גליון למתמטיקה ולפיסיקה

לנוער המתלמד

מרץ 1942. חוברת א' ניסן תשיב

דבר אל הקורא

מי מאתנו לא שאל פעם – או לפחות שמע – את השאלה: "מתימטיקה זו – למה ליי?" מכל המתימטיקה שלמדנו בבית-הספר, רק חלק קטן בא לידי שמוש מעשי. אפילו המהנדסים אינם בזקקים לכל ההוכחות והבניות של אבקלידס; סתם יהודים לא כל שכן. וכי רק כדי להשביע את רצון המורים או כדי לזכות בתעודת גמר, עלינו לאמץ את מוחנו ולבזבז את זמננו על בעיות מופשטות אלה?

סבורני כי בחוברת זו ניתנת תשובה לשאלתנו. מי שהרגיש פעם בפלא וביופי שבמתימטיקה איננו שואל עוד: כל זה למה ליי? כי אם להפך נמשך הלאה, כתיר המגלה ארץ חדשה או כילד בטיולו הראשון.

כהקדמה הנני מציע לך תרגיל קל. הפוך את השברים הפשוטים הבאים לשברים עשרוניים: $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$; ואחר כך כפול את העשרוניים שקבלת ב 2, 3, 4, וכו' עד 7 בסקרה הראשון, עד 13 בסקרה השני. ציין לפניך מהו המפליא בתוצאותיך. לבאר אותן לא קל. חלק מהבאור תמצא במאמרו של ד"ר לויצקי: את השאר נקוה כי ימציאו לנו המחברים בחוברות הבאות.

והרי אין דוגמה זו אלא טפה בים. ניוטון – הוא שיסד את האנליז וגלה את החוקים היסודיים של מסלולי הכוכבים – היה אומר: "איננני יודע כיצד רואים אותי אחרים. בעיני נדמיתי לילד המשתעשע על חוף הים, המוצא מדי פעם בפעם אבן חלקה יותר, או צדף יפה יותר מהרגיל, בשעה שהים הגדול של האמת שעוד לא גילוה פרוש לפנינו."

תודה למחברים שניסו בחוברת זו לקרב אותנו לים הגדול הזה. אנן מקוים כי ימשיכו במפעלם בחוברות הבאות עלינו לטובה.

ירושלים, אדר תשיב. יוסף בנשואיץ

דבר המערכת

פגעי הזמן לא מנעונו מלהוציא אל הפועל תכנית שנשאנו בחובנו זמן רב. חושבים אנו כי דפים אלה שאנו מגישים ממלאים צורך שהורגש מכבר.

בכל מדינות העולם שיש בהן נוער צמא דעת מופיע עתון כזה, והעלונים הללו שמשו לא פעם "תחנות נסיון" למתימטיקאים של הדור הבא. אמנם, מספר בתי הספר התיכוניים והנוער הלומד בהם בארצנו אינו רב. ועובדה זו, ביחד עם מסיבות הזמן, תגרום לכך שעלוניגו יהיה צנוע במקצת בלבושו החיצוני. אך "אל תסתכל בקנקן אלא במה שיש בו", ורבה תקותנו שלא רחוק היום בו נוכל לשפר גם את צורתו החיצונית.

מטרת הדפים האלה: ל ה ע מ י ק את הידיעות במתימטיקה ובפיסיקה שרכשתם לכם בבית-הספר, לתת לכם אפשרות לנסות את כוחכם בהתרת בעיות ולעודד בכם את האהבה למתימטיקה ולפיסיקה. אין בדעתנו לחגור ממסגרת המתימטיקה האלמנטרית אך גם בתוך מסגרת זו רבים מאד הכללים, השיטות והשימושים שלא מצאו את מקומם בתכנית הלמודים של בתי הספר – מחמת ההכרח בצמצום – ולא מועט גם החומר אשר איגו נלמד אף באוניברסיטה – בגלל אופיו האלמנטרי.

בקשה אחת לנו אליכם אסר מלואה או אי מלואה יקבעו את הצלחתו של מפעלנו הצנוע: אל נא תסתפקו בקריאת המאמרים בלבד! התירו את התרגילים המופיעים בהם, פתרו את הבעיות האחרות ושלחו לנו את אשר העליתם! מסרו לנו מה מצא חן בעיניכם, אולם אל תמנעו מלציין גם את השלילי, הציעו את הצעותיכם לשכלול, לגיוון, להרחבה ולהעמקה, אך אל תשכחו כי קצר המצע ומוגבלים האמצעים. – –

רובו של הגליון מיועד לכל תלמידי 4 הכתות העליונות של בית-ספר תיכון ורק מיעוטו בנוי על הידיעות הנרכשות בשתי הכתות האחרונות של המגמה הריאלית. אולם אם יקרה שפרט זה או אחר יחסר לכם, פנו אל מוריכם ואלה יעזרו לכם ברצון.

