גליונות מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים

כרך 7 מס' 1

יוצא לאור בחסות
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

העורך י. גיליס

צפי הרצל

עם הופעת חוברת זו אנו פותחים כרך 7 של "גליונות מתמטיקה". נסינו להגיש הפעם חוברת מגוונת ועל הקוראים לשפוט את מידת הצלחתנו. בין השאר הוצאנו מגנזי העתון "דפים למתמטיקה ופיסיקה", מאמר שחיבר פרופ' ת.ש. מוצקין ז"ל בפברואר 1944, בצירוף כמה פרטים אישיים על המתמטיקאי הדגול הזה.

החוברת החדשה היא השניה המופיעה בשנ"ל זו. הוצאת שתי חוברות במשך שנת לימודים אחת כרוכה במאמצים גדולים מצד כל המתנדבים לעבודה ואנו תקוה כי התוצאות יצדיקו את המאמצים האלה.

תוכן הענינים

בעיות בלוח הכפל

ת.ש. מוצקין ז"ל

לוח-הכפל, המכשיר האדיר לביצוע פעולות הכפל והחילוק בשיטה העשרונית, שגור אצלכם כבר במשך רוב שנות חייכם ולכן אולי תביטו מלמעלה על נושא כה פשוט; אך הבה נראה האם אין טמונים גם בו דברים משונים, חדשים או עמוקים יותר.

אני מניח כי לוח-כפל מונח לפני עיניכם, הגשמיות או הרוחניות, ברגע זה. אבל ישנן שיטות עזר המכוונות למנוע את הצורך בלוח זה בכלל, ונציג שיטה אחת כזאת בעזרת דוגמאות.

דוגמא

א. נניח שרוצים לחשב 37×51. שיטה אחת היא לכתוב את שני הגורמים זה על יד זה. עכשיו ממלאים שני טורים. את הטור האחד (טור החילוק) מקבלים ע"י חילוק חוזר של המספר ב-2, בלי להתחשב בשארית, עד שמגיעים בסוף לתוצאה 1. את הטור השני (טור ההכפלה) מקבלים ע"י הכפלה חוזרת ב-2. במקרה שלנו נקבל את שני הטורים שבטבלה 1.

פרופ' תיאודור שמואל מוצקין ז"ל נולד בגרמניה בשנת 1908, בן למנהיג הציוני הותיק, ליאו מוצקין. למד מתמטיקה בגטינגן וברלין וגמר את עבודת הדוקטור בבזל, שויצריה, בשנת 1934. נושא עבודה זו היה אי-שויונים לינאריים וכמה מהתוצאות שהשיג נמצאות בשימוש עד היום בעיקר בתורת המשחקים ובתיאוריה של תכנות לינארי. אחרי שקיבל את הדוקטורט עלה ארצה והצטרף לסגל המתמטי של האוניברסיטה העברית, שם עבד עד 1948. משנת 1950 עד מותו ב-1970 היה פרופ' למתמטיקה באוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס. בעבודתו המדעית הצטיין לא רק כחוקר מבריק אלא גם כמורה מסור שידע למשוך תלמידים למקצוע. רבים מהמדענים הידועים היום בארץ נמנים על תלמידיו.

טבלה 1

טור החילוק	טור ההכפלה	
37	51	+
18	102	
9	204	+
4	408	
2	816	
1	1632	+
	1887	

עכשיו מחברים יחד את אותם האיברים בטור ההכפלה שנמצאים מול איבר בלתי זוגי בטור החילוק. הסכום שמתקבל הוא המכפלה של שני המספרים המקוריים. קל לבדוק כי אמנם

$$37 \times 51 = 1887$$

דוגמא ב'

בטבלה 2 אנו מדגימים את הפעלת שיטה זו לחישוב של 419×2709.

טבלה 2

טור החילוק	טור הכפלה	
419	2,709	+
209	5,418	+
104	10,836	
52	21,672	
26	43,344	
13	86,688	+
6	173,376	
3	346,752	+
1	693,504	+
	1,135,071	

ולכן

$$2709 \times 419 = 2709 + 5418 + 86,688 + 346,752 + 693,504 = 1,135,071$$

אולי ינסו הקוראים להוכיח כי שיטה זו נותנת תמיד תוצאה נכונה.

למעשה לוח הכפל אינו אלא כתיבה מכונסת של 100 משוואות מהסוג $2 \times 8 = 16$. בין אלה אפשר למצוא "מקורבות", דהיינו זוג משוואות שהאחת מתקבלת מהשניה ע"י הוספת מספר קבוע לכל ספרה. דוגמא לזוג כזה היא

$$2 \times 8 = 16$$

$$3 \times 9 = 27$$

אשר כל ספרה במשוואה השניה גדולה ב-1 מחברתה במשוואה הראשונה. האם ניתן למצוא זוגות נוספים מסוג זה? והאם קיימים זוגות כאלה גם בבסיסי ספירה אחרים, מלבד 10? יהיה n בסיס הספירה. אנחנו מחפשים איפוא x, d, c, b, a כך ש-

$$ab = cn + d \tag{1}$$

$$(a+x)(b+x) = (c+x)n + (d+x) \tag{2}$$

אם נחסר את המשוואה (1) מ- (2)

$$x^2 + (a+b)x = xn + x$$

ומאחר שהפתרון $x = 0$ אינו מעניין אותנו (מדוע?), אנו מקבלים

$$x = n + 1 - (a+b) \tag{3}$$

מכאן רואים שלכל משוואה כמו (1) אפשר להצמיד לכל היותר משוואה אחת כמו (2), וזאת ע"י הוספת $n + 1 - (a+b)$ לכל ספרה. אם נחזור עכשיו לבסיס הרגיל $n = 10$, נקבל $x = 11 - (a+b)$. למשל אם נצא מ-

$$3 \times 7 = 21$$

נקבל $x = 11 - (3+7) = 1$, ואמנם

$$4 \times 8 = 32$$

ברור שהשיטה תתקל בקשיים אם יהיה אחד המספרים $a+x$, $b+x$, $c+x$, או $d+x$ גדול מ-9. אבל

$$a+x = 11-b \quad ,$$

ולכן לא יוכל לעלות על 9 אלא אם כן b הוא 0 או 1. שיקול דומה נכון גם לגבי $b + x$ ולכן נתעלם משני המקרים הטריביאליים האלה. מאידך המספרים $c + x$ או $d + x$ יכולים בהחלט להיות גדולים מ-9. למשל אם נצא מ-

$$3 \times 6 = 18$$

נקבל $x = 11 - (3+6) = 2$ וזה היה מוביל ל-

$$5 \times 8 = 3 \times 10 + 10$$

עובדה שהיא אמנם נכונה, אבל איננה מופיעה בצורה זו בלוח הכפל. מכאן שהפתרון (3) אינו נותן תמיד בת זוג למשוואה (1). מעניין כי בת הזוג למשוואה

$$3 \times 4 = 12$$

היא

$$7 \times 8 = 56$$

ואת שתי אלה נוכל לכתוב: $7 \times 8 = 56$, $3 \times 4 = 12$

הניסוח האחרון מעורר שאלה נוספת והיא האם נוכל למצוא ארבעה אברים עוקפים d, c, b, a של טור חשבוני (עולה או יורד) המקיימים

$$ab = cn + d \tag{4}$$

ברור שאם $a = b = c = d$ אזי האפשרות היחידה היא שכולם שווים ל-0. כי מ-

$$a^2 = an + a$$

יוצא $a = 0$ או $a = n + 1$ והאפשרות השניה איננה קיימת אם a היא ספרה בבסיס ספירה n. אמנם נכון הדבר, כי עבור <u>כל</u> n,

$$0 \times 0 = 0 \times n + 0$$

אבל אינו מעניין ביותר! אבל אברי טור חשבוני בעל הפרש קבוע שאינו 0 הם בהכרח כולם שונים זה מזה, ולכן נוכל להניח כי $a < b$, מאידך, קיים

$$cn \leq cn + d = ab < an$$

ולכן $c < a$, יש לנו איפוא

$$c < a < b$$

עכשיו קיימות ארבע אפשרויות

I	$d > b > a > c$
II	$b > d > a > c$
III	$b > a > d > c$
IV	$b > a > c > d$

אם h הוא ההפרש הקבוע של הסדרה החשבונית, אזי, במקרה I, יהיו

$$a = c + b$$

$$b = c + 2h$$

$$d = c + 3h$$

ו- (4) מקבל את הצורה

$$(c+h)(c+2h) = cn + (c+3h) \tag{4.1}$$

כמו כן, במקרה II, נקבל

$$(c+h)(c+3h) = cn + (c+2h) \tag{4.2}$$

ב- III, יוצא

$$(c+2h)(c+3h) = cn + (c+h) \tag{4.3}$$

וב-IV, יוצא

$$(c+h)(c+2h) = cn + (c-h) \tag{4.4}$$

מ-(4.1) מקבלים

$$c^2 + c(3h-n-1) + (2h^2-3h) = 0 \tag{5.1}$$

ומכאן ש- $(2h^2-3h)$ מתחלק ב-c. אם h הוא מספר סופי נתון אזי הוא הדין לגבי $2h^2-3h$ ולכן מספר האפשרויות עבור c גם הוא סופי. אם נכתוב

$$M_1(h) = 2h^2-3h$$

נקבל <u>טבלה 3</u>:

h	$M_1(h)$
1	-1
2	2
3	9
4	20
5	35
6	54

כמו כן אם נסתכל ב (4.2) נראה שבמקרה זה צריך c לחלק את $3h^2-2h$. נכתוב איפוא $M_2(h) = 3h^2-2h$. מ-(4.3) נגדיר $M_3(h) = 6h^2-h$ ומ-(4.4) את $M_4(h) = 2h^2+h$. עכשיו נשלים את טבלה 3 לטבלה 4 (בעמודה הבאה)

בכל מקרה חייב c להיות גורם של הפונקציה $M_i(h)$ המתאימה. מאידך אל נשכח ש-c הוא מספר טבעי קטן מ-n.

יותר מזה, במקרים I, II, III מופיע גם c+3h כספרה, ולכן

$$c < n - 3h \tag{6}$$

ואילו ב-IV דרוש רק

$$c < n - 2h$$

h	$M_1(h)$	$M_2(h)$	$M_3(h)$	$M_4(h)$
1	-1	1	5	3
2	2	8	22	10
3	9	21	51	21
4	20	40	92	36
5	35	65	145	55
6	54	96	210	78
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

<u>טבלה 4</u>

עבור כל c המקיים את התנאים האלה נוכל לחשב את n מאחת המשוואות (4.1) עד (4.4) בהתאם למקרה. ניקח למשל (4.1) ונניח כי $h = 1$. אזי מטבלה 4 רואים כי האפשרות היחידה היא $c = 1$. מ- (4.1) נובע מאידך כי

$$n = c + (3h-1) + \frac{2h^2-3h}{c} \tag{7}$$

אם $h = c = 1$, נקבל

$$n = 2$$

והתנאי 6 איננו מתקיים. לכן אין כאן פתרון. מאידך נסתכל במקרה III עם $h = 1$. האפשרויות עבור c הן 1 ו-5. אבל ממשוואה (4.3) נובע כי

$$n = c\ (5h-1) + \frac{6h^2-h}{c} \tag{8}$$

עבור $c = 1$ נקבל

$$n = 10 > c + 3h = 4$$

כאן הכל בסדר ואנחנו מקבלים

$$12 = 3 \times 4$$

בבסיס 10. עבור $c = 5$ נקבל שוב $n = 10$, ומכאן הפתרון הנוסף

$$56 = 7 \times 8$$

באותו מקרה III, עם $h = 2$, נראה מטבלה 4 ש-c צריך להיות גורם של 22 ולכן האפשרויות הן 1, 2, 11. עבור $c = 1$ מקבלים מ-(8) כי $n = 32$.

בשני המקרים $c = 2$, $c = 11$ מקבלים $n = 22$.
ישנם איפוא פתרונות רק עבור הבסיסים 22 ו- 32 ונשאיר לקורא להמשיך בבדיקת המקרים האלה.

בסוף ניתן את דעתנו לכמה היבטים גיאומטריים של לוח הכפל.

עבור שני מספרים טבעיים y, x נגדיר את המכפלה

$$z = xy$$

ניקח זוג צירים $0x$, $0y$ במישור ובכל נקודה בעלת שיעורים שהם מספרים טבעיים y, x נעמיד מקל, באורך z, ניצב למישור. עכשיו נפרוש בד או נייר רר על ראשי המקלות האלה. מה תהיה צורת המשטח שיתקבל? נקרא למשטח זה S. כדי להשלים את התמונה נרחיב את הלוח ונרשה ל-x או ל-y (או לשניהם) להיות 0. במקרים הנוספים האלה יהיה גם z בהכרח 0, פירוש הדבר שלאורך הצירים $0x$, $0y$ יהיה הבד צמוד למישור. ברור ש-S איננו מישור, כי הוא חותך את המישור המקורי של $0y$, $0x$ בשני ישרים, כפי שראינו. מאידך קל לבדוק שאם ניקח את קבוצות הנקודות (a,y) עבור איזה a קבוע וכל הערכים האפשריים של y, נקבל קבוצת נקודות על s המסודרות על קו ישר. למעשה ישנן על S שתי קבוצות אינסופיות של קווים ישרים, עבור x קבוע ועבור y קבוע.

ניתן להוכיח, אם כי לא נפרט כאן את ההוכחה, כי כל מישור מאונך חותך את S בפרבולה וכל מישור אופקי חותך אותו בהיפרבולה או בזוג ישרים.

הנה דרך פשוטה לבנות את המשטח S, או לפחות חלק ממנו.

ציין במישור את הנקודות C, B, A, 0 אשר שיעוריהן $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,10)$ ו- $(10,10)$. חלק את צלעות המרובע הזה, כל אחד למספר (נגיד 20) קטעים שווים וחבר את הנקודות התואמות בצלעות מנוגדות זו לזו על ידי חוט מתוח. החוטים האלה יהוו קטע של המשטח S.

אם נגדיר את קנה המידה של z כך שהמקל CD יחשב כבעל אורך 100 יחידות, אזי יהיה הגובה של המשטח מעל למישור בנקודה (x,y) כלשהו שוב בדיוק למכפלה x,y גם כאשר x,y אינם מספרים שלמים.

לחישוב של π

י. גיליס, רחובות

כידוע נהוג להשתמש באות היוונית π לסמן את היחס בין היקף של מעגל לקוטרו, בהיותה האות הראשונה של המילה היוונית περιφερεια, שפירושה "היקף".

בימי קדם התקבלו בתרבויות שונות קירובים והערכות שונים לגבי ערכו של π, אבל ארכימדס היה הראשון שניסה באופן מדעי לחשב את ערכו המדויק. שיטתו תוארה כבר במאמר בחוברת קודמת של עתון זה (כרך 5, מס' 4) ולא נכנס כאן לפרטים. הגישה העיקרית היתה לחסום מצולעים משוכללים במעגל וגם לחסום את המעגל במצולעים כאלה. ארכימדס ידע לחשב את שטחי המצולעים האלה ומאחר ששטח המעגל גדול מזה של כל מצולע שחסום בו וקטן משטח המצולע החוסם אותו, הצליח ארכימדס לקבוע גבולות שביניהם נמצא π. במיוחד הוכיח כי

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

באופן עקרוני ניתן להמשיך לפי שיטתו של ארכימדס ולחשב את π לכל דיוק שנרצה, אבל החישובים נעשים מסובכים מאד. חסרון שני בשיטת ארכימדס הוא שאי אפשר להסיק ממנה נוסחה מפורשת עבור π.

רוב המאמצים לחשב את π בתקופה האחרונה התבססו על נוסחה המיוחסת למתמטיקאי הגרמני ליבניץ (G.W. Leibnitz).

הנוסחה היא:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots \qquad (1)$$

אם $-1 < x \leq 1$, כאשר $\arctan x$ נמדד ברדיאנים. נדחה את הוכחת נוסחה זו לסוף המאמר ובינתיים נראה איך להסיק ממנה מסקנות.

