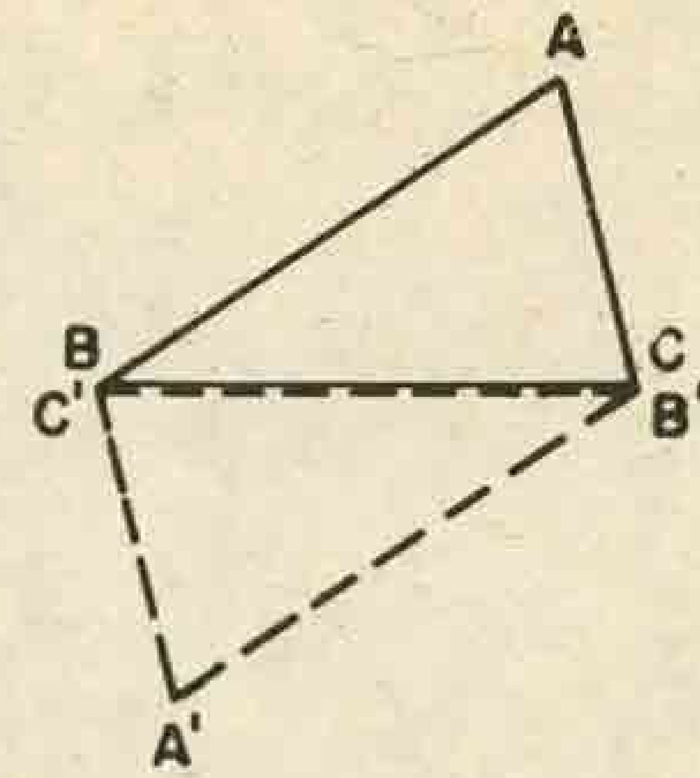
<u>הוכחה:</u> אפשר להוכיח את המשפט באופן פורמלי, אבל למעשה רואים את נכונותו מיד מציור 4.



<u>ציור 4</u>

<u>משפט 2</u> משולש מכל סוג שהוא מהווה צורה טובה.

<u>הוכחה</u> נניח שיש לנו מלאי אינסופי של משולשים חופפים למשולש ABC. נוכל לצרף אותם בזוגות (ציור 5) וע״י כך ליצור מהם מלאי אינסופי של מקביליות חופפות. ממשפט 1 נובע שניתן לכסות את המישור בעזרת המקביליות האלה וזה מהווה למעשה כיסוי ע״י המשולשים.

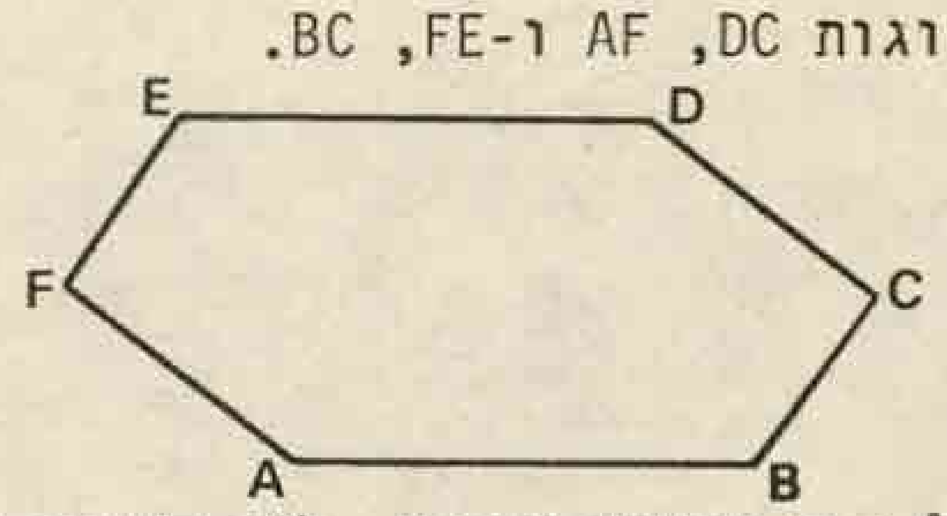


ציור 5

בהמשך נזדקק למושג חדש והוא של משושה משופר.

הגדרה משושה משופר הוא משושה אשר בו הצלעות הנגדיות הן מקבילות ושוות.

ברור שמשושה משוכלל הוא גם משופר, אבל אין זה קשה לבנות גם משושה משופר שאינו משוכלל. ראה למשל את המשושה בציור 6, אשר בו שתי הצלעות ED, AB שוות ומקבילות זו לזו והוא הדין לגבי הזוגות DC, AF ו-FE, BC.

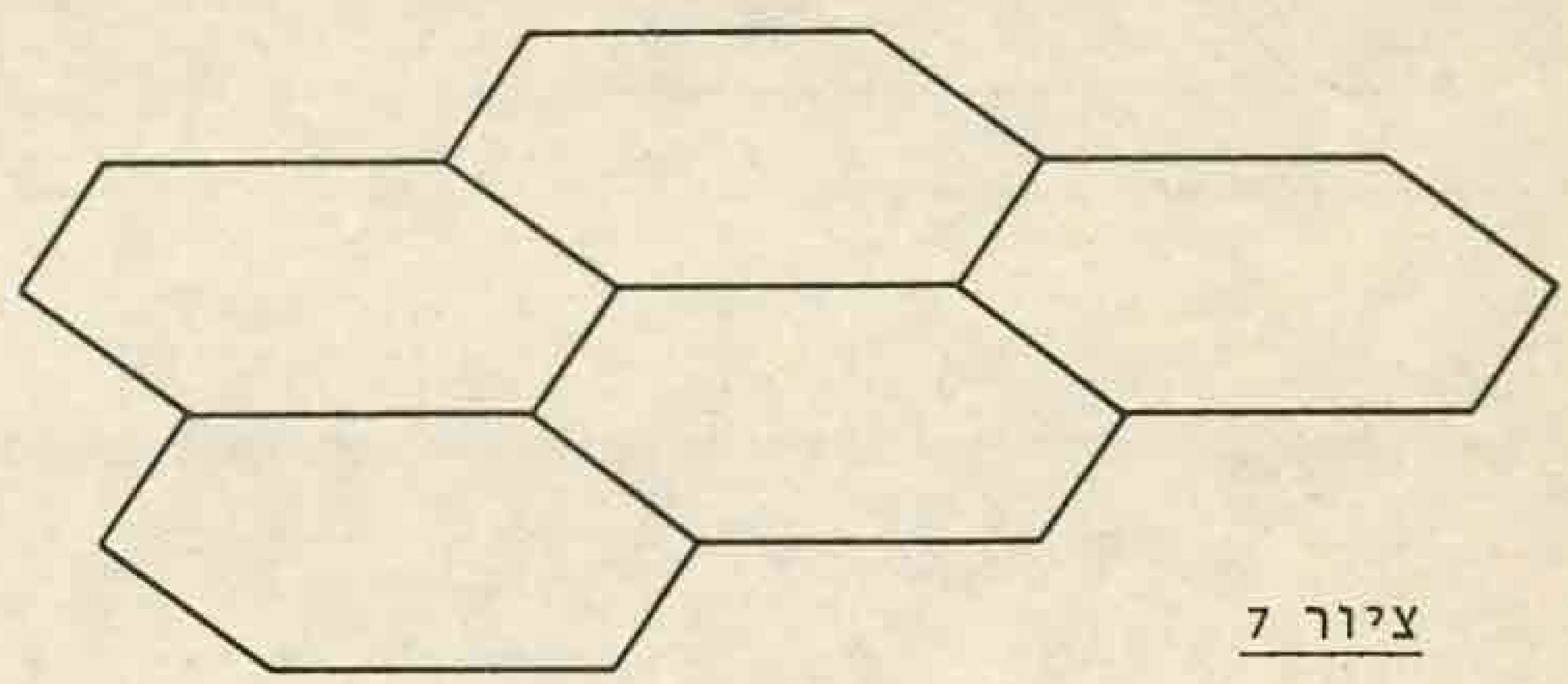


ציור 6

המשושה ABCDEF הוא איפוא משופר, לפי ההגדרה, אבל ברור שאינו משוכלל, ועכשיו אנו מגיעים למשפט הבא:

משפט 3 כל משושה משופר מהווה צורה טובה.

הוכחה מספיק להסתכל בציור 7.