אם נציב $x = 1$, נקבל מיד כי

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

אבל בזה אין תועלת רבה. כי כדי לחשב את π לפי

נוסחה זו עד לדיוק של 10 ספרות, נצטרך להביא בחשבון לפחות שני מיליארד אברים של הטור. כי הרי אם נפסיק את הסיכום אחרי 2N אברים, ז.א. באבר $-\frac{1}{4N-1}$, תהיה שארית הטור

$$\left(\frac{1}{4N+1}-\frac{1}{4N+3}\right)+\left(\frac{1}{4N+5}-\frac{1}{4N+7}\right)+\ .\ .\ .$$

$$=\frac{2}{(4N+1)(4N+3)}+\frac{\ }{(4N+5)(4N+7)}+\ .\ .\ .$$

$$>\frac{2}{(4N+2)^2}+\frac{2}{(4N+6)^2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+3)^2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right]$$

$$>\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2N+2)^2}+\frac{1}{(2N+4)^2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right]$$

וניתן להוכיח, אם כי לא נציג כאן את ההוכחה, כי הנוסחה האחרונה בסוגריים ערכה בערך $\frac{1}{N}$. ראינו איפוא כי אם ניקח 2N אברים מהטור ניתקל בשגיאה של לפחות $\frac{1}{8N}$. כדי להשיג דיוק של 10 ספרות דרוש כי

$$\frac{1}{8N}<10^{-10}$$

ולכן $N > 10^9$, ז.א. שידרשו, כפי שאמרנו, לפחות 2×10^9 אברים. מאידך ידוע כי, עבור כל β, α

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta} \qquad (2)$$

אם נכתוב $\tan\alpha = a$, $\tan\beta = b$ ובכן $\alpha = \arctan a$, $\beta = \arctan b$ נקבל

$$\arctan a+\arctan b=\arctan\frac{a+b}{1-ab} \qquad (3)$$

במיוחד, אם ניקח $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, נקבל

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}$$

$$=\arctan 1$$

$$=\frac{1}{4}\pi$$

מהטור של לייבניץ יוצא עכשיו: -

$$\frac{1}{4}\pi=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\ .\ .\ .\right\} \qquad (4)$$

$$+\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\ .\ .\ .\right\}$$

שני הטורים האלה הם מכשירים יעילים למדי למטרות חישוב נומרי. נניח שנסכם את 2N האברים הראשונים של הטור הראשון. השארית תהיה

$$\frac{1}{(4N+1)}\cdot\frac{1}{2^{4N+1}}-\frac{1}{(4N+3)}\cdot\frac{1}{2^{4N+3}}+\frac{1}{(4N+5)}\cdot\frac{1}{2^{4N+5}}\cdots$$

$$=\frac{1}{(4N+1)}\cdot\frac{1}{2^{4N+1}}-\left[\frac{1}{(4N+3)}\cdot\frac{1}{2^{4N+3}}-\frac{1}{(4N+5)}\cdot\frac{1}{2^{4N+5}}\right]\cdots$$

$$<\frac{1}{(4N+1)}\cdot\frac{1}{2^{4N+1}}$$

$$<\frac{1}{4N\cdot2^{4N+1}}=\frac{1}{N\cdot2^{4N+3}}$$

נוכל איפוא לקבל דיוק של 10 ספרות אם

$$N\cdot2^{4N+3}>10^{10}$$

וזה יתקיים, כפי שאפשר לברר בקלות, אם $N > 7$.

יוצא כי מספיק לקחת 14 אברים מהטור הראשון (ואפילו פחות מהטור השני) להשיג דיוק של 10 ספרות. למעשה ניתן להוכיח בדרך דומה כי, באופן כללי ההפרש בין הסכום של k האברים הראשונים של הטור (1) לבין הערך המדויק של $\arctan x$, כאשר $-1 < x < 1$, הוא קטן מ-

$$\frac{x^{2k}}{2k(1-x^2)}$$

נסתכל עכשיו בנוסחה (3) ונציב $a = b = \frac{1}{5}$. נקבל

$$2\arctan\frac{1}{5}=\arctan\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=\arctan\frac{5}{12}$$

ולכן

$$4\arctan\frac{1}{5} = 2\arctan\frac{5}{12}$$

$$= \arctan\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}$$

$$= \arctan\frac{120}{119}$$

מאידך, בהסתמך שוב על (3), קיים

$$\arctan 1+\arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \arctan\frac{120}{119}$$

ומכאן ש-

$$\frac{1}{4}\pi = \arctan 1 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \qquad (5)$$

אם נציב $x = \frac{1}{5}$ ב- (1) נראה, לפי האמור לעיל, שנקבל דיוק של 10 ספרות אם ניקח k אברים כך ש-

$$\frac{(\frac{1}{5})^{2k}}{2k\cdot\frac{24}{25}} < 10^{-10}$$

ולזה מספיק ש- $k > 7$. באשר לטור (1) כאשר $x = \frac{1}{239}$, קל לראות כי 3 אברים יספיקו. ההצבה (5) מאפשרת איפוא לחשב את π בדיוק רב בעבודה קלה יחסית. בעזרת הנוסחה (4) הצליח המתמטיקאי האנגלי יוהן מצ'ין (John Machin) כבר בשנה 1706 לחשב את π עד לספרה ה-100. קיימות מספר רב של נוסחאות אלטרנטיביות, ביניהם זו של אוילר (L. Euler) משנת 1779, והיא

$$\frac{1}{4}\pi = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79} \qquad (6)$$

המתמטיקאי שנקס (W. Shanks) המשיך במאמצים האלה ובשנת 1873 פרסם רשימה של 707 הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של π. עם פיתוחם של מחשבים אלקטרוניים לבשה בעית החישוב צורה חדשה. עכשיו יכול כל תלמיד תיכון היודע תכנות לחשב את π עד לדיוק של מליוני ספרות תוך כמה דקות.

בהקשר זה נזכיר מקרה מבדר במקצת. בשנת 1937 התקיימה בפאריז (בירת צרפת) תערוכה גדולה ואחד הביתנים בה היה "ביתן המדע". לשם קישוט בבנין זה שמו על ארבעה הקירות מסביב את 707 הספרות של π שהיו ידועות עד אז. הבנין קיים, על כל קישוטיו, עד ליום הזה ומשמש כ"מוזיאון המדע". אבל לפני כשלושים שנה, כאשר התחילו להשתמש במחשבים אלקטרוניים חישבו את π לדיוק של כמה אלפי ספרות ואחת העובדות שהתגלו היתה שבחישוביו של שנקס היתה כנראה טעות והספרות אחרי הספרה ה-135 אינן נכונות!

בסוף נזכיר שתי גישות אחרות לחישוב של π.

א. המתמטיקאי האנגלי ברונקר (Brouncker) הוכיח בשנת 1658 את הנוסחה הבאה:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\cdots}}}}}} \qquad (7)$$

לא נוכל להוכיח נוסחה זו כאן ואנו מצטטים אותה בעיקר מפני שהיא כל כך שונה מאלה שניתנו למעלה.

ב. הנוסחה השניה הומצאה ע"י המתמטיקאי הצרפתי ויטה (F. Vieta) שחי במאה ה-16. הוא יצא מהעובדה כי

$$\sin\alpha = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\tfrac{\alpha}{2}$$

$$= 2\cos\tfrac{\alpha}{2}(2\cos\tfrac{\alpha}{4}\sin\tfrac{\alpha}{4})$$

$$= 2^2\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{4}\sin\tfrac{\alpha}{4}$$

$$= 2^2\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{4}(2\cos\tfrac{\alpha}{8}\sin\tfrac{\alpha}{8})$$

$$= 2^3\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{4}\cos\tfrac{\alpha}{8}\cdot\sin\tfrac{\alpha}{8},\ \ldots.$$

רואים כי ניתן להמשיך בדרך זו ובאופן כללי,

$$\sin\alpha = 2^n\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{a}{2^2}\cos\tfrac{\alpha}{2^3}\ \ldots\cos\tfrac{\alpha}{2^n}\cdot\sin\tfrac{\alpha}{2^n}$$

דהיינו:

$$\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2^2}\cos\tfrac{\alpha}{2^3}\ldots\ \cos\tfrac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

אבל ידוע כי $\frac{\sin\theta}{\theta}$ שואף לערך הגבולי 1 כאשר θ שואף ל-0. מכאן שכאשר n גדל לקראת אינסוף ישאף

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}$$

שהוא איננו אלא

$$\alpha\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}$$

לערך הגבולי α. מהשיקולים האלה הסיק ויטה את הנוסחה

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\cos\frac{\alpha}{2^4}\cdots \tag{8}$$

נציב ב-(8) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ וניזכר כי $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, נקבל

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots \tag{9}$$

אבל, עבור כל זוית θ, קיים

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

ולכן

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \tag{10}$$

כולנו יודעים כי

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

ולכן, לפי (10),

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

אם נמשיר, נקבל

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}$$

ובאותה דרר

$$\cos\frac{\pi}{2^5} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}}$$

וכו'.

נציב את כל אלה ב-(9) ונקבל את נוסחת ויטה

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{4}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}\cdots$$

הוכחת הנוסחה (1)

ההוכחה הפשוטה ביותר מתבססת על חשבון אינטגרלי: - נניח כי $0 < x < 1$. אזי

$$\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \int_0^x (1-u^2+u^4-u^6+\ldots)du$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{3^7}{7} + \ldots$$

ברור שהפיתוח של $\frac{1}{1+u^2}$ בטור הנדסי אפשרי אך ורק אם $u^2 < 1$ ולכן התנאי $0 \le x < 1$ היה דרוש. נוסף על זה הנחנו שהאינטגרל של סכום של טור אינסופי שווה לסכום האינטגרלים של אברי הטור. דבר זה איננו נכון תמיד אבל ניתן לאשר כי הוא קיים במקרה זה. המעבר ל-x שלילי הוא מידי מאחר שגם arctanx וגם נוסחת ליבניץ מחליפים את סימנם כאשר מציבים $-x$ במקום x.

פתרון גרפי לבעיית הרקה של נחל איתן

מ. שמשוני, רחובות

בגליונות מתמטיקה, כרך 6 מס׳ 2, הודפס מחדש מאמר של פרופסור י. בר-הלל ז״ל אשר הופיע לראשונה בעיתון ״דפים למתמטיקה ולפיסיקה״ בשנת 1942. המאמר תיאר שיטה גרפית נאה לפתרון בעיות מן הסוג: ״למוזג שלושה כדים המכילים 8, 5 ו-3 ליטרים. הכד הגדול מלא יין. ברצון המוזג לחלק את היין לשתי כמויות שוות בעזרת הכדים הללו בלבד. כיצד יעשה זאת?״

כאן נתאר שיטה גרפית לבעיות דומות, בהן יש רק שני כדים ונוסף לכך מעין איתן כמקור בלתי מוגבל של מים (בגלל בזבוז הנוזלים שבשיטה נאלצנו לעבור מיין למים!). ברצוננו להגיע לכמות מוגדרת מראש של מים באחד הכדים במספר פעולות קטן ככל האפשר.

להדגמת השיטה נטפל במקרה בו שני הכדים מכילים 7 ו-11 ליטרים והמטרה היא שבאחד הכדים יהיו בדיוק 6 ליטרים של מים.

בבעיות מסוג זה הפעולות המותרות הן:

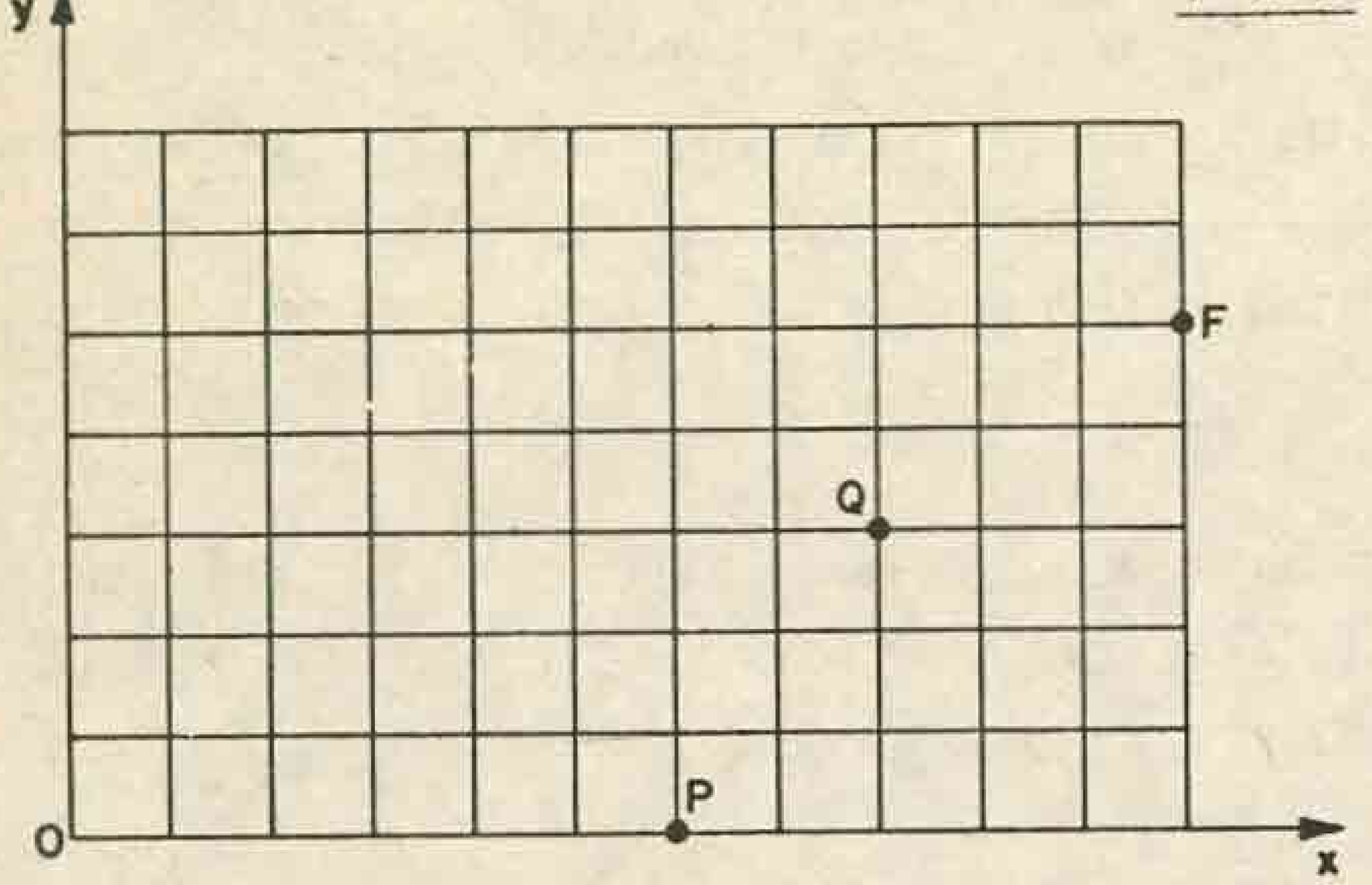
א) למלא אחד הכדים במי המעין.

ב) להריק כד אחד על-ידי זה ששופכים ארצה את המים אשר בו.

ג) לשפוך מכד אחד לשני עד שהראשון יתרוקן או שהשני יתמלא (או שני הדברים האלה גם יחד).

בבעיות בהן טיפל, נעזר פרופסור בר-הלל במשולש אשר המרחקים מצלעותיו תיארו את כמות הנוזל בכל אחד משלושת הכדים. בבעיות שלנו נעזר במערכת צירים קרטזית. מצב המערכת יתואר בעזרת נקודה אשר שעוריה שווים לכמויות המים בשני הכדים. נקודה זו תיקרא הנקודה המייצגת. בציור 1 מייצגת הנקודה P את המצב אשר בכד הגדול נמצאים 6 ליטרים בעוד שהכד הקטן ריק. מאידך F מייצגת מצב אשר הגדול מלא ובקטן נמצאים 5 ליטרים, בעוד Q מייצגת מצב כאשר בכד הגדול יש 8 ליטרים ובקטן 3 ליטרים.

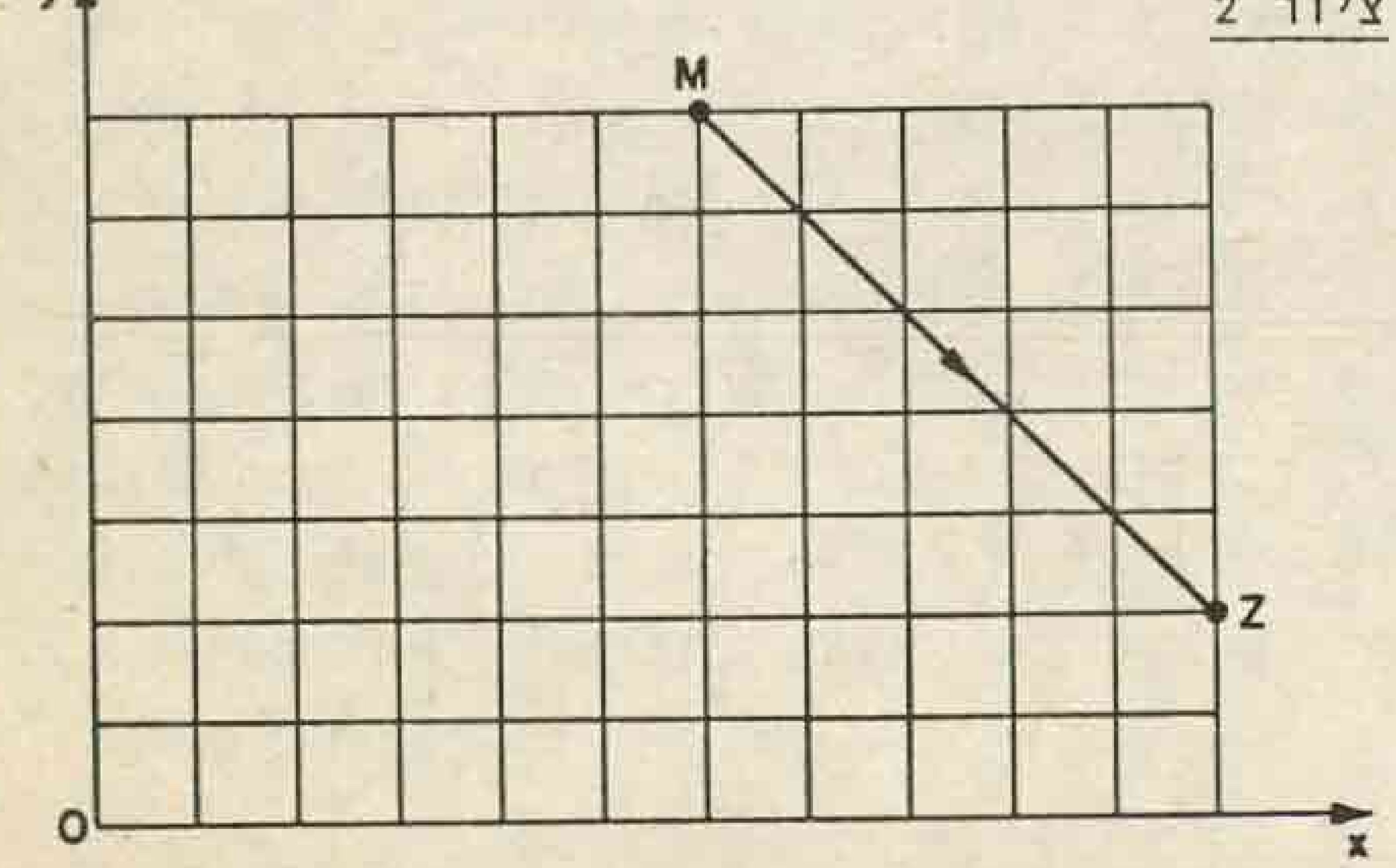
ציור 1



ברור כי ביצוע אחת הפעולות המותרות תגרור הזזת הנקודה המייצגת. מלוי הכד הגדול מהמעין יזיז את הנקודה באופן אופקי לצלע הימנית של המלבן ואילו הרקת אותו כד ארצה היתה מזיזה אותה לצלע השמאלית. כמו כן מלוי הכד הקטן מהמעין או הרקתה ארצה היו גוררות תנועה מאונכת של הנקודה המייצגת.

כאשר מבצעים פעולה מסוג ג) הרי כל המים היוצאים מכד אחד נכנסים לשני ולכן $x + y$ נשאר קבוע. תנועת הנקודה המייצגת תהיה איפוא לאורך קו אלכסוני היוצר עם הכיוון החיובי של Ox את הזוית $135°$. לדוגמא נניח שהכד הקטן מלא ובגדול נמצאים 6 ליטרים (הנקודה M בציור 2), ומלאנו את הגדול מתוך הקטן.

ציור 2

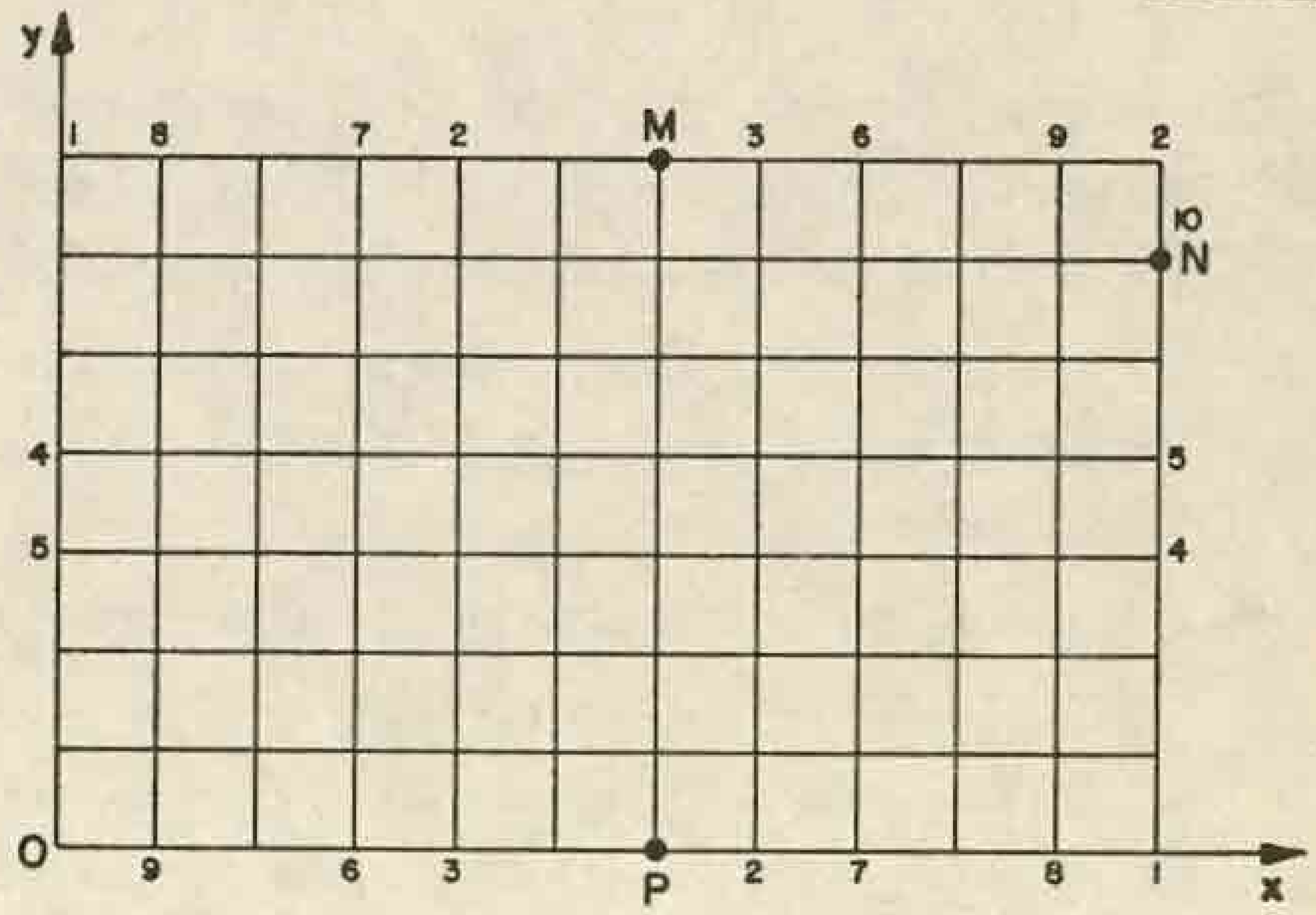


פעולה זו היתה מיוצגת על ידי תנועת הנקודה בקו האלכסוני מ-M עד Z (ציור 2). מאידך אילו יצאנו מהמצב המיוצג על-ידי הנקודה Z , דהיינו שהכד הגדול מלא ובשני 2 ליטרים, ומלאנו את הקטן על-ידי מזיגה מהגדול, אזי היתה הנקודה המייצגת נעה כלפי מעלה מ- Z עד M .

קיים שיקול נוסף והוא שפעולה נגמרת תמיד במלוי אחר הכדים או בהרקת אחד הכדים (או שניהם). עובדה זו תתבטא בדיאגרמה בזה שכל תנועה של הנקודה המייצגת יכולה להיגמר אך ורק על אחת מצלעות המלבן ולא בפנים המלבן.

להדגמת הפתרון נעזר בציור 3 בו העתקנו את הנקודות P, M את הראשית O ואת N, שהיא נקודת המטרה (11,6) הפעולה מתחילה בנקודה O. בצעד הראשון ניתן רק ללכת

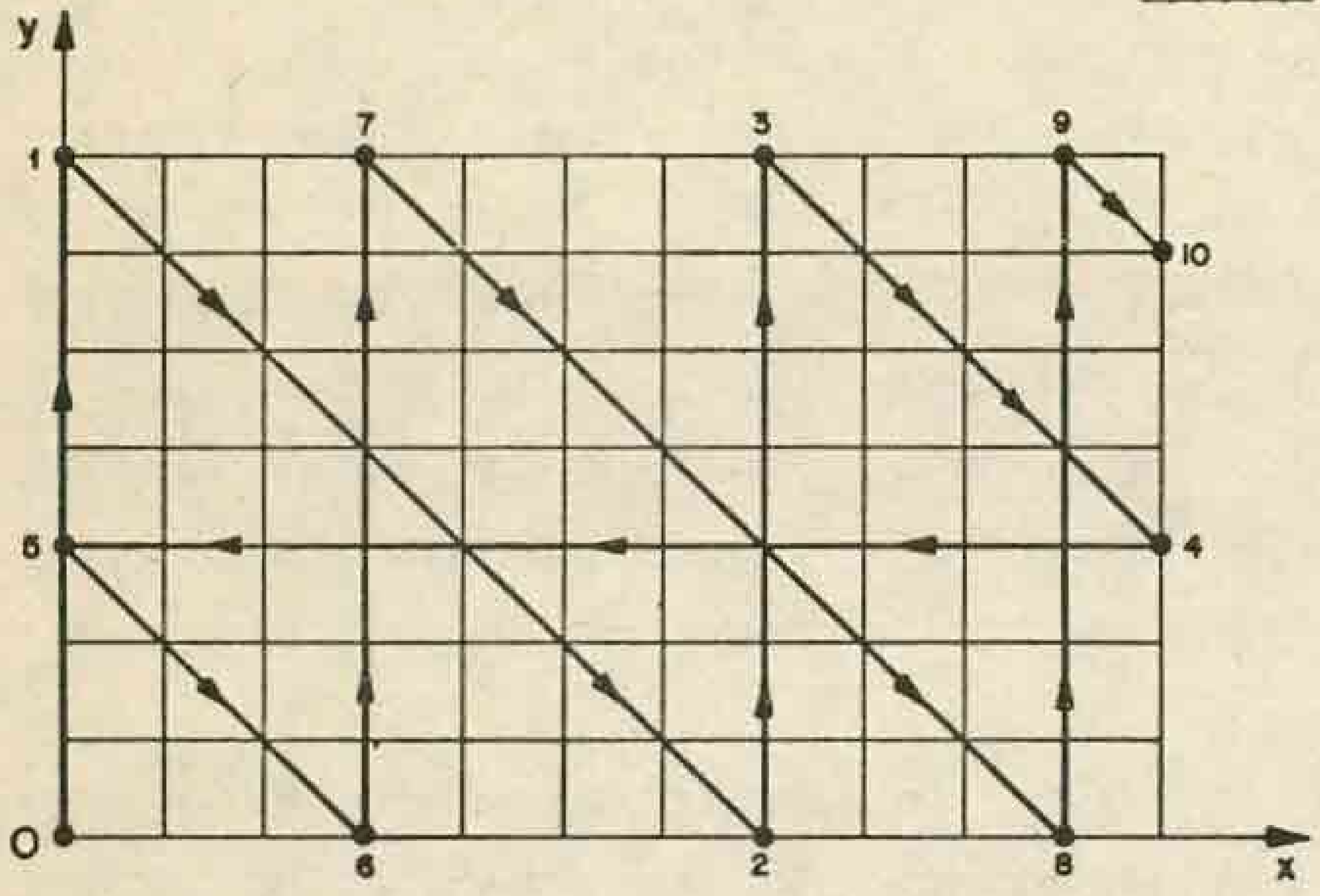
ציור 3



לשתי נקודות אשר את שתיהן נסמן במספר 1. בצעד הבא ניתן לעבור לשלוש נקודות שונות אותן נסמן ב-2. לא לקחנו בחשבון את האפשרות לחזור לראשית O,וגם בעתיד נפסול כל אפשרות לחזור לנקודה אותה כבר ביקרנו, כי הרי אנו מעונינים בפתרון בעל מספר צעדים מזערי. הנקודה 2 בפינה הימנית העליונה היא נקודה עקרה כי ממנה ניתן רק לחזור לאחת מן הנקודות 1, ולכן נתעלם ממנה. הצעד הבא יוביל לשתי נקודות 3 וכן הלאה עד שבצעד העשירי אחת מן הנקודות 10 היא נקודת המטרה N , דהיינו 6 ליטרים בכד הקטן (ו-11 ליטרים בגדול).

בציור 4 אנו חוזרים על הפתרון המוצלח. כדאי לשים לב לכך שלסירוגין אנו צועדים "בצעדי צריח" ו"צעדי רץ" של שחמט (למה?).

ציור 4



נראה גם בצורת טבלה את הפעולות אותן ביצענו על מנת להגיע לפתרון.

מס' הצעד	תכולת כד 7	תכולת כד 11
0	0	0
1	7	0
2	0	7
3	7	7
4	3	11
5	3	0
6	0	3
7	7	3
8	0	10
9	7	10
10	6	11

אולי ינסו הקוראים לפתור את הבעיה הבאה: ברשותנו מעין איתן ושני מיכלים בקיבולים 8 ו-11 ליטרים. ברצוננו להגיע למצב שבאחד המיכלים תהיה כמות כפולה של מים מאשר במיכל השני (אין הכוונה למצב (0,0)!!). ניתן לבצע את הפעולה ב- 16 צעדים.

הפתעות בבעיה מתמטית

א. רוזנטולר, נתניה

ישנה בעיה ידועה והיא:

מספר טבעי מסויים אשר ספרת היחידות שלו היא 2, הוא כזה שאם מעבירים את הספרה 2 הזאת מהמקום האחרון למקום הראשון יוצא מספר שהוא פי 2 מהמספר המקורי. מהו המספר הקטן ביותר שיש לו תכונה זו?

למעשה ניתן להציג בעיה כללית יותר:
מספר טבעי מסויים אשר ספרת היחידות שלו היא k, הוא כזה שאם מעבירים את הספרה k מהמקום האחרון לראשון מקבלים מספר גדול פי k מהמספר המקורי.
מהו המספר הקטן ביותר המקיים את התנאי הזה? נסמן את המספר הקטן ביותר ב-N_k. בעיתנו הראשונה היתה איפוא למצוא את N_2 וכאן נציג שתי דרכי פתרון שונות.

א. הספרה האחרונה של N_2 היא 2, לפי ההגדרה. העברתה למקום הראשון מכפילה את N_2 פי שניים, דהיינו שהיא יוצרת מספר אשר ספרתו האחרונה 4. הספרה שלפני 8 היתה צריכה להיות 16, אבל מאחר שאין ספרה כזאת בבסיס העשרוני אנו מקבלים 6 ומעבירים 1 לספרה הבאה. זו תהיה איפוא 2x6+1, ז.א. 3, עם שוב העברת 1 למקום הבא. נמשיך בדרך זו עד שנקבל את הספרה 2 והנה פתרנו את הבעיה. נוכל להציג את סדר הפעולות בדיאגרמה הבאה:

```
  1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2
2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
```

רואים מיד מהדיאגרמה כי

$$N_2 = 105, 263, 157, 894, 736, 842.$$

בדרך דומה ניתן לחשב את N_k עבור כל k אחר.
רואים, למשל, כי

$$N_7 = 1,014, 492, 753, 623, 188, 405, 797.$$

ב. קיימת גישה שניה לפתרון הבעיה. נניח כי מספר הספרות ב-N_2 הוא m

ונכתוב $N_2 = 10x + 2$

אזי רואים מיד מתנאי הבעיה ש-

$$2.10^m + x = 2(10x + 2)$$

ולכן $19x = 2.10^m - 4$

$$= 199 \dots 96$$

כאשר במספר האחרון מופיעה הספרה 9 בדיוק (n-1) פעמים.