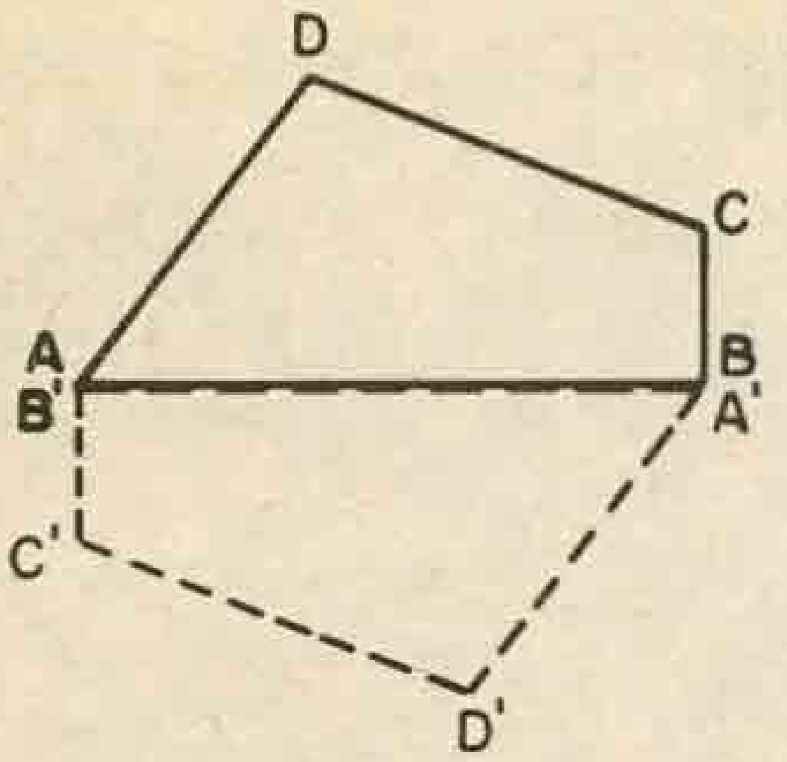


ציור 7

המשפט הבא מפתיע במקצת:

משפט 4 כל מרובע קמור מהווה צורה טובה.

הוכחה אם נחבר יחד, באופן מתאים, שני עותקים של המרובע (ראה ציור 8) נקבל משושה משופר. המסקנה מידית.

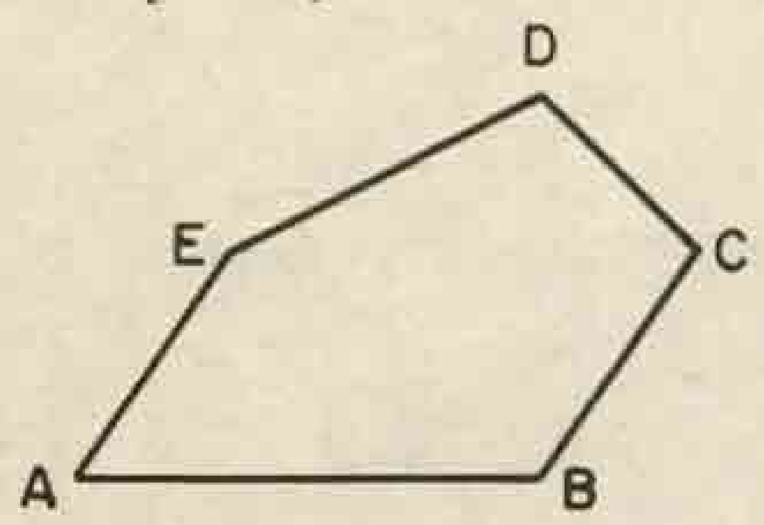


ציור 8

המצב לגבי מחומשים הרבה יותר מסובך. ראינו כבר כי מחומש משוכלל אינו צורה טובה, אבל מאידך, אנו יכולים להגדיר כמה סוגים של מחומשים שהם צורות טובות.

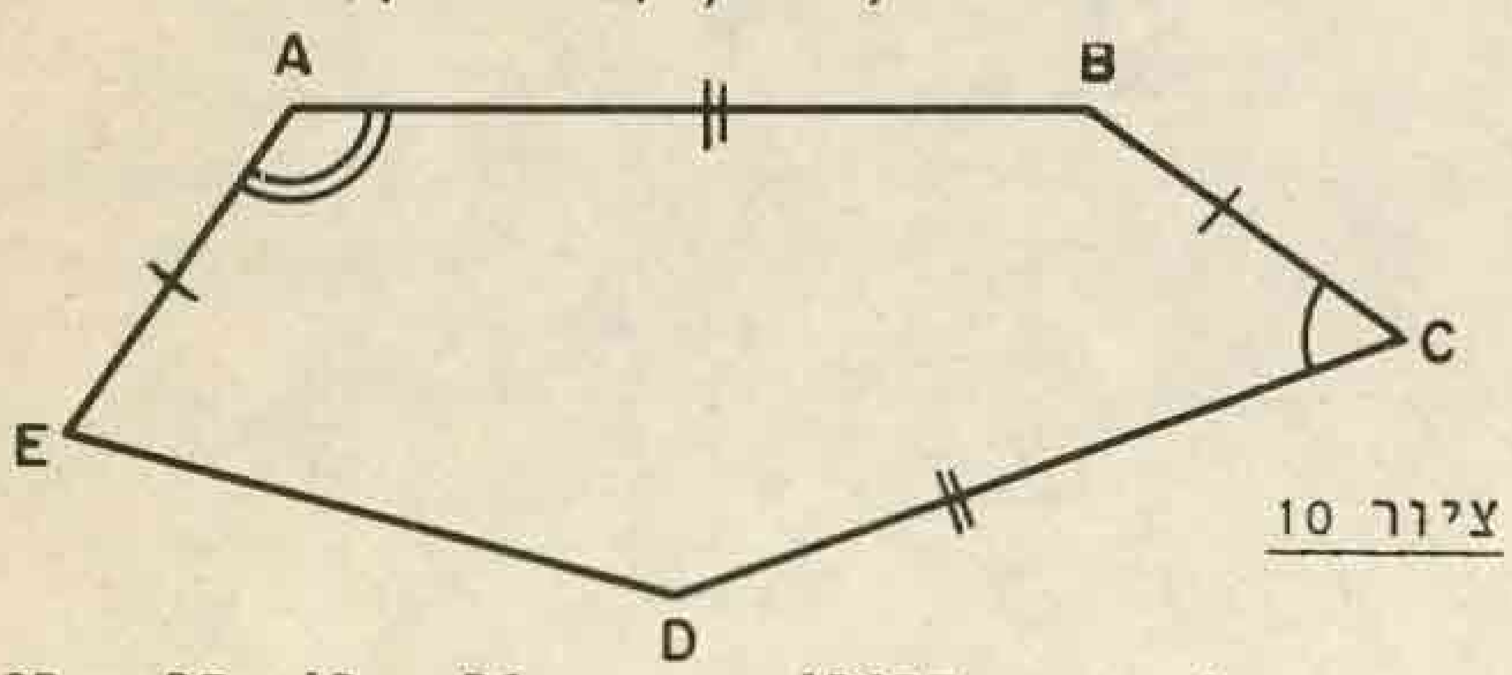
משפט 5 מחומש קמור המקיים אחד התנאים הבאים הוא צורה טובה -

1) אם יש בו זוג צלעות מקבילות (ציור 9).



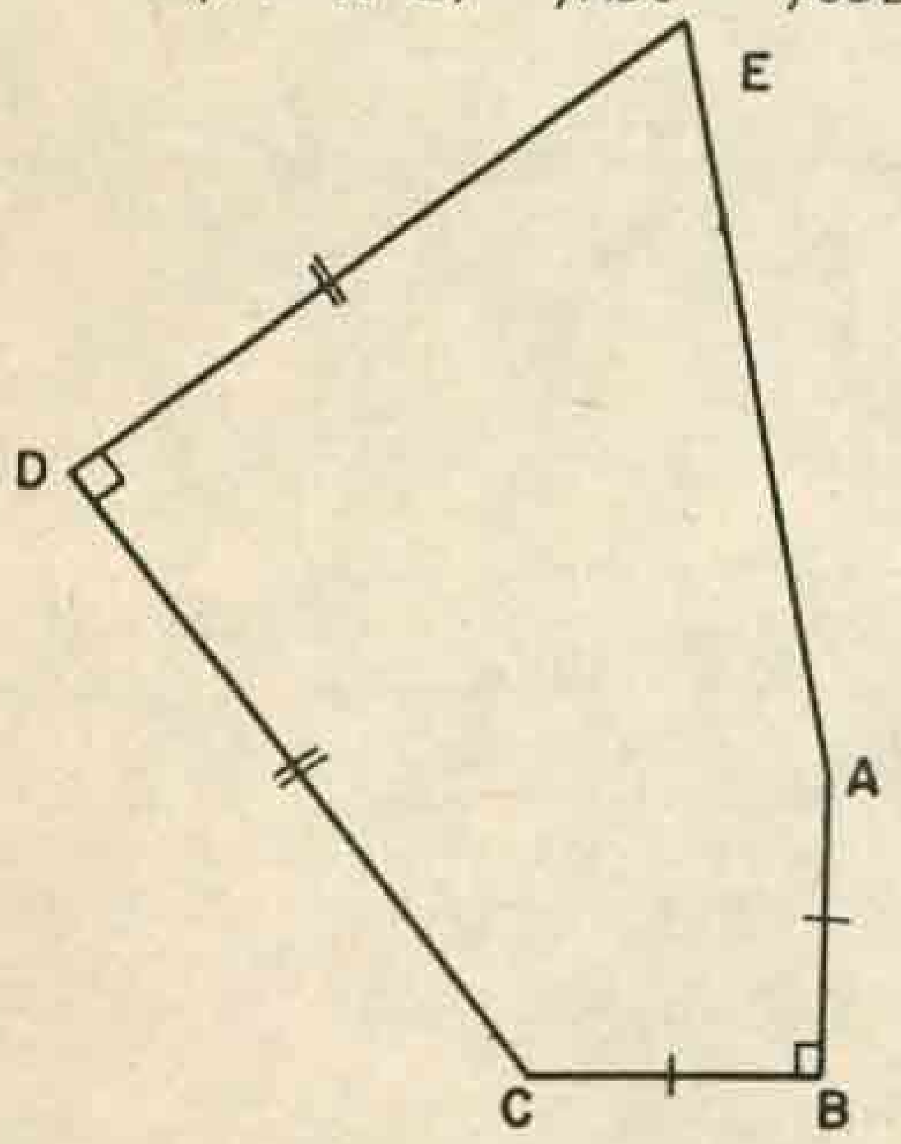
ציור 9

2) מחומש ABCDE אשר בו $AE = BC$, $AB = CD$, $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ (ציור 10).



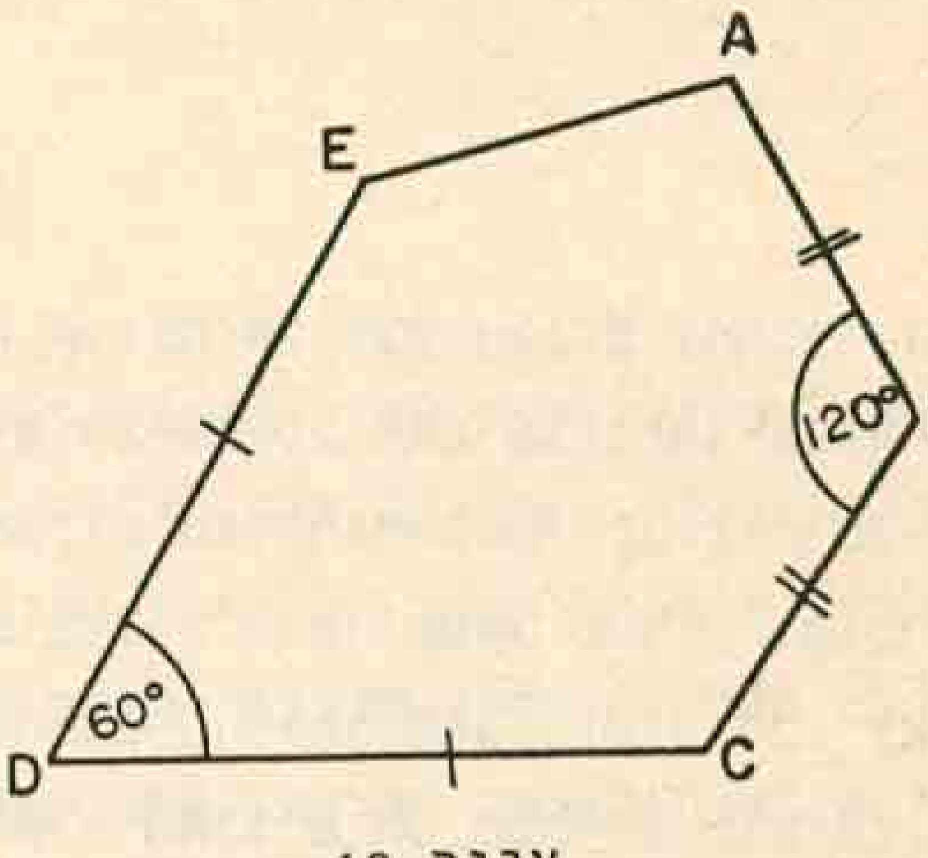
ציור 10

3) מחומש ABCDE אשר בו $AB = BC$, $CD = DE$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 90^\circ$ (ציור 11).



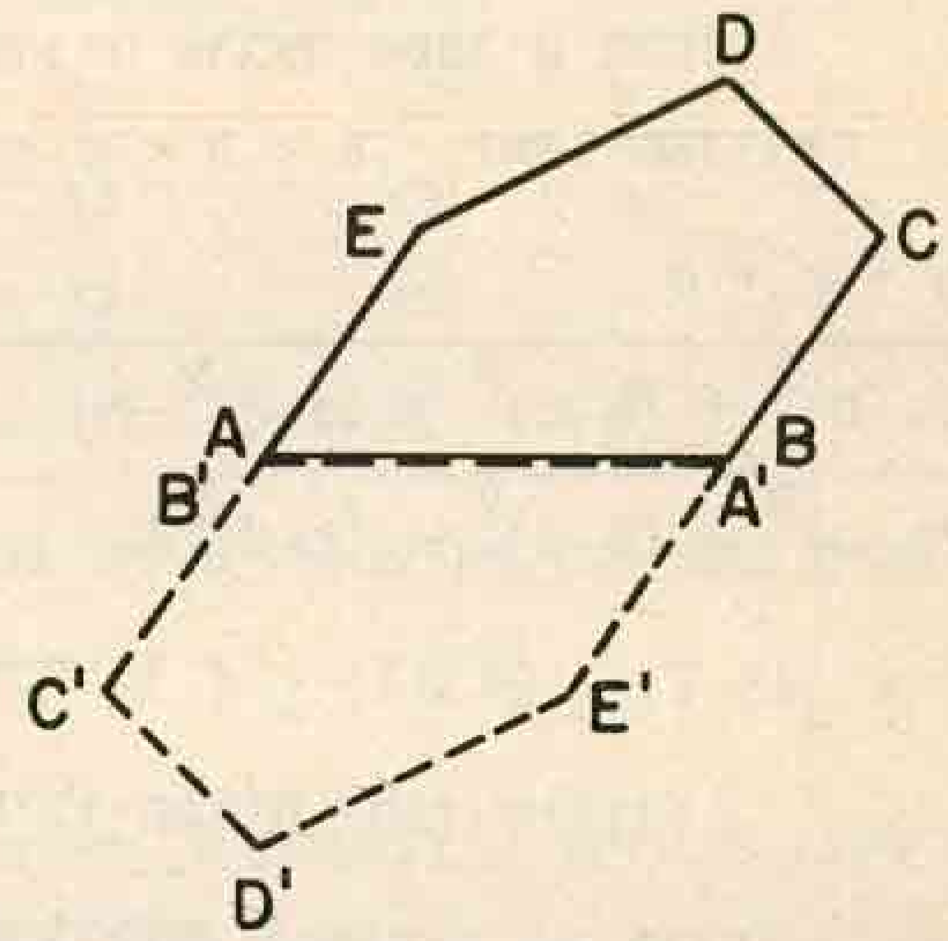
ציור 11

4) כאשר $AB = BC$, $CD = DE$, $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDE = 60^\circ$ (ציור 12).