מאחר ש- $x = \dfrac{1999 \dots 6}{19}$

נוכל לקבוע את x כדלקמן: -

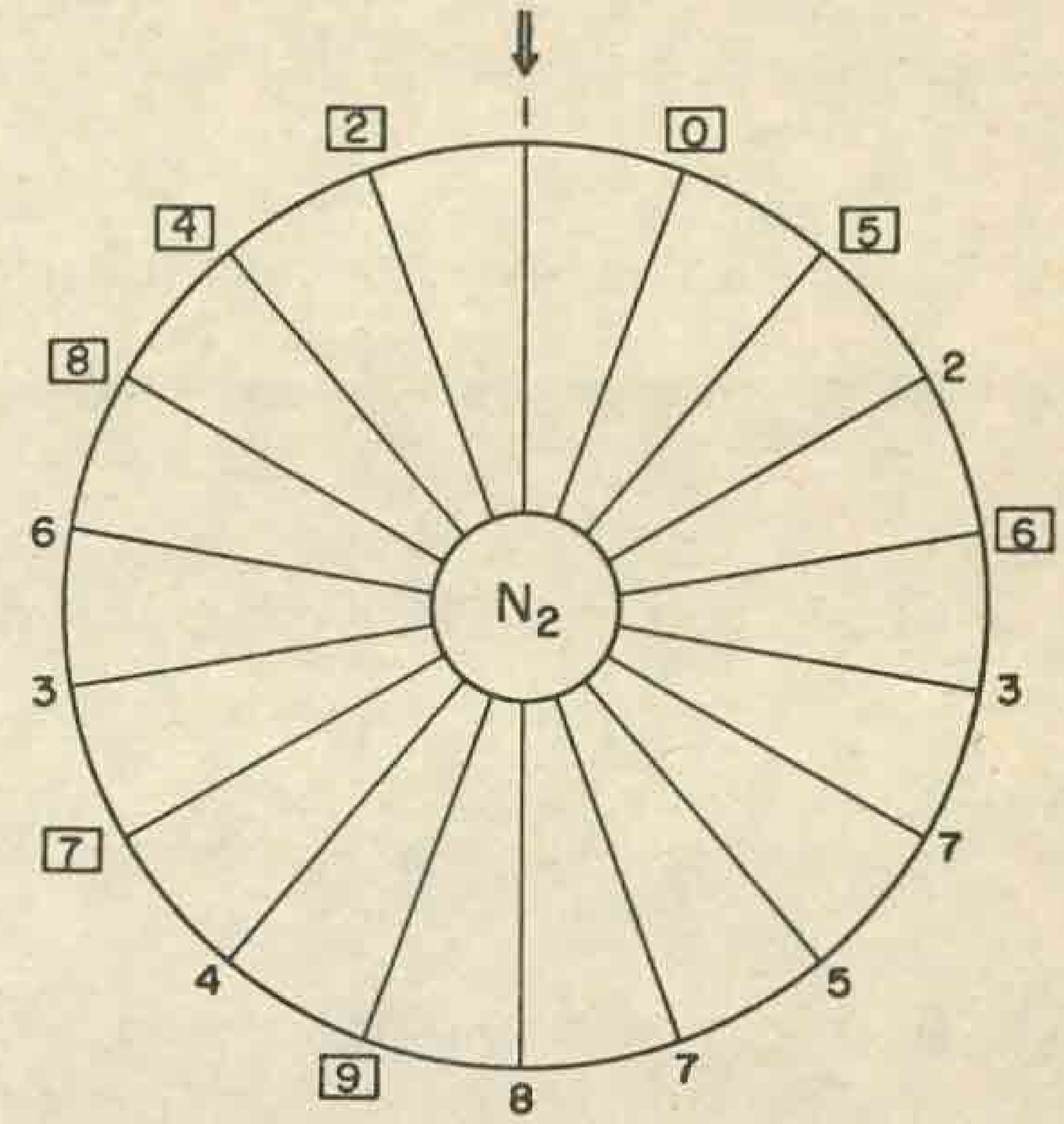
חלק את ...19...9 ב-19

```
      10526315
19    199 ... 9 ... 96
      19
       99
       95
        49
        38
        119
        114
          59
          57
           29
           14
           109
            95
           149
```

והמשך עד שתקבל את השארית 7. אם קיבלת שארית זו תוכל לסיים את המספר ב-6 כי 76 מתחלק ב-19.

שיטה דומה טובה לקביעת N_k גם עבור ערכים אחרים של k.

עכשיו נשרטט עיגול ונרשום עליו את הספרות של המספר N_2 לפי הסדר.



בציור הזה הכנסנו חלק מהספרות למסגרות רבועיות (האם תוכלו לראות איך הוחלט איזה מספרים יש להקיף ככה ברבועים?) ונוכל לראות כמה תכונות מעניינות לספרות האלה:

1) אם נבחר את הספרה 2 שבקבוצה זו ונתחיל ממנה ונקרא את כל הספרות שבמעגל לפי כיוון השעון נקבל בדיוק $2N_2$, כי

$$2N_2 = 210,\ 526,\ 375,\ 789,\ 473,\ 684$$

דבר זה איננו מפתיע כי למעשה הוא אך מבטא את התכונה אשר לפיה קבענו את N_2. בדרך דומה, ושוב ללא הפתעה, נראה כי אם נצא מהספרה 4 נקבל את המספר $4N_2$ ואילו אם נתחיל מ-8 נקבל את $8N_2$.

2) קצת יותר מפתיעה היא העובדה שאם נצא מ-6 נקבל $6N_2$, 7 יתן את $7N_2$ ו-9 היה גורר $9N_2$. נשאיר לקורא לבדוק את הנושא הזה ולנסות להבין את הסיבה לתופעה.

3) אם נצא מה-0 נקבל בדיוק $\frac{1}{2}N_2$, כי

$$\frac{1}{2}N_2 = 052,\ 631,\ 578,\ 947,\ 368,\ 421$$

עכשיו נעבור לרגע להתבונן במספר N_5. לא קשה לאשר כי

$$N_5 = 102,\ 040,\ 816,\ 326,\ 530,\ 612,\ 214,\ 897,\ 959,\ 183,\ 673,\ 469,\ 387,\ 755$$

וכי

$$7N_5 = 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285,\ 714,\ 285$$

דהיינו מספר עם "מחזור" 714285.

אבל קיים
$$\frac{5}{7} = 0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}$$

ויוצא כי N_5 איננו אלא 42 הספרות הראשונות בפתוח העשרוני של $\frac{5}{7} \times \frac{1}{7}$, ז.א. של $\frac{5}{49}$ וכי אלה מהווים למעשה המחזור של מספר זה. במלים אחרות

$$\frac{5}{49} = 0.\dot{N}_5$$

למעשה אפשר להוכיח כי, עבור כל ספרה m,

$$\frac{m}{10m-1} = 0.\dot{N}$$

ראשית כל ברור שהספרה הראשונה של N_m חייבת להיות 1, כי הרי לפי ההגדרה mN_m מתקבל כאשר מעבירים את הספרה האחרונה של N_m, שהיא m, מהמקום האחרון לראשון; יוצא שהספרה הראשונה של mN_m היא m, ולכן זו של N_m היא 1. עכשיו נגדיר

$$x_m = 0.\dot{N}_m$$

לפי האמור יהיה

$$10mx_m = m.\dot{M}$$

ולא קשה להיווכח כי המחזור M יהיה זהה עם N_m.

מכאן נובע ש-

$$10mx_m = m + x_m$$

ולכן
$$x_m = \frac{m}{10m-1}$$

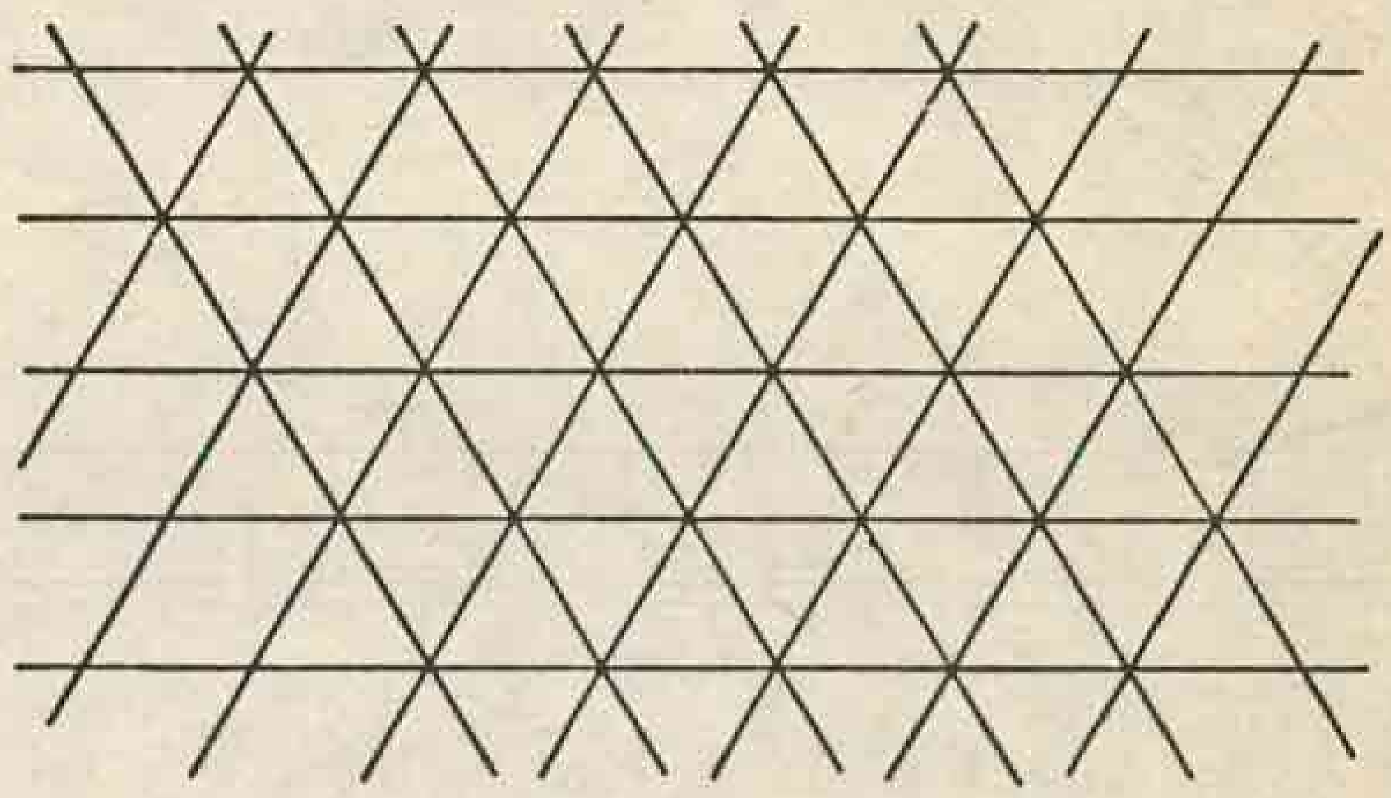
הנה איפוא דרך שלישית (וקלה מאד) לחשב את כל ה-N_m.

כיסוי המישור בעזרת מצולעים חופפים

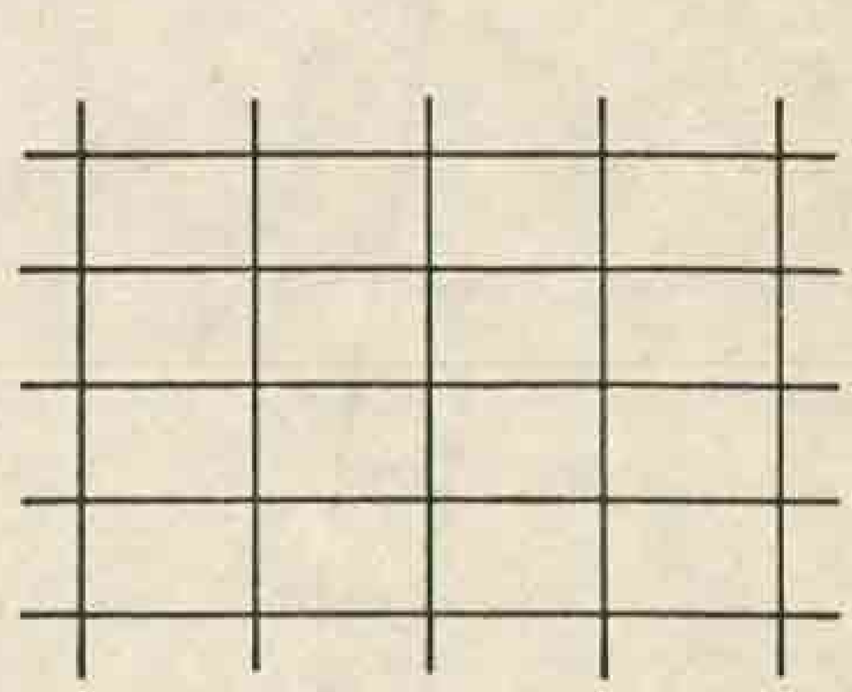
י. קופיץ, רמת-גן

נניח שיש לנו מלאי בלתי מוגבל של אריחים דומים, כולם חופפים לאיזו צורה נתונה A. האם נוכל לכסות בהם את המישור כולו, כך שכל נקודה של המישור תכוסה ע"י אחד האריחים (פרט לנקודות שעל השפה בין שני אריחים סמוכים)? ליתר דיוק הבעיה היא, מה הן הצורות A שלגביהן הדבר אפשרי? במאמר זה נגביל את הדיון למקרים ש-A הוא מצולע, אבל נעיר כי גם במקרים אלה אין התשובה תמיד חיובית. האריחים הם דו-צדדיים ומותר גם להפוך אותם לצד השני.

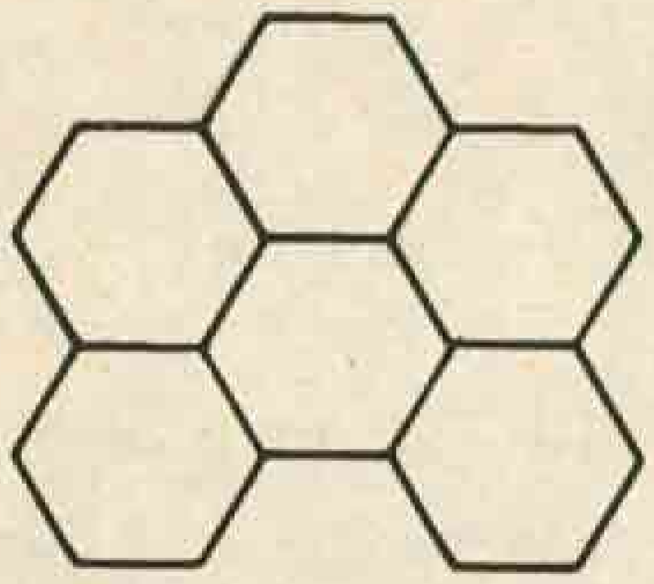
מתוך הסתכלות בציורים 1-3 אנו רואים מיד כי התשובה <u>חיובית</u> כאשר A הוא משולש שווה צלעות, מלבן, או משושה משוכלל. כאשר A הוא מחומש משוכלל אין הדבר אפשרי, כי הרי הזוית הפנימית של מחומש משוכלל היא 108° ואי אפשר להרכיב מהן בנקודת מפגש זוית של 360°.



<u>ציור 1</u>



<u>ציור 2</u>

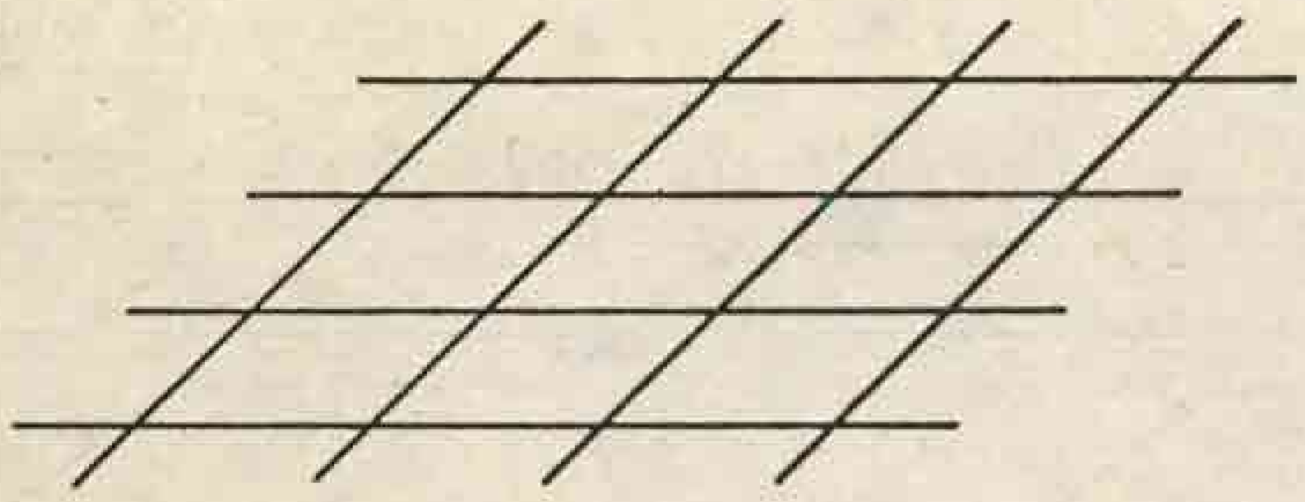


<u>ציור 3</u>

מאידך ישנם דוקא מצולעים בלתי משוכללים רבים שבהם ניתן לכסות את המישור ואלה ישמשו כנושא העיקרי לדיוננו. צורה שיש לה התכונה המבוקשת, דהיינו שניתן לכסות בצורות חופפות לה את כל המישור, תיקרא בהמשך <u>צורה טובה</u>. ועכשיו נוכיח כמה משפטים יסודיים.

<u>משפט 1</u> כל מקבילית מהווה צורה טובה.