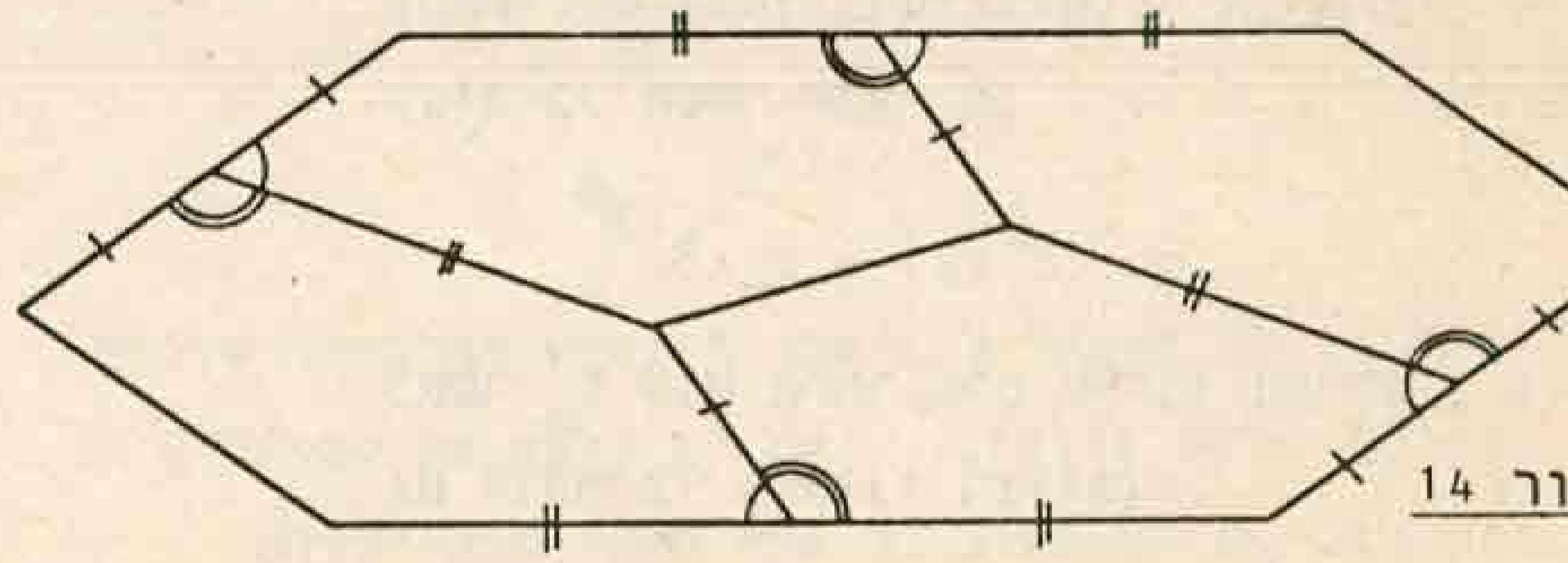
ציור 12

<u>הוכחה</u> 1) כי משני מחומשים כאלה אפשר להרכיב משושה משופר (ציור 13).



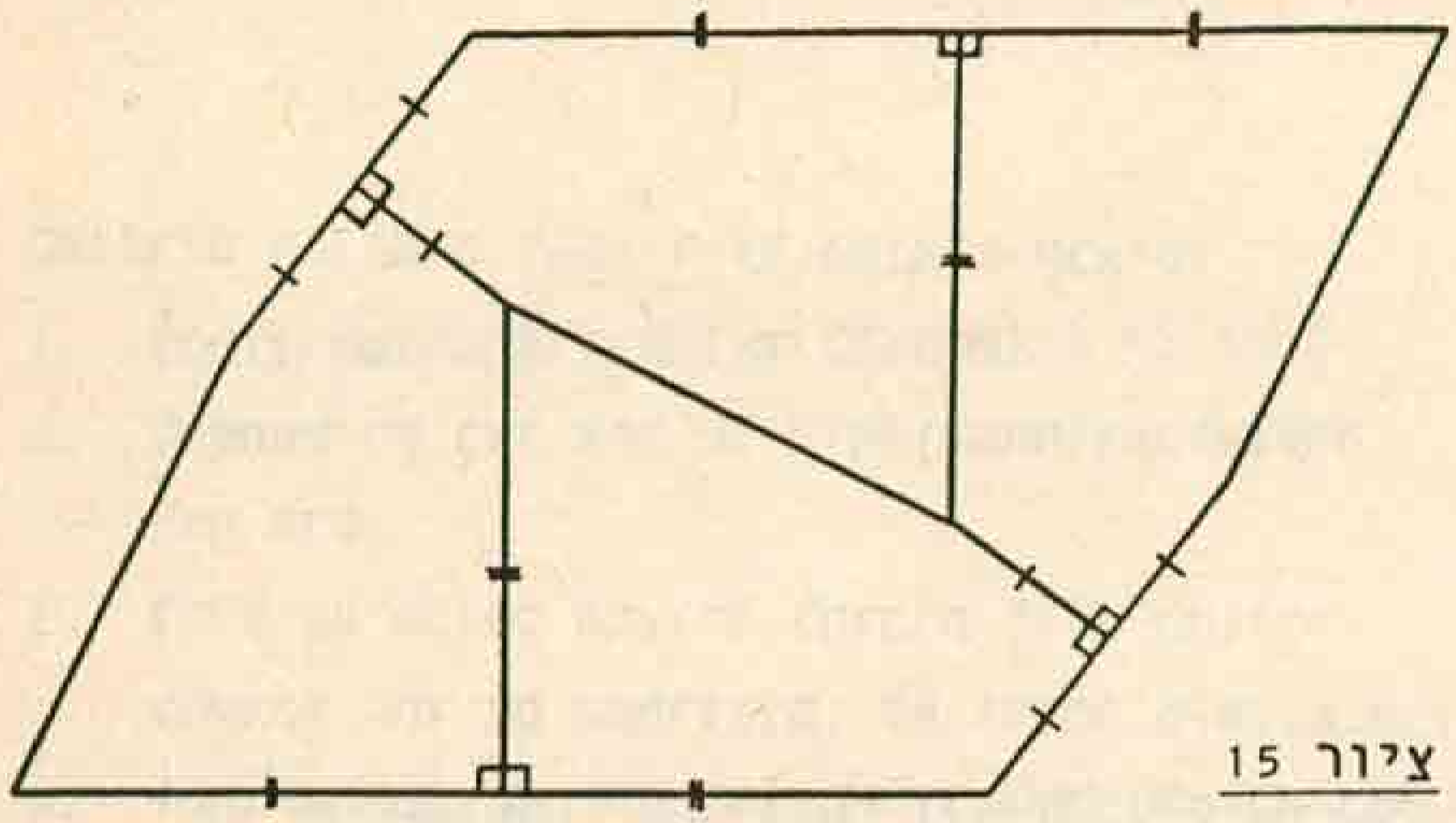
ציור 13

2) אם ניקח במקרה זה ארבעה עותקים של מחומש שבציור 11 ונחבר אותם כפי שמתואר בציור 14, נקבל שוב משושה משופר.