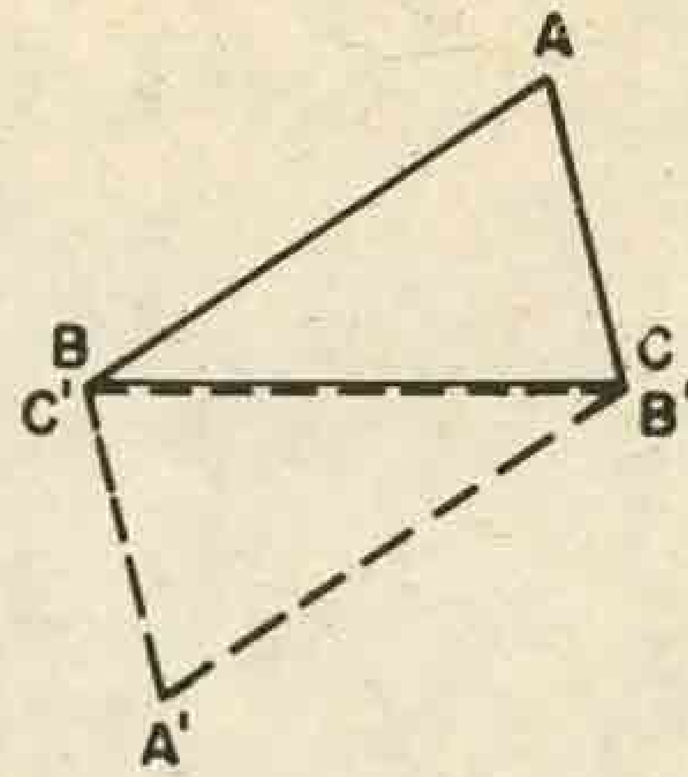
<u>הוכחה:</u> אפשר להוכיח את המשפט באופן פורמלי, אבל למעשה רואים את נכונותו מיד מציור 4.



<u>ציור 4</u>

<u>משפט 2</u> משולש מכל סוג שהוא מהווה צורה טובה.

<u>הוכחה</u> נניח שיש לנו מלאי אינסופי של משולשים חופפים למשולש ABC. נוכל לצרף אותם בזוגות (ציור 5) וע"י כך ליצור מהם מלאי אינסופי של מקביליות חופפות. ממשפט 1 נובע שניתן לכסות את המישור בעזרת המקביליות האלה וזה מהווה למעשה כיסוי ע"י המשולשים.

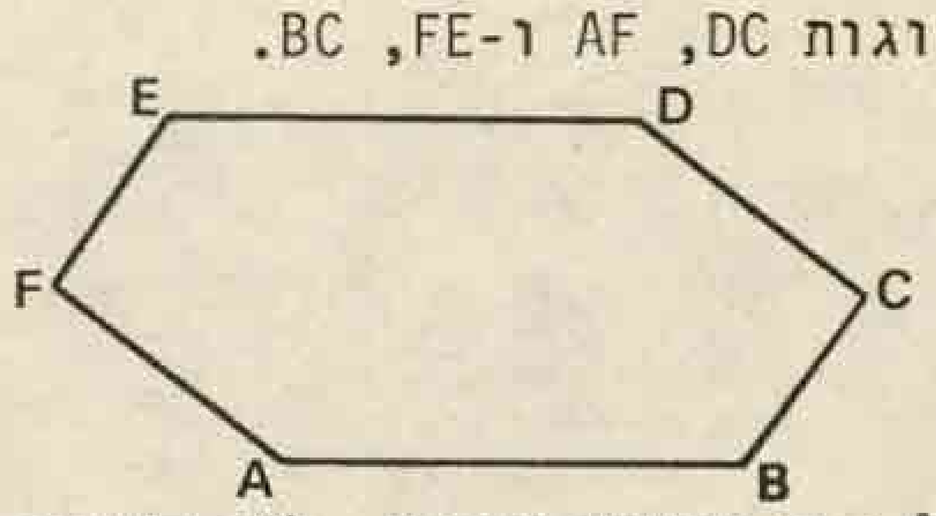


ציור 5

בהמשך נזדקק למושג חדש והוא של <u>משושה משופר</u>.

<u>הגדרה</u> <u>משושה משופר</u> הוא משושה אשר בו הצלעות הנגדיות הן מקבילות ושוות.

ברור שמשושה משוכלל הוא גם משופר, אבל אין זה קשה לבנות גם משושה משופר שאינו משוכלל. ראה למשל את המשושה בציור 6, אשר בו שתי הצלעות ED, AB שוות ומקבילות זו לזו והוא הדין לגבי הזוגות DC, AF ו-FE, BC.

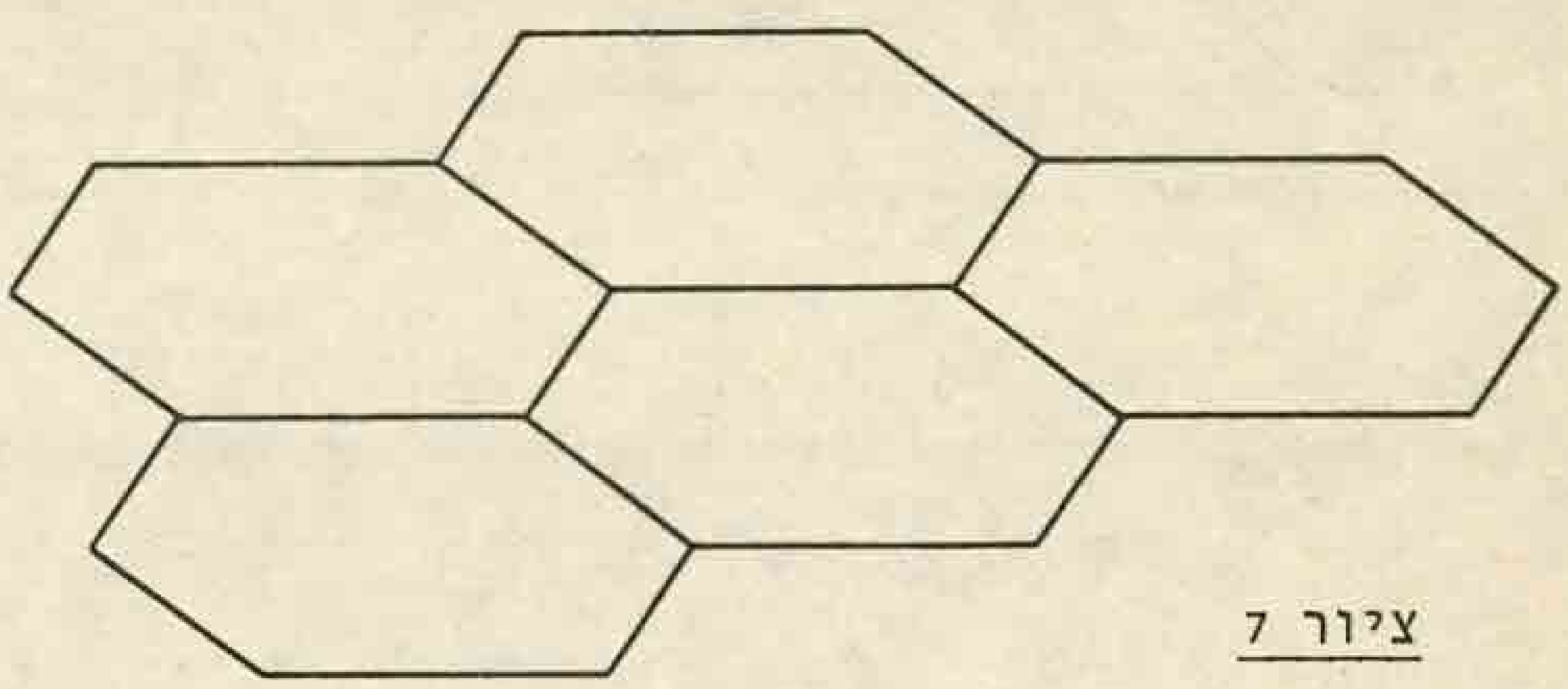


ציור 6

המשושה ABCDEF הוא איפוא משופר, לפי ההגדרה, אבל ברור שאינו משוכלל, ועכשיו אנו מגיעים למשפט הבא:

<u>משפט 3</u> כל משושה משופר מהווה צורה טובה.

<u>הוכחה</u> מספיק להסתכל בציור 7.

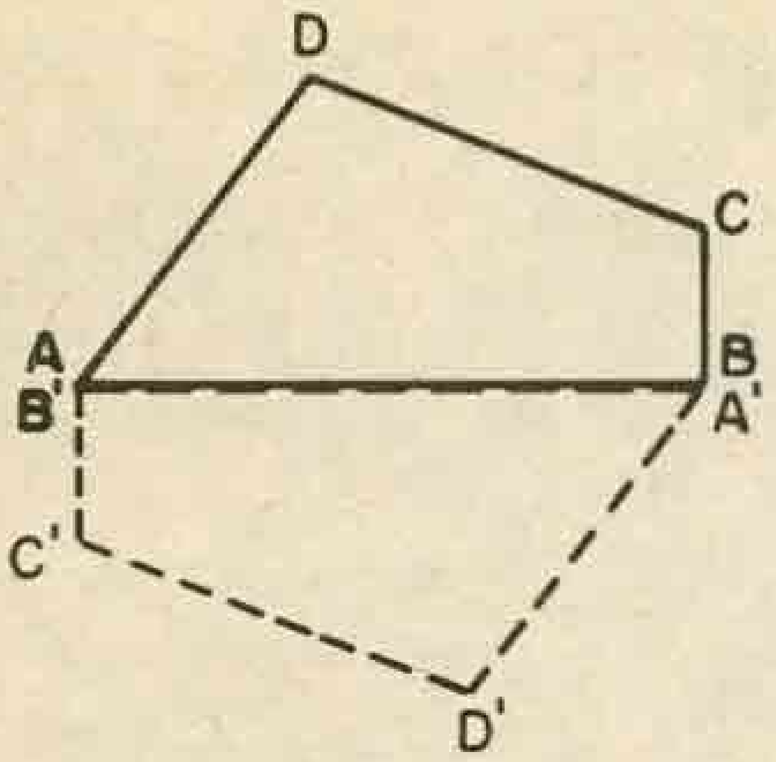


ציור 7

המשפט הבא מפתיע במקצת:

<u>משפט 4</u> כל מרובע קמור מהווה צורה טובה.

<u>הוכחה</u> אם נחבר יחד, באופן מתאים, שני עותקים של המרובע (ראה ציור 8) נקבל משושה משופר. המסקנה מידית.

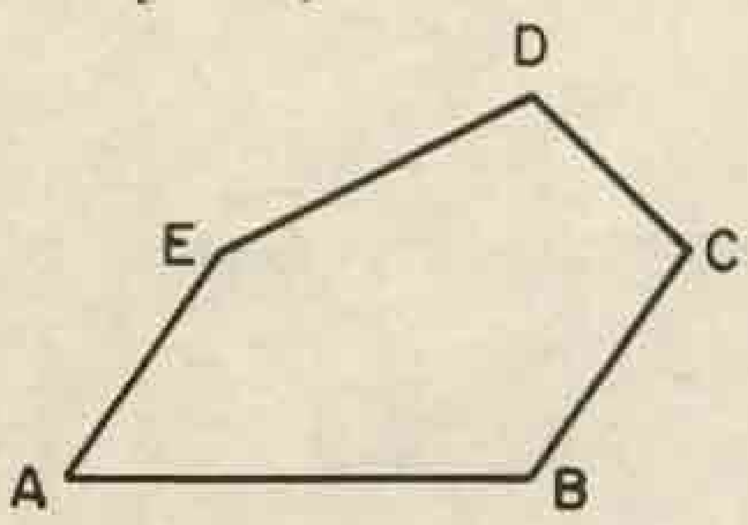


ציור 8

המצב לגבי מחומשים הרבה יותר מסובך. ראינו כבר כי מחומש משוכלל אינו צורה טובה, אבל מאידך, אנו יכולים להגדיר כמה סוגים של מחומשים שהם צורות טובות.

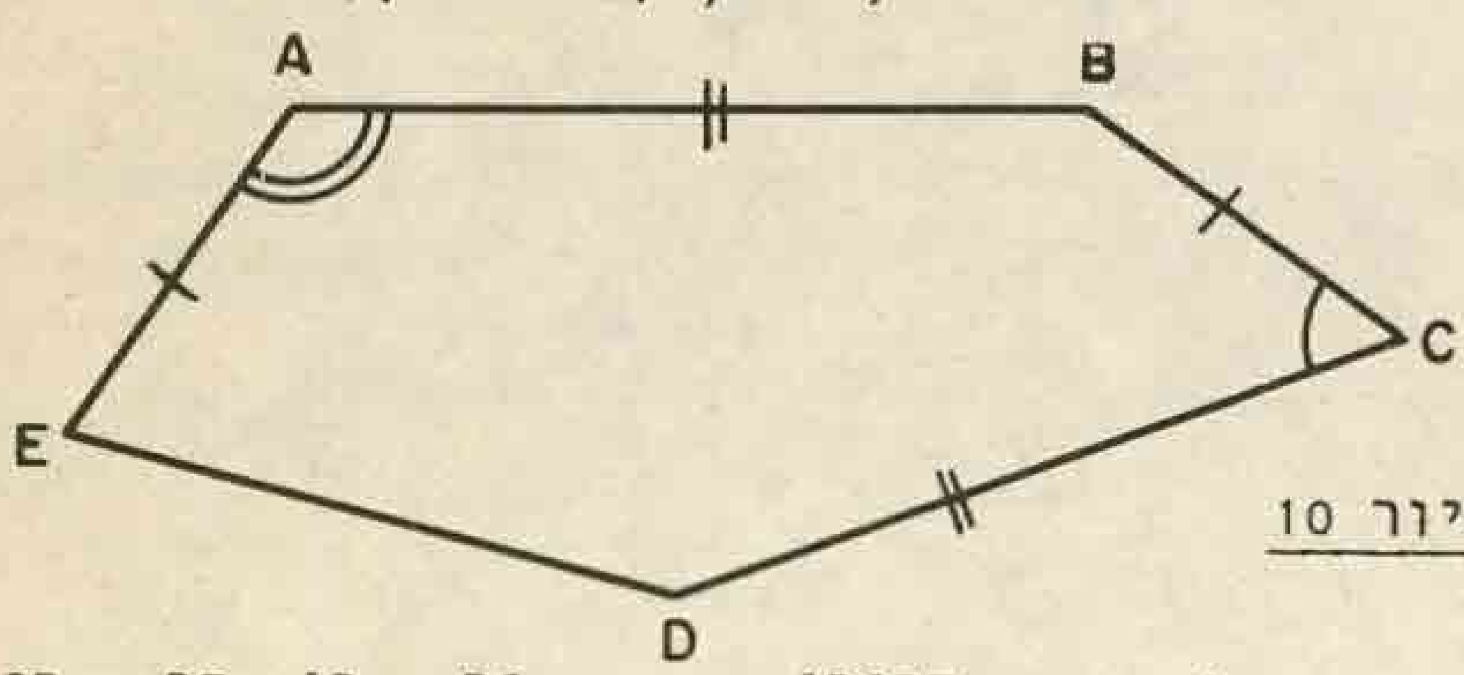
<u>משפט 5</u> מחומש קמור המקיים אחד התנאים הבאים הוא צורה טובה -

1) אם יש בו זוג צלעות מקבילות (ציור 9).



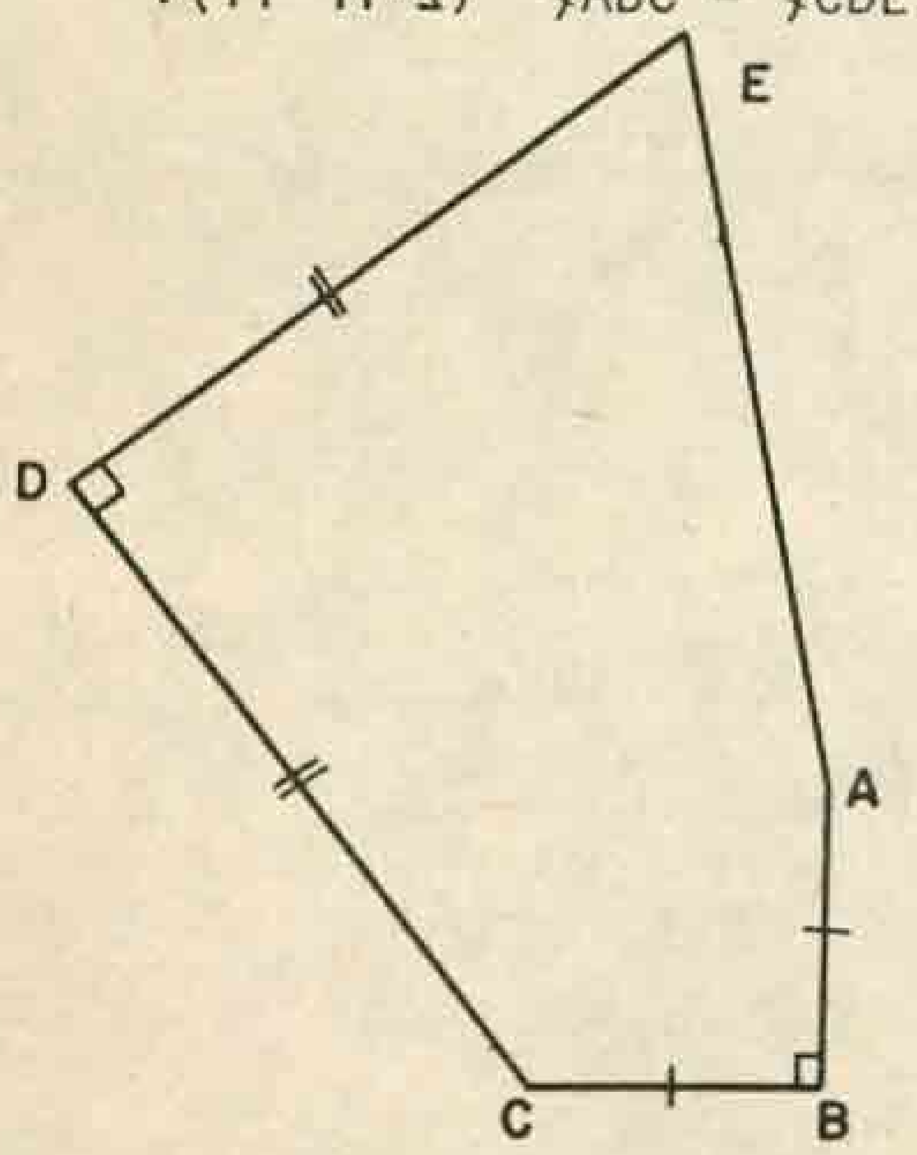
ציור 9

2) מחומש ABCDE אשר בו $AB = CD$, $AE = BC$, $\measuredangle A + \measuredangle C = 180^\circ$ (ציור 10).