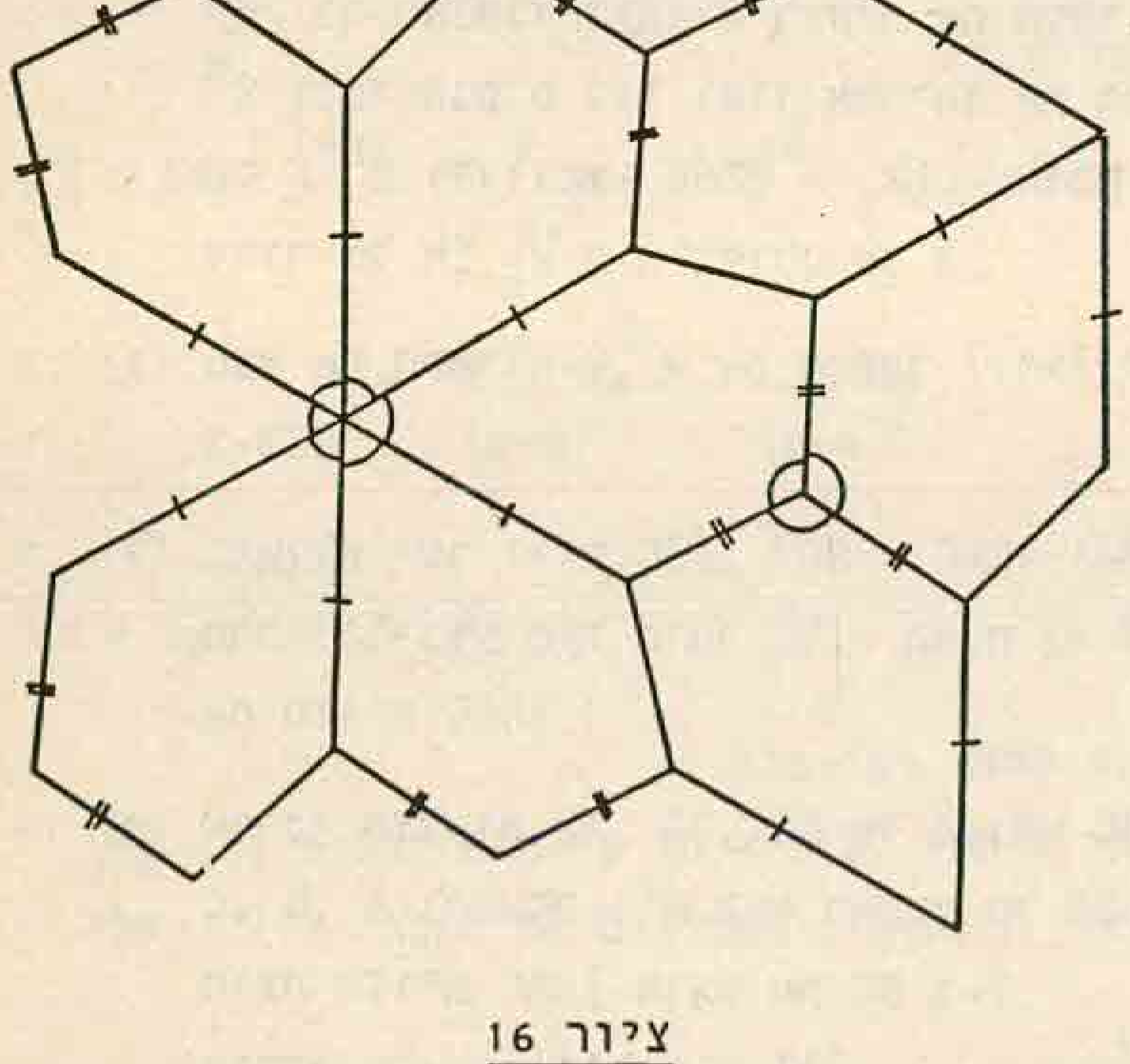
ציור 14

3) גם כאן דרושים ארבעה מחומשים כדי לבנות משושה משופר, וניתן לראות בציור 15 את רעיון הבניה.



ציור 15

4) במקרה זה, שלא כמו בשלושת המקרים הקודמים, מתבססת הבניה במישרין על המחומשים עצמם ואינה נזקקת לתחבולה של יצירת משושים משופרים. ציור 16 מציג את שיטת הכסוי.



ציור 16

אין ספק שקיימות צורות טובות רבות בנוסף על אלה שנסקרו במאמר זה. אולי ירצו הקוראים לנסות לזהות מצולעים טובים אחרים וגם לחשוב על השאלה, האם קיימות צורות טובות שאינן מצולעים (דהיינו צורות ששפתן אינה מורכבת כולה מקטעי ישרים).

4(3) הוכח כי אם $\sqrt{3^a + 1}$ הוא מספר שלם (כאשר a הוא מספר טבעי) אזי הוא צריך להיות בעל הצורה $3^b + 1$ כאשר b הוא מספר טבעי (הוצע על ידי רון עדין).

בשאלה זו נפלה טעות דפוס מצערת. למעשה קל להוכיח שהערך היחיד של המספר הטבעי a אשר עבורו $\sqrt{3^a + 1}$ הוא מספר שלם הוא $a = 1$, $2 = \sqrt{3^a + 1}$. כי מאחר ש- $(3^a + 1)$ איננו מתחלק ב 3, יוצא כי $\sqrt{3^a + 1}$, אם הוא שלם, חייב להיות מהצורה

$$3^b x \pm 1$$

כאשר x איננו מתחלק ב 3; וברור כי $a \geq b$.

אבל אז,

$$3^a + 1 = 3^{2b} x^2 \pm 2x \cdot 3^b + 1$$

ולכן

$$3^{a-b} - 3^b x^2 = \pm 2x$$

אם $a > b > 0$, אזי האגף השמאלי מתחלק ב-3, ולכן גם 2x מתחלק ב-3, בניגוד למה שכבר נקבע. לא יתכן ש- $a = b > 0$, כי אז היה

$$3^b x^2 = 1 \pm 2x$$

אבל

$$3^b x^2 - (1 \pm 2x) > x^2 - (1 \pm 2x)$$

$$= (x \pm 1)^2 \geq 0$$

האפשרות היחידה היא איפוא $b = 0$

ואז

$$3^a = x(x \pm 2)$$

מאחר ש-x איננו מתחלק ב-3 נשארת האפשרות היחידה $x = 1$, $a = 1$

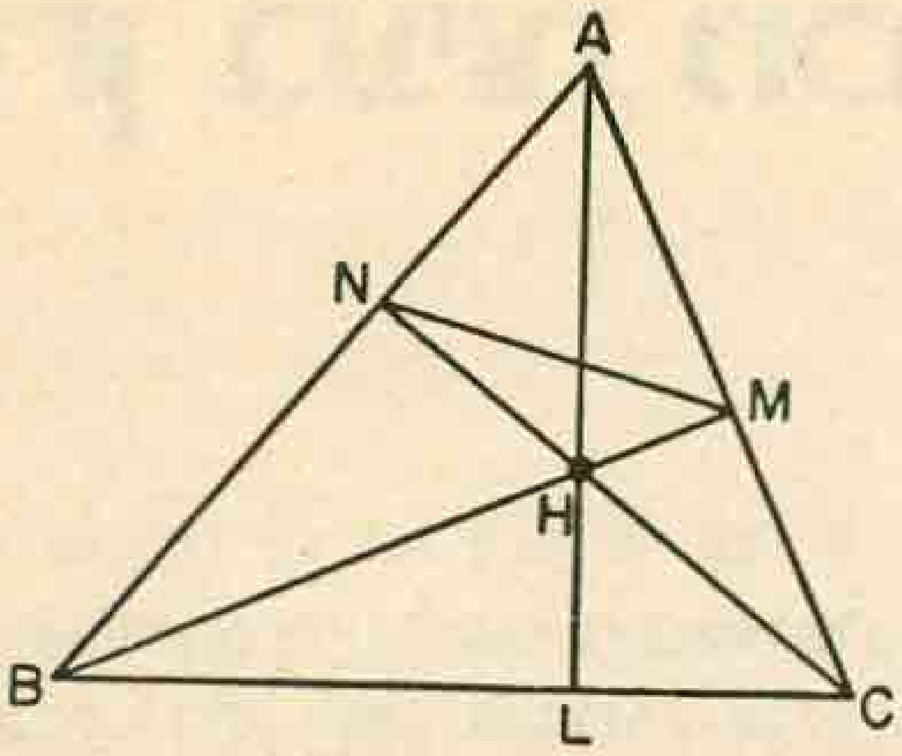
$$3^1 = 1(1+2)$$

5(4) AL, BM, CN שהם הניצבים מקדקדי המשולש ABC לצלעות המנוגדות, נפגשים בנקודה H. אם c, b, a הם אורכי הצלעות AB, CA, BC בהתאמה ו- r, q, p הם קוטרי המעגלים החוסמים את המשולשים, HLM, HNL, HMN בהתאמה, הוכח כי

$$\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab} = 1$$

וכי

$$pqr \leq 3^{-3/2} abc$$



נסמן את הזוויות $\measuredangle BAC$, $\measuredangle CBA$, $\measuredangle ACB$ ב-α, β, γ בהתאמה. מאחר ש-

$$\measuredangle HCM = 90° - \alpha$$

יוצא כי

$$HM = CM\cot\alpha$$

$$= a\cos\gamma\cot\alpha$$

מאידך $\measuredangle HNA = \measuredangle HMA = 90°$ ולכן המעגל על הקוטר HA עובר דרך M ו-N. מכאן ש-

$$\measuredangle HNM = \measuredangle HAM$$

$$= 90° - \gamma$$

ממשפט הסינוסים נובע כי

$$p = \frac{HM}{\sin(\measuredangle HNM)}$$

$$= a\cot\alpha$$

וכמו כן $q = b\cot\beta$, $r = c\cot\gamma$. יוצא כי

$$\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab} = \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma)\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\{\cos\beta\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)\}$$