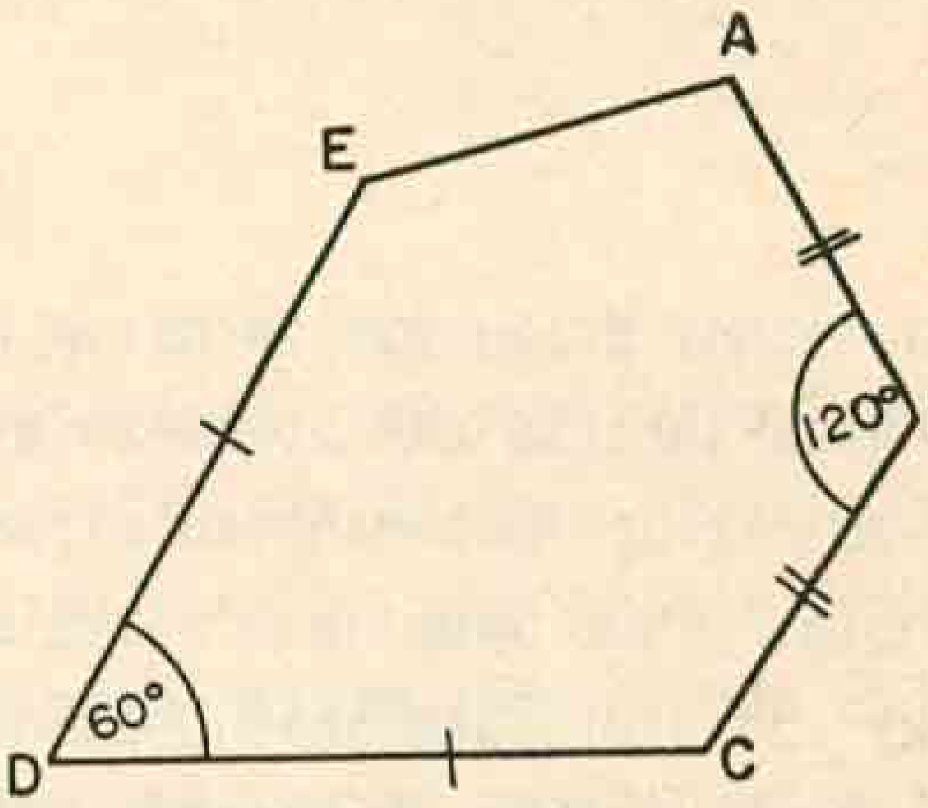
ציור 10

3) מחומש ABCDE אשר בו $AB = BC$, $CD = DE$, $\measuredangle ABC = \measuredangle CDE = 90^\circ$ (ציור 11).



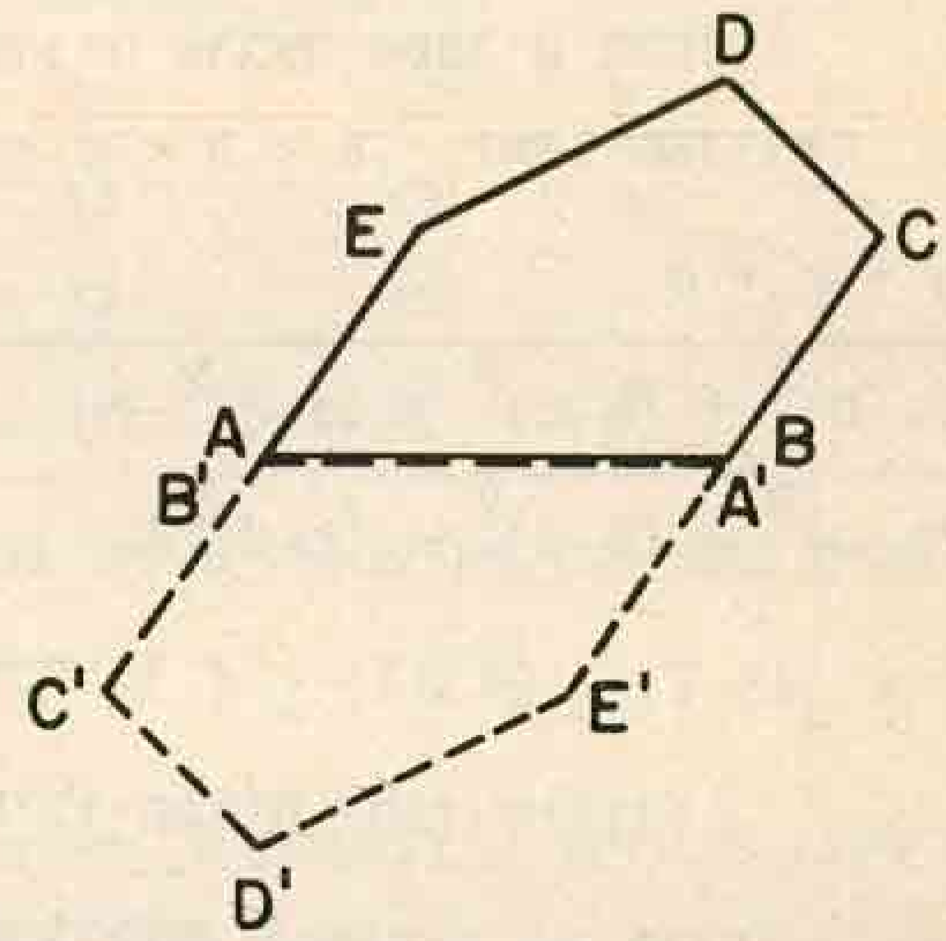
ציור 11

4) כאשר $AB = BC$, $CD = DE$, $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDE = 60^\circ$ (ציור 12).



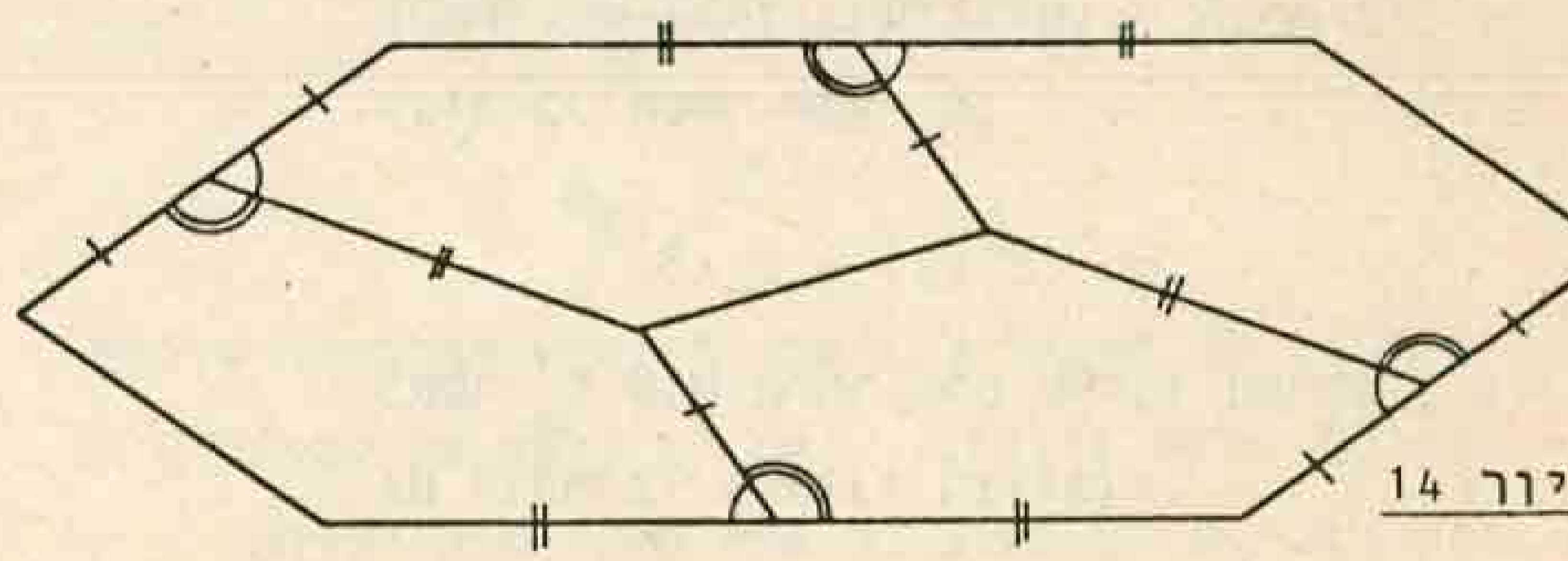
ציור 12

הוכחה 1) כי משני מחומשים כאלה אפשר להרכיב משושה משופר (ציור 13).



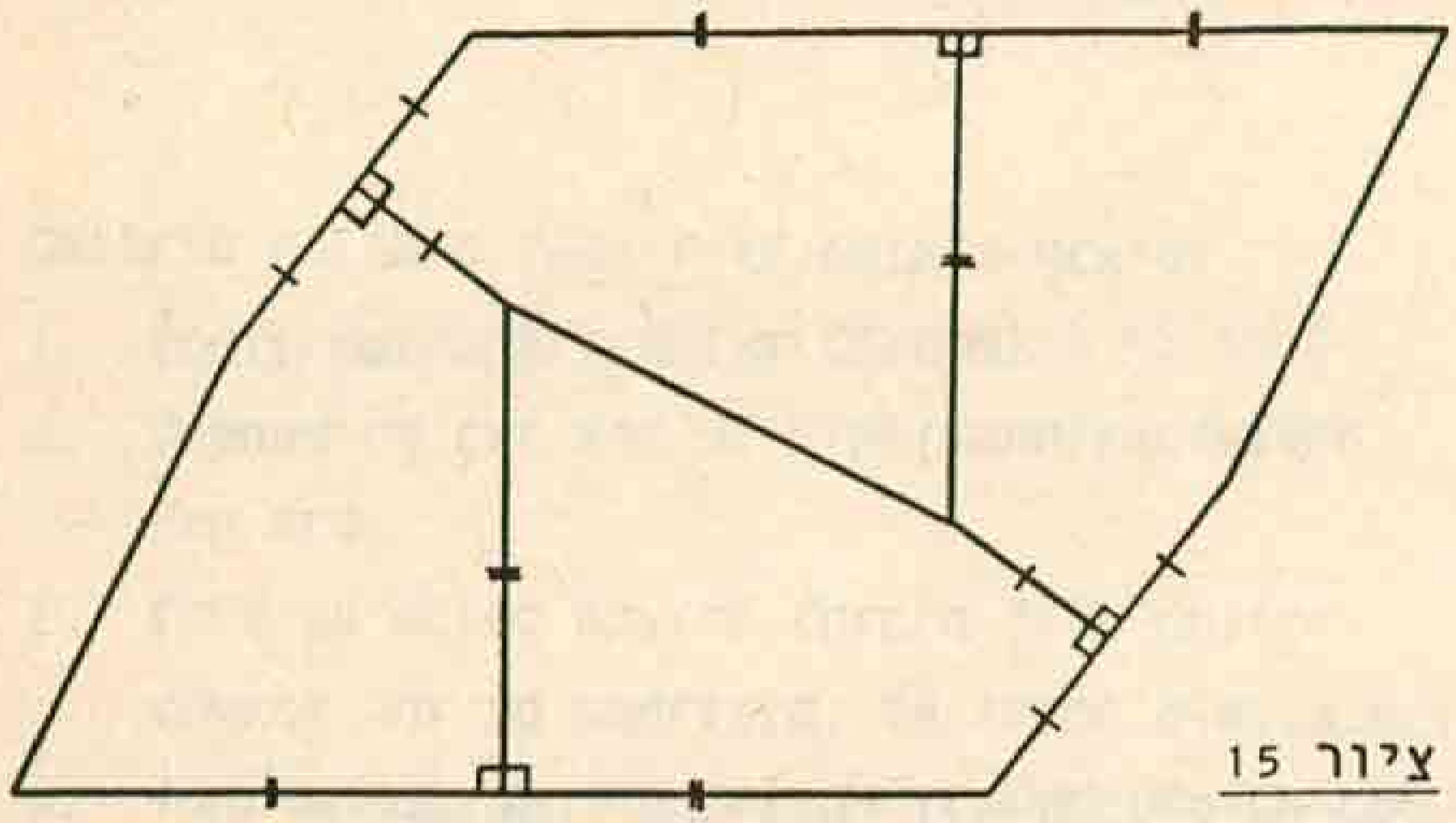
ציור 13

2) אם ניקח במקרה זה ארבעה עותקים של מחומש שבציור 11 ונחבר אותם כפי שמתואר בציור 14, נקבל שוב משושה משופר.



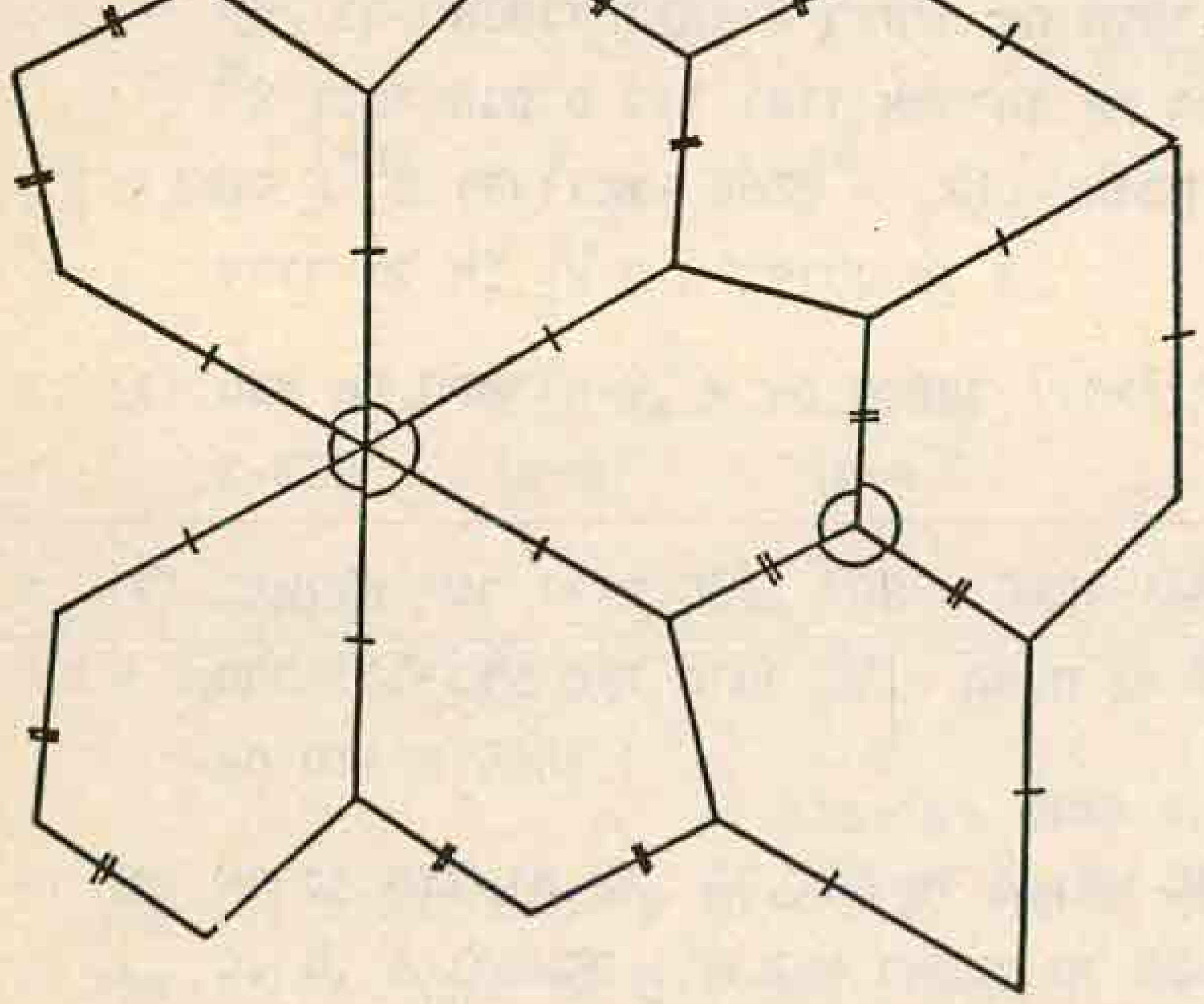
ציור 14

3) גם כאן דרושים ארבעה מחומשים כדי לבנות משושה משופר, וניתן לראות בציור 15 את רעיון הבניה.