$$= 1.$$

ממשפט הממוצעים נובע עכשיו כי

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab}\right)$$

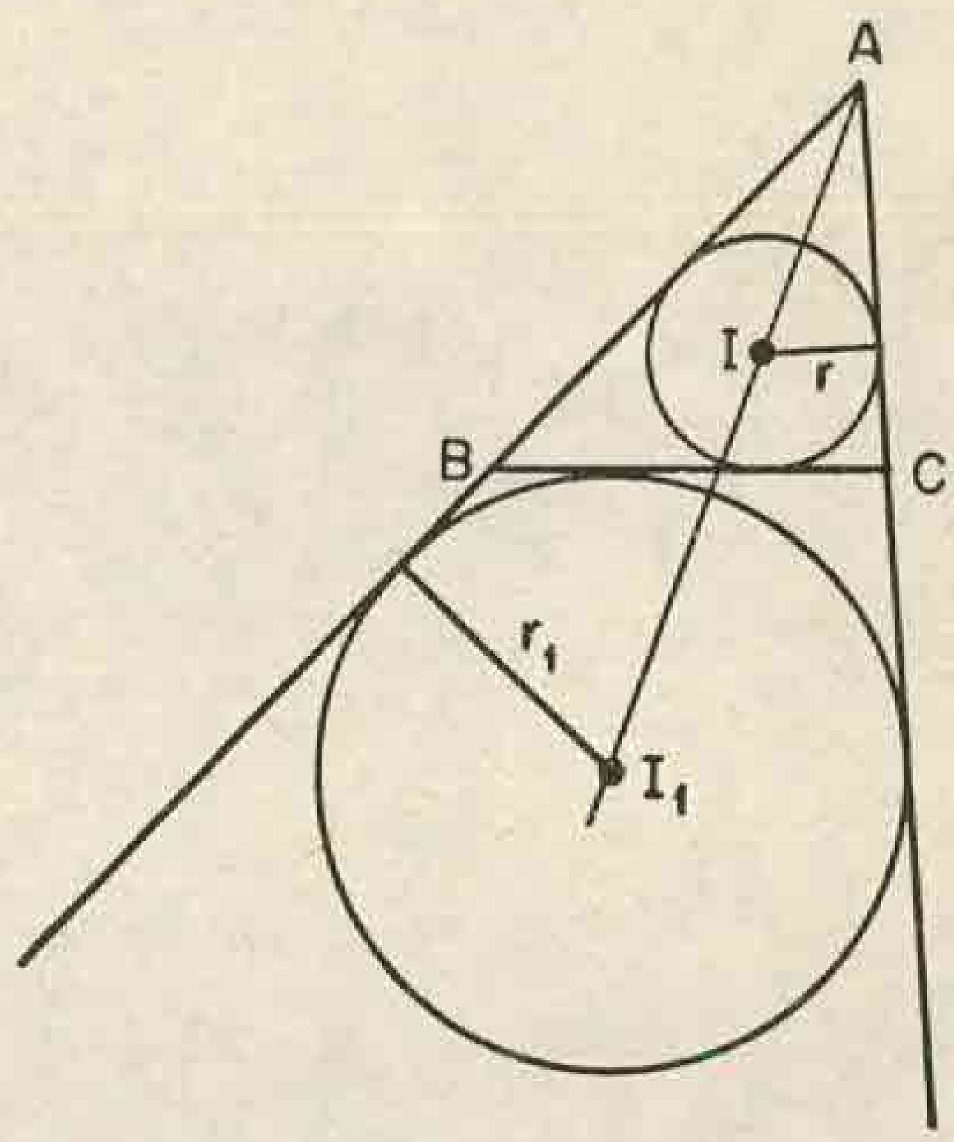
$$\geq \sqrt[3]{\frac{qr}{bc}\cdot\frac{rp}{ca}\cdot\frac{pq}{ab}}$$

$$= \left(\frac{pqr}{abc}\right)^{2/3}$$

והמסקנה מידית.

6(4) r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש ABC ואילו r_1, r_2, r_3 הם הרדיוסים של המעגלים החסומים באותו משולש מבחוץ. הוכח כי שטח המשולש הוא:

$$S_{ABC} = \sqrt{rr_1r_2r_3}$$



יהיו c, b, a אורכי הצלעות AB, CA, BC בהתאמה, I מרכז המעגל החסום ו-I_1 זה של המעגל החסום מבחוץ מול הצלע BC (ראה ציור).

נגדיר $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

רואים כי

$$S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= pr$$

מאידך

$$S_{ABC} = S_{I_1AB} + S_{I_1AC} - S_{I_1AB}$$

$$= \frac{1}{2}r_1(c+b-a)$$

$$= (p-a)r_1$$

וכמו כן

$$S_{ABC} = r_2(p-b) = r_3(p-c)$$

ע"י הכפלה, מקבלים

$$(S_{ABC})^4 = rr_1r_2r_3 \times p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= rr_1r_2r_3 \times (S^2_{ABC})$$

לפי נוסחת הירון, מכאן

$$(S_{ABC})^2 = rr_1r_2r_3$$

7(4) בהצגת מספר מסויים לפי בסיס הספירה 5 ישנן 26 ספרות, מהן 8 פעמים הספרה 4, 6 פעמים 3, ואילו הספרות 2, 1, 0 מופיעות 4 פעמים כל אחת. הוכח כי ללא קשר מה הוא סדר הופעתן של הספרות השונות, המספר לא יוכל להיות ריבוע משוכלל.

באופן כללי אם נציג מספר טבעי N, לפי בסיס ספירה כלשהו r, ז.א.

$$N = a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} \dots + a_{n-1}r + a_n$$

ונחשב את סכום הספרות

$$S = a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1} + a_n$$

נקבל

$$N - S = a_0(r^n-1) + a_1(r^{n-1}-1) + \dots + a_n-1(r-1)$$

כל אחד מ-n המחוברים האלה מתחלק ב-$(r-1)$ ולכן הוא הדין לגבי N-S. במקרה שלנו $r = 5$ ולכן N-S מתחלק ב-4. אבל

$$S = 8\times4 + 6\times3 + 4\times2 + 4\times1 + 4\times0$$

$$= 62$$

ולכן N - 62 מתחלק ב-4. יוצא כי N הוא מספר זוגי שאינו מתחלק ב-4 ולכן לא יוכל להיות רבוע משוכלל.

8(5)הסדרה $\{a_k\}$ של מספרים ממשיים מקיימת:

$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \le a_{k+1} \le \dots$$

הוכח כי, עבור כל n טבעי,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} < 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1+\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) + \dots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 2$$

9(5)הוכח (בלי להשתמש בטבלאות) כי:

$$\cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{3\pi}{11} + \cos^3 \frac{5\pi}{11} +$$

$$\cos^3 \frac{7\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

נסתמך על שלוש נוסחאות ידועות

(1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(2) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(3) $\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$

עבור כל r טבעי, נגדיר

$$c_r = \cos\frac{(2r-1)\pi}{11}$$

מ-(1) מקבלים

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)$$

ולכן

$$c_1^{\,3} = \cos^3\frac{\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_1 + c_2)$$

כמו כן

$$c_2^{\,3} = \cos^3\frac{3\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_2 + c_5)$$

$$c_3^{\,3} = \cos^3\frac{5\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{15\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_3 + c_4)$$

ובדרך דומה

$$c_4^{\,3} = \cos^3\frac{7\pi}{11} = \frac{1}{4}(3c_4+c_1)$$

$$c_5^{\,3} = \cos^3\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{4}(3c_5+c_3)$$

אם נחבר את כל אלה נקבל

$$\sum_{x=1}^{5} c_x^{\,3} = \sum_{x=1}^{5} c_x$$

ולכן נשאר להוכיח כי

$$\sum_{x=1}^{5} c_x = \frac{1}{2}$$

הזויות $\theta = \frac{(2r-1)\pi}{11}$ מקיימות כולן

$$6\theta + 5\theta = (2r-1)\pi$$

ולכן $\cos 6\theta = -\cos 5\theta$

דהיינו, לפי (2) ו- (3)

$$32\cos^6\theta + 16\cos^5\theta - 48\cos^4\theta - 20\cos^3\theta +$$
$$+ 18\cos^2\theta\ 5\cos\theta - 1 = 0$$

פתרונות המשוואה הזאת הם למעשה

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

מנוסחת ויטה אנו מקבלים

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = -\frac{16}{32}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

אבל $c_6 = \cos\pi = -1$

ולכן $\sum_{r=1}^{5} c_r = +\frac{1}{2}$

10 (6) $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ הם פולינומים ונתון כי, עבור כל x,

$$P(x^3)+xQ(x^3)+x^2R(x^6) = (1+x^2+x^4)S(x)$$

הוכח כי $(x-1)$ הוא גורם של $P(x)-S(x)$.

יספיק אם נוכיח כי $P(x) - S(x)$ מתאפס כאשר מציבים $x = 1$, דהיינו ש- $P(1) = S(1)$.
נכתוב p, q, r, s עבור $P(1), Q(1), R(1), S(1)$ בהתאמה. נשתמש גם במספר המדומה

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \qquad (1)$$

רואים מיד כי

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \qquad (2)$$

$$\omega^3 = 1 \qquad (3)$$

ו- $$1 + \omega + \omega^2 = 0 \qquad (4)$$

התנאי הנתון הוא

$$P(x^3) + xQ(x^3) + x^2R(x^6) = (1+x^2+x^4)S(x) \qquad (5)$$

אם נציב $x = 1$, נקבל

$$p + q + r = 3s \qquad (6)$$

עכשיו נציב $x = \omega$. מ-(3) נובע כי גם

$$\omega^6 = 1$$
$$1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega$$
$$= 0$$

ההצבה נותנת איפוא

$$p + \omega q + \omega^2 x = 0 \qquad (7)$$

וכמו כן, ע"י הצבת $x = \omega^2$, מקבלים

$$p + \omega^2 q + \omega x = 0 \qquad (8)$$

אם נחבר (8), (7), (6) נקבל

$$3p + q(1+\omega+\omega^2) + x(1+\omega^2+\omega) = 3s$$

ולכן, בגלל (4),

$$p = s$$

רשימת הפותרים מכרך 6 מס' 4

אלטמן צ.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	16
ארליך נ.	הראייה, רמת-גן (י')	10
בוגוסלובסקי ו.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	11
ברכה ג.	צה"ל	27
שוטי ב.	תיכון אורתודוכסי ערבי, חיפה (י"ב)	8
גירון שי	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	27
ויסמן א.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	10
פלוטניק מ.	הריאלי העברי, חיפה (י')	2
פרץ נורית	בת-ים	11
קליין מ.	אוניברסיטת תל-אביב (י')	32
רוט ד.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	34
רוטיץ נ.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	15
רומנו ר.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	11
שטולברגר א.	נתניה	6
שרייבר א.	צה"ל	5

מעולם המחשבים

בעריכת נחמן גבעולי

שגרה ותת-שגרה

אחת הפונקציות הידועות בתורת המספרים היא סכום המחלקים. לכל מספר טבעי N אנו מיחסים את המספר $\sigma(N)$, שהוא סכום כל מחלקי N.

לדוגמא: $\sigma(12) = 28$, כי סכום מחלקי 12 היא

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

מספר משוכלל הוא, כידוע, מספר השווה לסכום של אלה מבין מחלקיו הקטנים ממנו.

נשים לב כי $\sigma(N)$ הוא הסכום של כל מחלקי N, כולל N עצמו, ולכן סכום המחלקים הקטנים מ-N הוא $\sigma(N) - N$. יוצא כי N יהיה מספר משוכלל אם $\sigma(N) - N = N$, ד.א. $\sigma(N) = 2N$.

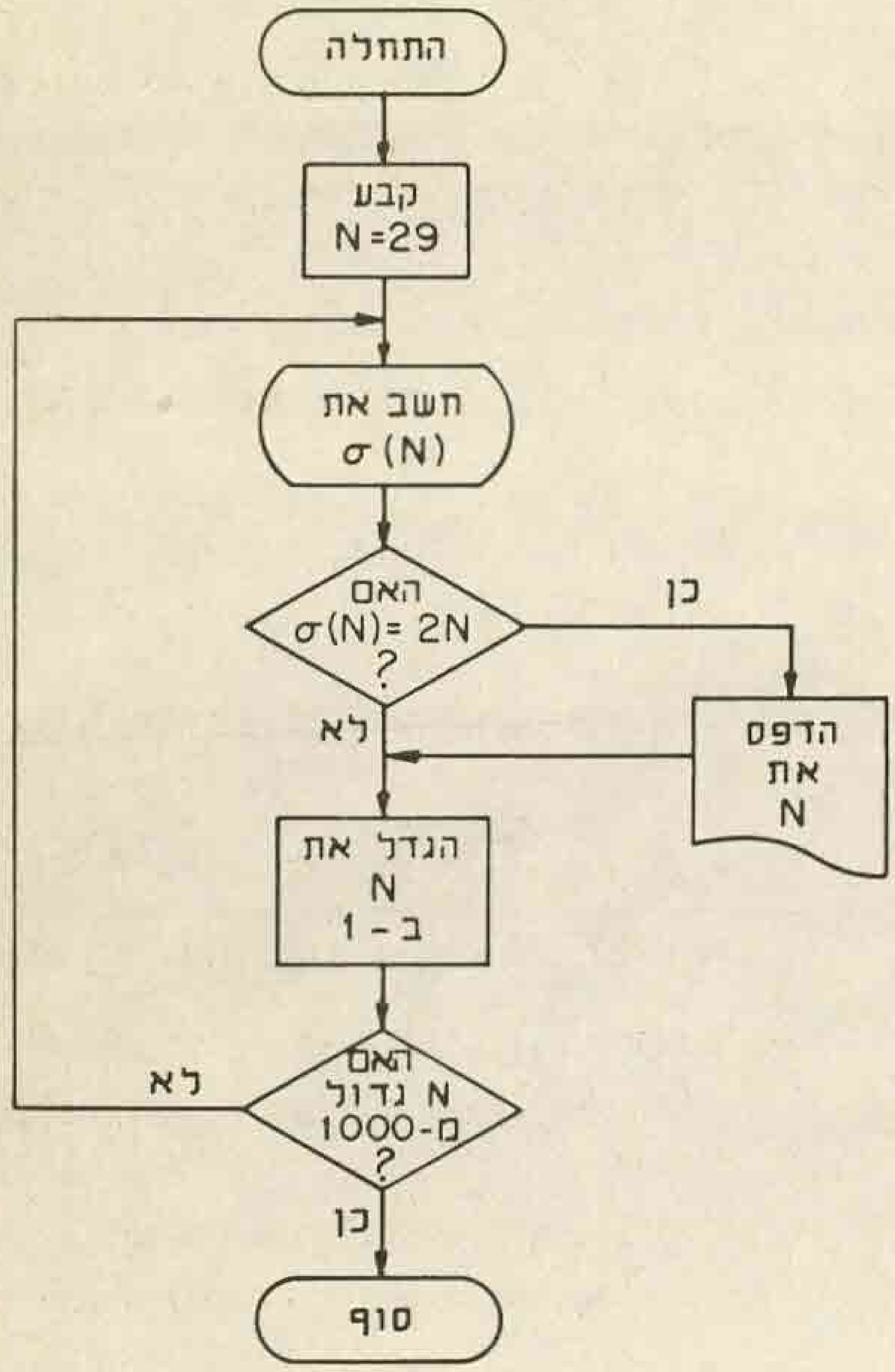
שני המספרים המשוכללים הקטנים ביותר הם:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \qquad 6 = 1 + 2 + 3$$

המחשב יכול לעזור בגילוי מספרים משוכללים נוספים. התוכנית לחישוב מספרים אלה (עד 1,000 נניח), היא פשוטה יותר:

אנו מתחילים ב- $N = 29$ (כי המספרים המשוכללים הקטנים מזה כבר ידועים לנו), ועוברים דרך כל המספרים השלמים עד 1000, תוך בדיקה מתי סכום המחלקים שווה ל-N. ברור שההוראה "חשב את $\sigma(N)$" איננה הוראה פשוטה, היכולה להינתן כפקודה ישירה למחשב. למעשה היא מורכבת מפעולות-מחשב רבות למדי, והתכניתן חייב לפרטן כדי שהמחשב יוכל לבצע את התכנית. ברם, בתרשים הסכימתי אפשר להסתפק בייצוג כל התהליך במשבצת אחת, ולהקל בכך על הבנת התרשים. עם זאת ברור למעיין בתרשים כי משבצת זו אינה הוראה בודדת אחת, אלא קבוצת הוראות, אשר לה תפקיד מוגדר - במקרה זה, לחשב את סכום המחלקים של מספר נתון.

קבוצת הוראה כזו, שהיא למעשה קטע-תכנית עם תפקיד מוגדר, נקראת שגרה (רוטינה). מה שמאפיין שגרה



(לעומת תת-שגרה, עליה נעמוד להלן), היא העובדה, שהשגרה משולבת בזכרון בתוך התכנית, ואין שום חציצה או הפרדה בינה ובין ההוראות שלפניה ושלאחריה. לפעמים האבחנה היחידה בין השגרה ובין יתר חלקי התכנית מתבטאת רק בתרשים הסכימתי הראשון, ואילו בשלבים מתקדמים יותר של פירוט התכנית נעלמת אבחנה זו. לפעמים נשארת האבחנה בתוקפה גם בהמשך, למשל - כאשר השגרה ויתר חלקי התכנית נכתבים בידי תכניתנים נפרדים. ישנן גם שגרות מוכנות, שנכתבו מראש, והן עומדות לרשותו של כל תכניתן המזדקק להן. למשל, בכל מרכז-מחשבים העוסק בחישובים מתמטיים קיימת בודאי שגרה מוכנה, המחשבת שורש ריבועי. במקום שבו עוסקים הרבה בתורת המספרים, ישנה אולי גם שגרה

מוכנה לחישוב הפונקציה σ הנ"ל. התכניתן איננו חייב במקרה זה לפרט את המשבצת הנדונה, כי יוכל לקבל קטע-תכנית זה מן המוכן, ולשלב אותו בתכניתו

תת-שגרה (סוב-רוטינה) אף היא קטע-תכנית בעל תפקיד מוגדר אלא שכאן הדגש הוא על העובדה שקטע-תכנית זה דרוש בתכנית יותר מפעם אחת. כדי להבהיר זאת ניקח את הדוגמא של חישוב מספרים מיודדים.