ציור 15

4) במקרה זה, שלא כמו בשלושת המקרים הקודמים, מתבססת הבניה במישרין על המחומשים עצמם ואינה נזקקת לתחבולה של יצירת משושים משופרים. ציור 16 מציג את שיטת הכסוי.



ציור 16

אין ספק שקיימות צורות טובות רבות בנוסף על אלה שנסקרו במאמר זה. אולי ירצו הקוראים לנסות לזהות מצולעים טובים אחרים וגם לחשוב על השאלה, האם קיימות צורות טובות שאינן מצולעים (דהיינו צורות ששפתן אינה מורכבת כולה מקטעי ישרים).

4(3) הוכח כי אם $\sqrt{3^a + 1}$ הוא מספר שלם (כאשר a הוא מספר טבעי) אזי הוא צריך להיות בעל הצורה $3^b + 1$ כאשר b הוא מספר טבעי (הוצע על ידי רון עדין).

בשאלה זו נפלה טעות דפוס מצערת. למעשה קל להוכיח שהערך היחיד של המספר הטבעי a אשר עבורו $\sqrt{3^a + 1}$ הוא מספר שלם הוא $a = 1$, $2 = \sqrt{3^a + 1}$. כי מאחר ש- $(3^a + 1)$ אינו מתחלק ב 3, יוצא כי $\sqrt{3^a + 1}$, אם הוא שלם, חייב להיות מהצורה

$$3^b x \pm 1$$

כאשר x אינו מתחלק ב 3; וברור כי $a \geq b$.

אבל אז,

$$3^a + 1 = 3^{2b}x^2 \pm 2x\cdot 3^b + 1$$

ולכן

$$3^{a-b} - 3^b x^2 = \pm 2x$$

אם $a > b > 0$, אזי האגף השמאלי מתחלק ב-3, ולכן גם 2x מתחלק ב-3, בניגוד למה שכבר נקבע. לא יתכן ש- $a = b > 0$, כי אז היה

$$3^b x^2 = 1 \pm 2x$$

אבל

$$3^b x^2 - (1\pm 2x) > x^2 - (1\pm 2x)$$

$$= (x\pm 1)^2 \geq 0$$

האפשרות היחידה היא איפוא $b = 0$

ואז

$$3^a = x(x\pm 2)$$

מאחר ש-x אינו מתחלק ב-3 נשארת האפשרות היחידה $x = 1$, $a = 1$

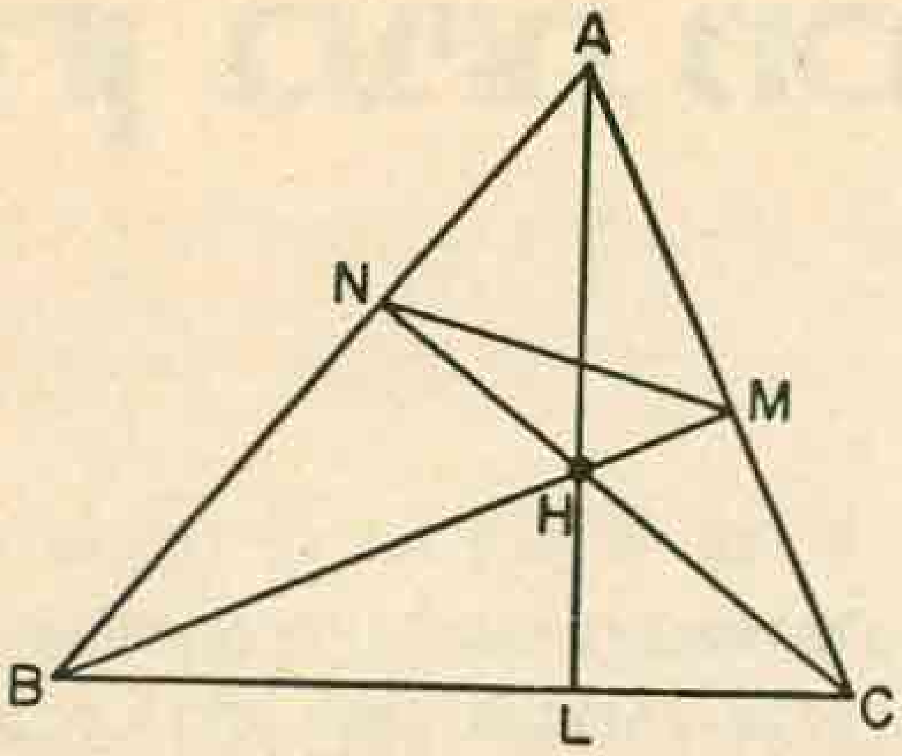
$$3^1 = 1(1+2)$$

5(4) AL, BM, CN שהם הניצבים מקדקדי המשולש ABC לצלעות המנוגדות, נפגשים בנקודה H. אם c, b, a הם אורכי הצלעות AB, CA, BC בהתאמה ו- p, q, r הם קוטרי המעגלים החוסמים את המשולשים HMN, HNL, HLM בהתאמה, הוכח כי

$$\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab} = 1$$

וכי

$$pqr \leq 3^{-3/2}abc$$



נסמן את הזויות ∢BAC, ∢CBA, ∢ACB ב-α, β, γ בהתאמה. מאחר ש-

$$\measuredangle HCM = 90° - \alpha$$

יוצא כי

$$HM = CM\cot\alpha$$

$$= a\cos\gamma\cot\alpha$$

מאידך $\measuredangle HNA = \measuredangle HMA = 90°$ ולכן המעגל על הקוטר HA עובר דרך M ו-N. מכאן ש-

$$\measuredangle HNM = \measuredangle HAM$$

$$= 90° - \gamma$$

ממשפט הסינוסים נובע כי

$$p = \frac{HM}{\sin(\measuredangle HNM)}$$

$$= a\cot\alpha$$

וכמו כן $q = b\cot\beta$, $r = c\cot\gamma$. יוצא כי

$$\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab} = \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma)\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\{\cos\beta\, co\gamma - \cos(\beta+\gamma)\}$$

$$= 1.$$

ממשפט הממוצעים נובע עכשיו כי

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{qr}{bc} + \frac{rp}{ca} + \frac{pq}{ab}\right)$$

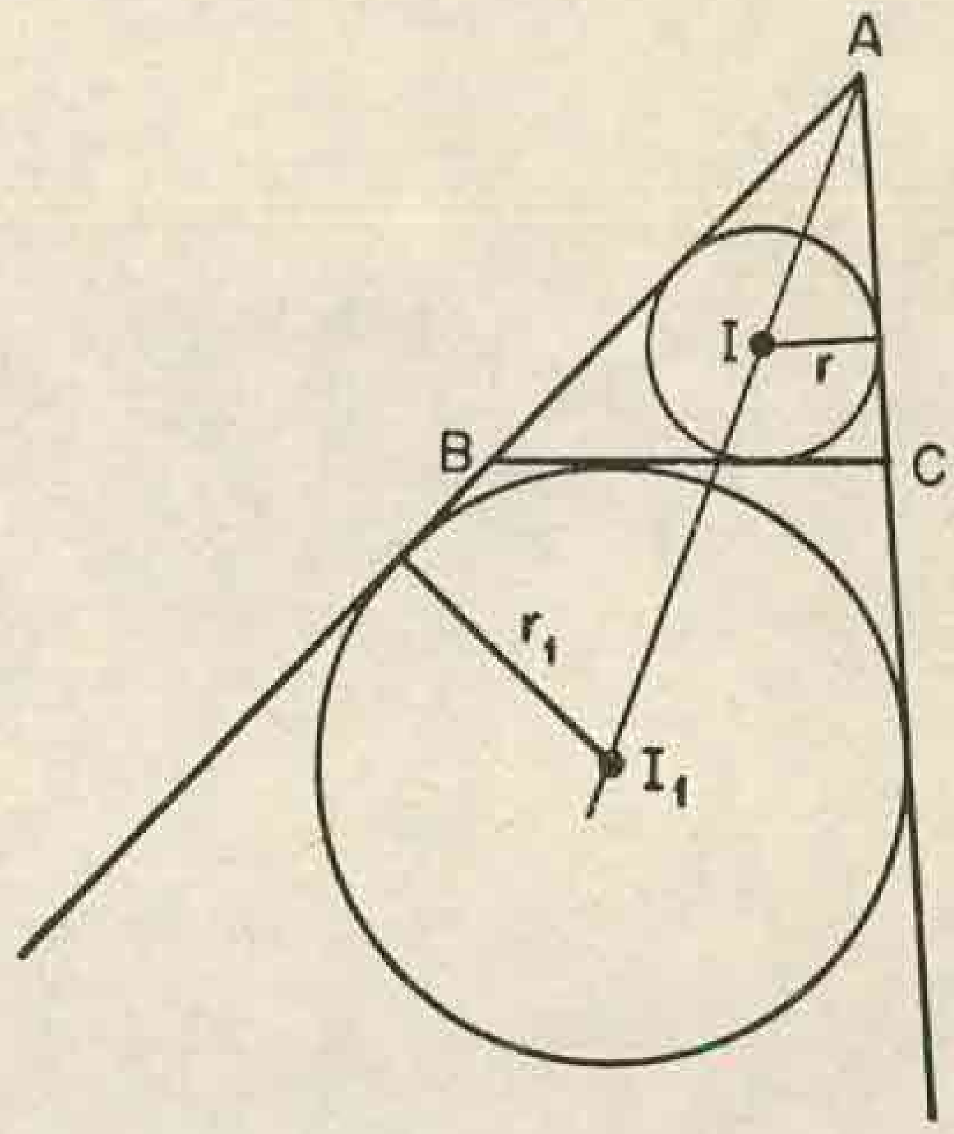
$$\geq \sqrt[3]{\frac{qr}{bc} \cdot \frac{rp}{ca} \cdot \frac{pq}{ab}}$$

$$= \left(\frac{pqr}{abc}\right)^{2/3}$$

והמסקנה מידית.

6(4) r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש ABC ואילו r_3, r_2, r_1 הם הרדיוסים של המעגלים החסומים באותו משולש מבחוץ. הוכח כי שטח המשולש הוא:

$$S_{ABC} = \sqrt{rr_1r_2r_3}$$



יהיו c, b, a אורכי הצלעות AB, CA, BC בהתאמה, I מרכז המעגל החסום ו-I_1 זה של המעגל החסום מבחוץ מול הצלע BC (ראה ציור).

נגדיר $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

רואים כי

$$S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= pr$$

מאידך

$$S_{ABC} = S_{I_1AB} + S_{I_1AC} - S_{I_1AB}$$

$$= \frac{1}{2}r_1(c+b-a)$$

$$= (p-a)r_1$$

וכמו כן

$$S_{ABC} = r_2(p-b) = r_3(p-c)$$

ע״י הכפלה, מקבלים

$$(S_{ABC})^4 = rr_1r_2r_3 \times p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= rr_1r_2r_3 \times (S^2_{ABC})$$

לפי נוסחת הירון, מכאן

$$(S_{ABC})^2 = rr_1r_2r_3$$

7(4) בהצגת מספר מסויים לפי בסיס הספירה 5 ישנן 26 ספרות, מהן 8 פעמים הספרה 4, 6 פעמים 3, ואילו הספרות 2, 1, 0 מופיעות 4 פעמים כל אחת. הוכח כי ללא קשר מה הוא סדר הופעתן של הספרות השונות, המספר לא יוכל להיות ריבוע משוכלל.

באופן כללי אם נציג מספר טבעי N, לפי בסיס ספירה כלשהו r, ז.א.

$$N = a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} \ldots + a_{n-1}r + a_n$$

ונחשב את סכום הספרות

$$S = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} + a_n$$

נקבל

$$N - S = a_0(r^n-1) + a_1(r^{n-1}-1) + \ldots + a_{n-1}(r-1)$$

כל אחד מ-n המחוברים האלה מתחלק ב-(r-1) ולכן הוא הדין לגבי N-S. במקרה שלנו $r = 5$ ולכן N-S מתחלק ב-4. אבל

$$S = 8\times4 + 6\times3 + 4\times2 + 4\times1 + 4\times0$$

$$= 62$$

ולכן N - 62 מתחלק ב-4. יוצא כי N הוא מספר זוגי שאינו מתחלק ב-4 ולכן לא יוכל להיות רבוע משוכלל.

8(5) הסדרה $\{a_k\}$ של מספרים ממשיים מקיימת:

$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \le a_{k+1} \le \dots$$

הוכח כי, עבור כל n טבעי,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} < 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1+\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

$$\le 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1-\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) + \dots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 2$$

9(5) הוכח (בלי להשתמש בטבלאות) כי:

$$\cos^3\frac{\pi}{11} + \cos^3\frac{3\pi}{11} + \cos^3\frac{5\pi}{11} +$$

$$\cos^3\frac{7\pi}{11} + \cos^3\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

נסתמך על שלוש נוסחאות ידועות

$$(1) \quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$(2) \quad \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

$$(3) \quad \cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$$

עבור כל r טבעי, נגדיר

$$c_r = \cos\frac{(2r-1)\pi}{11}$$

מ-(1) מקבלים

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)$$

ולכן

$$c_1^3 = \cos^3\frac{\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_1 + c_2)$$

כמו כן

$$c_2^3 = \cos^3\frac{3\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_2 + c_5)$$

$$c_3^3 = \cos^3\frac{5\pi}{11} = \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{15\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3c_3 + c_4)$$

ובדרך דומה

$$c_4^3 = \cos^3\frac{7\pi}{11} = \frac{1}{4}(3c_4+c_1)$$

$$c_5^3 = \cos^3\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{4}(3c_5+c_3)$$

אם נחבר את כל אלה נקבל

$$\sum_{x=1}^{5} c_x^3 = \sum_{x=1}^{5} c_x$$

ולכן נשאר להוכיח כי

$$\sum_{x=1}^{5} c_x = \frac{1}{2}$$

הזויות $\theta = \frac{(2r-1)\pi}{11}$ מקיימות כולן

$$6\theta + 5\theta = (2r-1)\pi$$

ולכן $\cos 6\theta = -\cos 5\theta$

דהיינו, לפי (2) ו- (3)

$$32\cos^6\theta + 16\cos^5\theta - 48\cos^4\theta - 20\cos^3\theta +$$
$$+ 18\cos^2\theta\ 5\cos\theta - 1 = 0$$

פתרונות המשוואה הזאת הם למעשה

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

מנוסחת ויטה אנו מקבלים

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = -\frac{16}{32}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

אבל $c_6 = \cos\pi = -1$

ולכן $\sum_{r=1}^{5} c_r = +\frac{1}{2}$

10(6) $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ הם פולינומים ונתון כי, עבור כל x,

$$P(x^3)+xQ(x^3)+x^2R(x^6) = (1+x^2+x^4)S(x)$$

הוכח כי $(x-1)$ הוא גורם של $P(x)-S(x)$.

יספיק אם נוכיח כי $P(x) - S(x)$ מתאפס כאשר מציבים $x = 1$, דהיינו ש- $P(1) = S(1)$.

נכתוב p, q, r, s עבור $P(1), Q(1), R(1), S(1)$ בהתאמה. נשתמש גם במספר המדומה

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad (1)$$

רואים מיד כי

$$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad (2)$$

$$\omega^3 = 1 \qquad (3)$$

ו- $$1 + \omega + \omega^2 = 0 \qquad (4)$$

התנאי הנתון הוא

$$P(x^3) + xQ(x^3) + x^2R(x^6) = (1+x^2+x^4)S(x) \qquad (5)$$

אם נציב $x = 1$, נקבל

$$p + q + r = 3s \qquad (6)$$

עכשיו נציב $\omega = x$. מ-(3) נובע כי גם

$$\omega^6 = 1$$
$$1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega$$
$$= 0$$

ההצבה נותנת איפוא

$$p + \omega q + \omega^2 x = 0 \qquad (7)$$

וכמו כן, ע"י הצבת $\omega^2 = x$, מקבלים

$$p + \omega^2 q + \omega x = 0 \qquad (8)$$

אם נחבר (8), (7), (6) נקבל

$$3p + q(1+\omega+\omega^2) + x(1+\omega^2+\omega) = 3s$$

ולכן, בגלל (4),

$$p = s$$

רשימת הפותרים מכרך 6 מס' 4

אלטמן צ.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	16
ארליך נ.	הראייה, רמת-גן (י')	10
בוגוסלובסקי ו.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	11
ברכה ג.	צה"ל	27
שוטי ב.	תיכון אורתודוכסי ערבי, חיפה (י"ב)	8
גירון שי	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	27
ויסמן א.	הריאלי העברי, חיפה (י"א)	10
פלוטניק מ.	הריאלי העברי, חיפה (י')	2
פרץ נורית	בת-ים	11
קליין מ.	אוניברסיטת תל-אביב (י')	32
רוט ד.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	34
רוטיץ נ.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	15
רומנו ר.	הריאלי העברי, חיפה (י"ב)	11
שטולברגר א.	נתניה	6
שרייבר א.	צה"ל	5

מעולם המחשבים

בעריכת נחמן גבעולי

שגרה ותת-שגרה

אחת הפונקציות הידועות בתורת המספרים היא סכום המחלקים. לכל מספר טבעי N אנו מיחסים את המספר $\sigma(N)$, שהוא סכום כל מחלקי N.