שני מספרים טבעיים נקראים מיודדים, אם כל-אחד מהם שווה לסכום מחלקי האחר הקטנים ממנו. במילים אחרות, אם K ו-L מקיימים

$$\sigma(K) - K = L \quad : \quad \sigma(L) - L = K$$

במלים אחרות $\sigma(K) = \sigma(L) = K + L$

- אזי K ו- L הם מיודדים. שני המספרים המיודדים הקטנים ביותר הם 220 ו- 284, כ-

$$\sigma(220)-220 = 1+2+4+5+10+11+20$$
$$+22+44+55+110 = 284$$

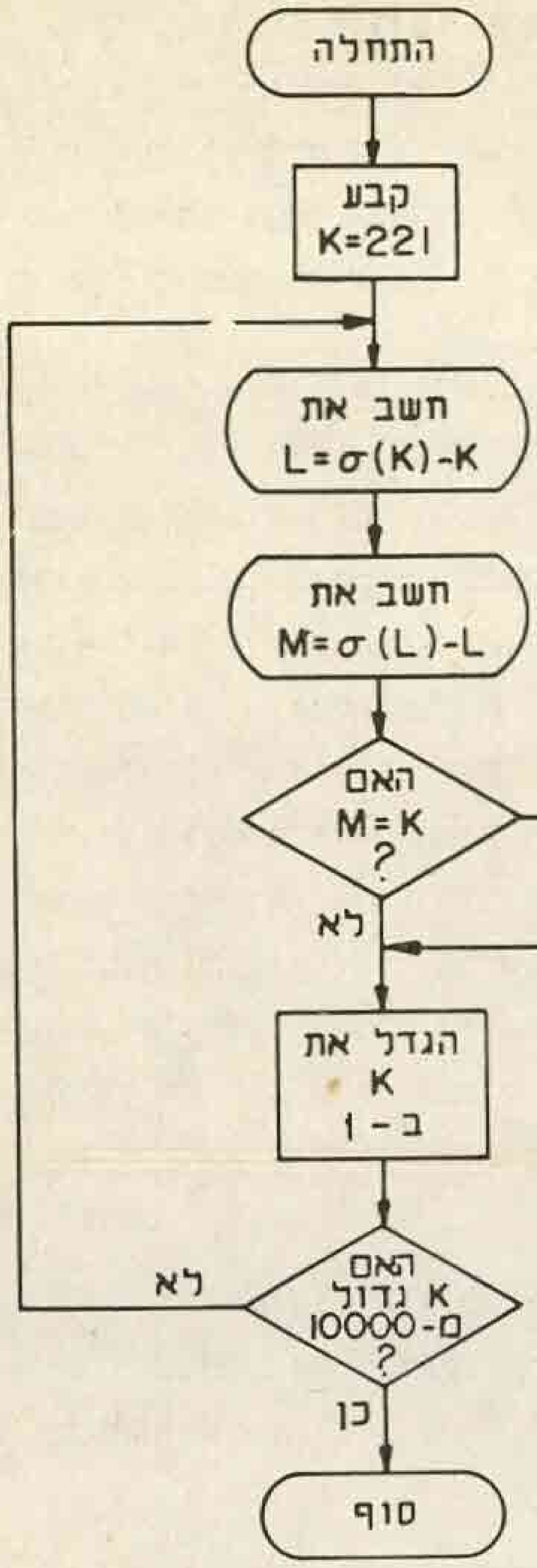
$$\sigma(284)-284 = 1+2+4+71+142 = 220$$

שוב נוכל להעזר במחשב למציאת עוד זוגות של מספרים מיודדים. נלך הפעם עד 10,000. תרשים התכנית מתואר בעמודה הבאה.

כאן מופיעה למעשה פעמיים אותה השגרה: חישוב סכום מחלקים של K (שהוא L), וחישוב סכום המחלקים של L (שהוא M). אם יפרט התכניתן את השגרה במלואה, יווכח שהיא ארוכה למדי.

פירוש הדבר שאותו קטע-תכנית ארוך ייכלל בתכניתו פעמיים. דבר זה גורם לעבודה כפולה של התכניתן - עליו לפרט פעמיים אותה קבוצה של הוראות - וידוע כי אין דבר השנוא על תכניתן יותר מן הצורך לפרט אותן ההוראות פעמיים; זאת לאו-דוקא מחמת עצלות, אלא בעיקר משום שהדבר איננו נראה לו אלגנטי. סיבה מעשית יותר היא, שהתכנית מתארכת ותופסת יותר מקום בזכרון. כמו כן, קיים כלל גדול בתכנות: מרבה הוראות מרבה טעויות; התכנית נעשית מסורבלת ומפסידה מפשטותה ומבהירותה.

אי לכך, אומר התכניתן לעצמו: חישוב סכום המחלקים של מספר נתון יכול להיות שגרה נפרדת, המוחסנת בפינה צדדית, כביכול, של המחשב. בכל עת שאזדקק



לשגרה אדלג אליה, ולאחר החישוב אחזור אל התכנית העיקרית. בשיטה זו, השגרה הארוכה של חישוב סכום המחלקים נכתבת ונמצאת בזכרון המחשב רק פעם אחת, אך הדילוג אליה מתבצע משני מקומות נפרדים בתכנית.

ברור שיש לספק לשגרה את המספר הנתון ולקבל ממנה את התוצאה. לכן צריך להיות תא מיוחד בזכרון, שנסמנו ב-X, שבו התכניתן מספק לשגרה את הארגומנט, וכן תא Y, שבו הוא מקבל ממנה את ערך הפונקציה. פירוש הדבר שלפני הכניסה לשגרה חייבת להינתן הוראה מיוחדת, המכניסה את הארגומנט לתא X, ובגמר השגרה חייבת לבוא הוראה, הנוטלת את ערך הפונקציה מהתא Y.

ברם, בכך אין די. מתעוררת השאלה, איך יכול המחשב לדעת, בגמר פעולת השגרה, לאן עליו לחזור? הרי הדילוג אל השגרה מתבצע ממקומות שונים בתכנית, והחזרה צריכה להיות תמיד אל המקום שממנו היה הדילוג.

בעיה זו נפתרת בדרכים שונות, שעיקרן הוא זה: לפני הדילוג לשגרה, או ברגע הכניסה אליה, רושמים בזכרון המחשב מעין תמרור, שבו מצויין מהיכן נעשה הדילוג. בגמר פעולת השגרה נבדק התמרור ובהתאם למצוין בו מתבצע הדילוג בחזרה אל התכנית העיקרית.

מסירת הנתון (או הנתונים) לשגרה, קבלת התוצאה, יצירת התמרור המציין את נקודת הדילוג, הדילוג לשגרה, בדיקת התמרור בגמר השגרה, הדילוג בחזרה - כל הפעולות הללו גורמות לכך שהשימוש בתת-שגרה מאריך את משך הביצוע של התכנית יותר מאשר אילו היתה השגרה משולבת בגוף התכנית בכל מקום בו היא דרושה. יש לשקול איפוא את הפסד הזמן לעומת הרווח בתפוסת הזכרון ובטרחתו של התכניתן. כמו-כן ברור כי במקרה של תת-שגרה קטנה, הדרושה רק בשנים או בשלושה מקומות בתכנית, אין כמעט, או אין בכלל, רווח בתפוסת הזכרון. השכר הנובע מכך שהשגרה נמצאת בזכרון רק פעם אחת, במקום פעמיים או שלוש, יוצא בהפסד של ההוראות הנוספות הנ"ל הדרושות להפעלת השגרה.

לסיום, כבעיה לקוראינו, אנו מציעים לכם לפרט את תרשים השגרה המחשבת את הפונקציה σ - היינו סכום מחלקיו של מספר נתון.

פתרון הבעיה בחוברת הקודמת

תרשים הזרימה שבציור, אם נתעלם מהקו המרוסק, התיימר לתאר תכנית המסדרת בסדר עולה כל שלושה מספרים נתונים. אם נניח שהמספרים הנתונים X, Y ו- Z הם 1, 2 ו-3 קיימות שש אפשרויות של סדר התחלתי של המספרים הללו:

321, 312, 231, 213, 132, 123

מתוך אלו, רק בארבעה מקרים תשיג התכנית את מטרתה, ואילו בשני המקרים הנותרים, המסומנים בקו, לא יתקבל סדר עולה של המספרים.

אנו מציעים לקוראים שינסו לעקוב אחר פעולת התכנית המוצעת במקרים אלה, צעד אחר צעד, כדי להיווכח שזה אמנם המצב.

תיקון התרשים הוא פשוט: במקום לסיים אחרי המשבצת התחתונה, חזור שוב לתחילת התכנית. במלים אחרות - הוסף את הקו המרוסק.