לדוגמא: $\sigma(12) = 28$, כי סכום מחלקי 12 היא

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

מספר משוכלל הוא, כידוע, מספר השווה לסכום של אלה מבין מחלקיו הקטנים ממנו.

נשים לב כי $\sigma(N)$ הוא הסכום של כל מחלקי N, כולל N עצמו, ולכן סכום המחלקים הקטנים מ-N הוא $\sigma(N) - N$. יוצא כי N יהיה מספר משוכלל אם $\sigma(N) - N = N$, ז.א. $\sigma(N) = 2N$.

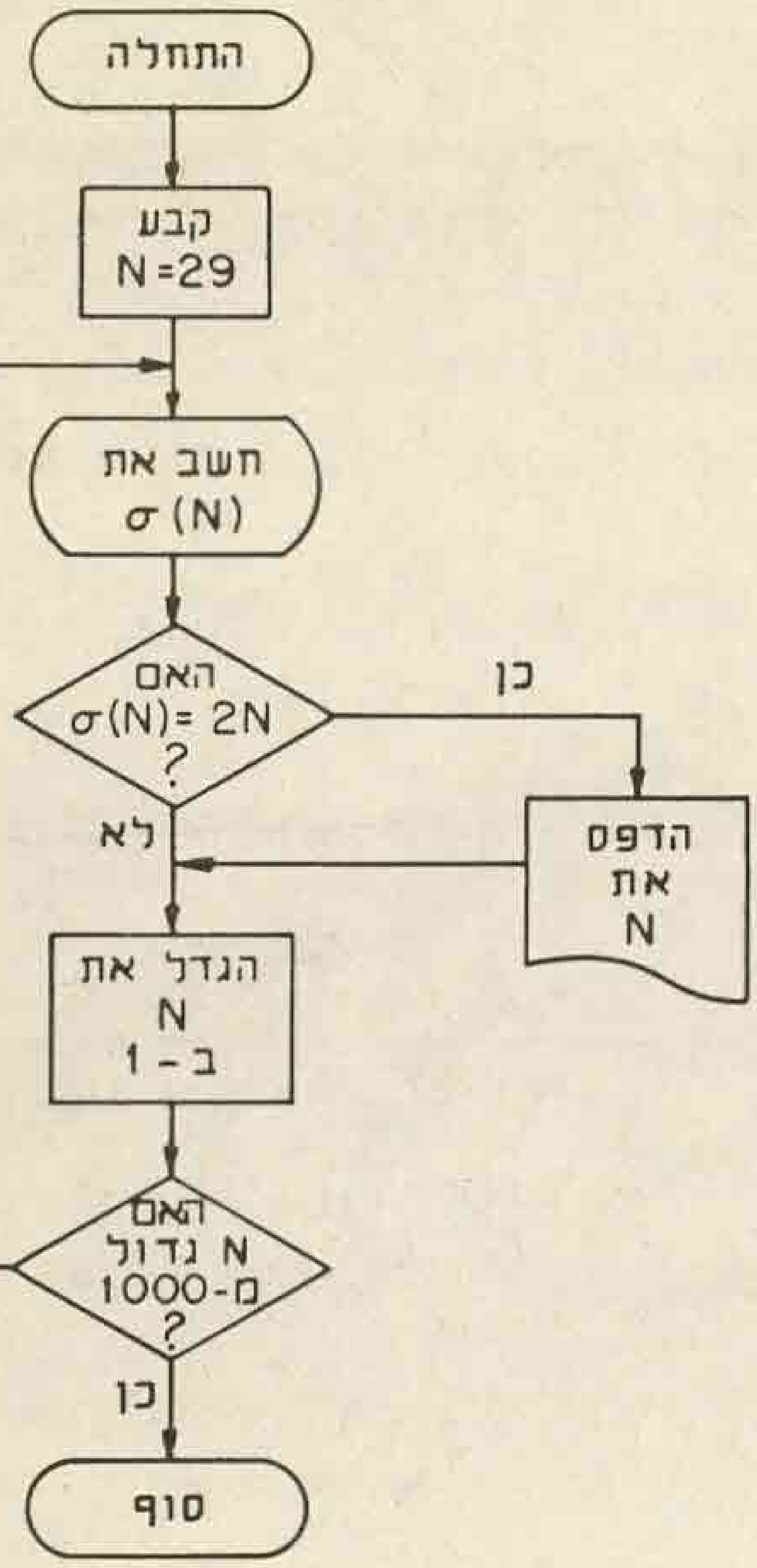
שני המספרים המשוכללים הקטנים ביותר הם:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \qquad 6 = 1 + 2 + 3$$

המחשב יכול לעזור בגילוי מספרים משוכללים נוספים. התוכנית לחישוב מספרים אלה (עד 1,000 נניח), היא פשוטה יותר:

אנו מתחילים ב- $N = 29$ (כי המספרים המשוכללים הקטנים מזה כבר ידועים לנו), ועוברים דרך כל המספרים השלמים עד 1000, תוך בדיקה מתי סכום המחלקים שווה ל-N. ברור שההוראה "חשב את $\sigma(N)$" איננה הוראה פשוטה, היכולה להינתן כפקודה ישירה למחשב. למעשה היא מורכבת מפעולות-מחשב רבות למדי, והתכניתן חייב לפרטן כדי שהמחשב יוכל לבצע את התכנית. ברם, בתרשים הסכימתי אפשר להסתפק בייצוג כל התהליך במשבצת אחת, ולהקל בכך על הבנת התרשים. עם זאת ברור למעיין בתרשים כי משבצת זו איננה הוראה בודדת אחת, אלא קבוצת הוראות, אשר לה תפקיד מוגדר - במקרה זה, לחשב את סכום המחלקים של מספר נתון.

קבוצת הוראה כזו, שהיא למעשה קטע-תכנית עם תפקיד מוגדר, נקראת שגרה (רוטינה). מה שמאפיין שגרה



(לעומת תת-שגרה, עליה נעמוד להלן), היא העובדה, שהשגרה משולבת בזכרון בתוך התכנית, ואין שום חציצה או הפרדה בינה ובין ההוראות שלפניה ושלאחריה. לפעמים האבחנה היחידה בין השגרה ובין יתר חלקי התכנית מתבטאת רק בתרשים הסכימתי הראשון, ואילו בשלבים מתקדמים יותר של פירוט התכנית נעלמת אבחנה זו. לפעמים נשארת האבחנה בתוקפה גם בהמשך, למשל - כאשר השגרה ויתר חלקי התכנית נכתבים בידי תכניתנים נפרדים. ישנן גם שגרות מוכנות, שנכתבו מראש, והן עומדות לרשותו של כל תכניתן המזדקק להן. למשל, בכל מרכז-מחשבים העוסק בחישובים מתמטיים קיימת בודאי שגרה מוכנה, המחשבת שורש ריבועי. במקום שבו עוסקים הרבה בתורת המספרים, ישנה אולי גם שגרה

מוכנה לחישוב הפונקציה σ הנ"ל. התכניתן איננו חייב במקרה זה לפרט את המשבצת הנדונה, כי יוכל לקבל קטע-תכנית זה מן המוכן, ולשלב אותו בתכניתו

תת-שגרה (סוב-רוטינה) אף היא קטע-תכנית בעל תפקיד מוגדר אלא שכאן הדגש הוא על העובדה שקטע-תכנית זה דרוש בתכנית יותר מפעם אחת. כדי להבהיר זאת ניקח את הדוגמא של חישוב מספרים מיודדים.

שני מספרים טבעיים נקראים מיודדים, אם כל-אחד מהם שווה לסכום מחלקי האחר הקטנים ממנו. במילים אחרות, אם K ו-L מקיימים

$$\sigma(K) - K = L \quad : \quad \sigma(L) - L = K$$

במלים אחרות $\sigma(K) = \sigma(L) = K + L$

- אזי K ו- L הם מיודדים. שני המספרים המיודדים הקטנים ביותר הם 220 ו- 284, כ-

$$\sigma(220)-220 = 1+2+4+5+10+11+20$$
$$+22+44+55+110 = 284$$

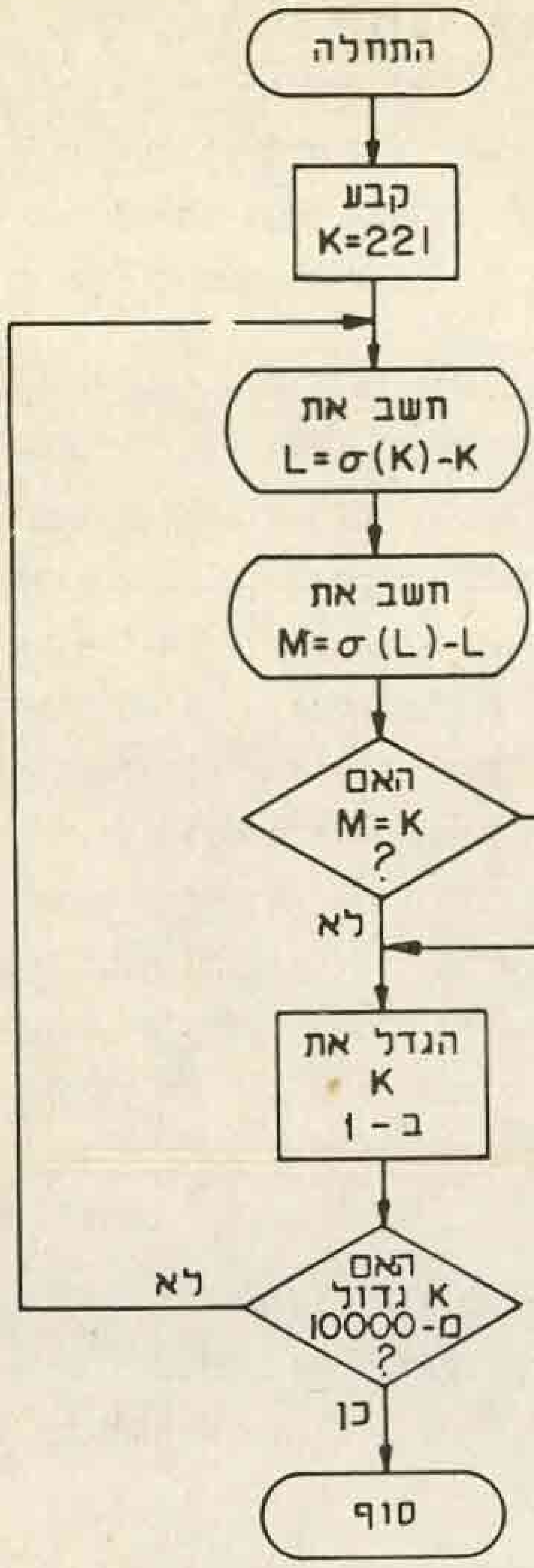
$$\sigma(284)-284 = 1+2+4+71+142 = 220$$

שוב נוכל להעזר במחשב למציאת עוד זוגות של מספרים מיודדים. נלך הפעם עד 10,000. תרשים התכנית מתואר בעמודה הבאה.

כאן מופיעה למעשה פעמיים אותה השגרה: חישוב סכום מחלקים של K (שהוא L), וחישוב סכום המחלקים של L (שהוא M). אם יפרט התכניתן את השגרה במלואה, יווכח שהיא ארוכה למדי.

פירוש הדבר שאותו קטע-תכנית ארוך ייכלל בתכניתו פעמיים. דבר זה גורם לעבודה כפולה של התכניתן - עליו לפרט פעמיים אותה קבוצה של הוראות - וידוע כי אין דבר השנוא על תכניתן יותר מן הצורך לפרט אותן ההוראות פעמיים; זאת לאו-דוקא מחמת עצלות, אלא בעיקר משום שהדבר איננו נראה לו אלגנטי. סיבה מעשית יותר היא, שהתכנית מתארכת ותופסת יותר מקום בזכרון. כמו כן, קיים כלל גדול בתכנות: מרבה הוראות מרבה טעויות; התכנית נעשית מסורבלת ומפסידה מפשטותה ומבהירותה.

אי לכך, אומר התכניתן לעצמו: חישוב סכום המחלקים של מספר נתון יכול להיות שגרה נפרדת, המוחסנת בפינה צדדית, כביכול, של המחשב. בכל עת שאזדקק



לשגרה אדלג אליה, ולאחר החישוב אחזור אל התכנית העיקרית. בשיטה זו, השגרה הארוכה של חישוב סכום המחלקים נכתבת ונמצאת בזכרון המחשב רק פעם אחת, אך הדילוג אליה מתבצע משני מקומות נפרדים בתכנית.

ברור שיש לספק לשגרה את המספר הנתון ולקבל ממנה את התוצאה. לכן צריך להיות תא מיוחד בזכרון, שנסמנו ב-X, שבו התכניתן מספק לשגרה את הארגומנט, וכן תא Y, שבו הוא מקבל ממנה את ערך הפונקציה. פירוש הדבר שלפני הכניסה לשגרה חייבת להינתן הוראה מיוחדת, המכניסה את הארגומנט לתא X, ובגמר השגרה חייבת לבוא הוראה, הנוטלת את ערך הפונקציה מהתא Y.

ברם, בכך אין די. מתעוררת השאלה, איך יכול המחשב לדעת, בגמר פעולת השגרה, לאן עליו לחזור? הרי הדילוג אל השגרה מתבצע ממקומות שונים בתכנית, והחזרה צריכה להיות תמיד אל המקום שממנו היה הדילוג.

בעיה זו נפתרת בדרכים שונות, שעיקרן הוא זה: לפני הדילוג לשגרה, או ברגע הכניסה אליה, רושמים בזכרון המחשב מעין תמרור, שבו מצויין מהיכן נעשה הדילוג. בגמר פעולת השגרה נבדק התמרור ובהתאם למצוין בו מתבצע הדילוג בחזרה אל התכנית העיקרית.

מסירת הנתון (או הנתונים) לשגרה, קבלת התוצאה, יצירת התמרור המציין את נקודת הדילוג, הדילוג לשגרה, בדיקת התמרור בגמר השגרה, הדילוג בחזרה - כל הפעולות הללו גורמות לכך שהשימוש בתת-שגרה מאריך את משך הביצוע של התכנית יותר מאשר אילו היתה השגרה משולבת בגוף התכנית בכל מקום בו היא דרושה. יש לשקול איפוא את הפסד הזמן לעומת הרווח בתפוסת הזכרון ובטרחתו של התכניתן. כמו-כן ברור כי במקרה של תת-שגרה קטנה, הדרושה רק בשנים או בשלושה מקומות בתכנית, אין כמעט, או אין בכלל, רווח בתפוסת הזכרון. השכר הנובע מכך שהשגרה נמצאת בזכרון רק פעם אחת, במקום פעמיים או שלוש, יוצא בהפסד של ההוראות הנוספות הנ"ל הדרושות להפעלת השגרה.

לסיום, כבעיה לקוראינו, אנו מציעים לכם לפרט את תרשים השגרה המחשבת את הפונקציה σ - היינו סכום מחלקיו של מספר נתון.

פתרון הבעיה בחוברת הקודמת

תרשים הזרימה שבציור,אם נתעלם מהקו המרוסק, התיימר לתאר תכנית המסדרת בסדר עולה כל שלושה מספרים נתונים. אם נניח שהמספרים הנתונים X, Y ו- Z הם 1, 2 ו-3 קיימות שש אפשרויות של סדר התחלתי של המספרים הללו:

<u>321</u>, 312, <u>231</u>, 213, 132, 123

מתוך אלו, רק בארבעה מקרים תשיג התכנית את מטרתה, ואילו בשני המקרים הנותרים, המסומנים בקו, לא יתקבל סדר עולה של המספרים.

אנו מציעים לקוראים שינסו לעקוב אחר פעולת התכנית המוצעת במקרים אלה, צעד אחר צעד, כדי להיווכח שזה אמנם המצב.

תיקון התרשים הוא פשוט: במקום לסיים אחרי המשבצת התחתונה, חזור שוב לתחילת התכנית. במלים אחרות - הוסף את הקו המרוסק.