ד"ר י. לויצקי

על הפיכת שברים פשוטים לשברים עשרוניים.

§. הזכרו-נא בתהליך החשבוני, אשר בעזרתו למדתם להפך שבר פשוט לשבר עשרוני. אם השבר הוא $\frac{31}{250}$, כפלתם 31 ב 10 ומצאתם כי 310 מכיל את 250 פעם אחת ומפריש את השארית 60. כפלתם 60 ב 10 ומצאתם כי 600 מכיל פעמיים את 250 ומפריש את השארית 100. כפלתם 100 ב 10 ומצאתם כי 1000 מכיל 4 פעמים את 250 ומפריש את השארית 0. לפיכך הפסקתם כאן את החשבון וקבעתם כי השבר הפשוט $\frac{31}{250}$ שוה לשבר העשרוני המסויים 0,124.

בטבלה שלהלן (דוגמה א') רשמנו בקצור את פעולות החשבון המתוארות לעיל. לשם נוחיות הדיון שיבוא בסעיפים הבאים רשמנו בראשית החשבון המתואר את השויון $31=0.250+31$, אשר נוכל לבטאו במלים כך: המונה (31) מכיל את המכנה (250) 0 פעמים ומפריש את השארית 31.

בחשבון דומה לגבי השבר $\frac{2}{111}$ (ראה דוגמה ב' בטבלה שלהלן) אנו מוצאים כי לעולם לא נגיע לשארית השוה ל 0. אך מכיוון שהשארית בשורה הרביעית שוה לשארית בשורה הראשונה, אנו מסיקים כי החל ממקום זה ואילך יחזרו הלוך וחזור החשבונות אשר בהם התחלנו בשורה השניה, ועמם יחד תחזרנה הלוך וחזור באותו סדר אף שלש הספרות הראשונות של השבר העשרוני המבוקש. מכאן אנו מסיקים כי השבר הפשוט $\frac{2}{111}$ שוה לשבר המחזורי הטהור 0,018...

גם אצל השבר $\frac{103}{330}$ לא נתקל לעולם בשארית השוה ל 0 (דוגמה ג' בטבלה דלהלן). כאן השארית שבשורה השניה היא הראשונה שבשאריות החוזרות (היא שוה לשארית שבשורה הרביעית), ואנו מקבלים את השבר המחזורי המעורב 0,312...

נרשום בקצור את החשבון המתואר לעיל לגבי שלושת השברים בטבלה הבאה:

דוגמה א': $\frac{31}{250}$	דוגמה ב': $\frac{2}{111}$	דוגמה ג': $\frac{103}{330}$
31=0.250+ 31	2=0.111+ 2 *	103=0.330+103
10.31=1.250+ 60	10. 2=0.111+20	10.103=3.330+ 40 *
10.60=2.250+100	10.20=1.111+89	10. 40=1.330+ 70
10.100=4.250+ 0	10.89=8.111+ 2 *	10.70=2.330+ 40 *
$\frac{31}{250} = 0,124$	$\frac{2}{111} = 0,\dot{0}1\dot{8}...$	$\frac{103}{330} = 0,3\dot{1}\dot{2}...$

אולי תטענו: הן את כל אלה למדנו עוד בבית-הספר העממי! לפיכך מן הראוי הוא שנסביר עתה את מטרתו של המאמר הנוכחי בעזרת שאלות אחדות, אשר בפתרונן נטפל בסעיפים הבאים.

יהי, כמו בשלש הדוגמות הנ"ל, $\frac{a}{b}$ שבר פ ש ו ט (כלומר: a ו b הם מספרים שבעיים), א מ ת י (כלומר: a<b), ו מ צ ו מ צ ם (כלומר a ו b ז ר י ם זה לזה; כך קוראים לשני מספרים שאין להם מחלק משותף השונה מ 1).

ש א ל ה א': האם כל שבר כזה ישוה לשבר עשרוני מסויים או מחזורי טהור או מחזורי מעורב, או שמא קיימים שברים פשוטים אשר לא יסוו לא לשבר מסוים ולא לשבר מחזורי?

ש א ל ה ב': לגבי אילו שברים יביאנו החשבון המתואר בטבלות הנ"ל כעבור מספר צעדים סופי לשארית השוה ל 0 ויתן לנו את הצגתו של $\frac{a}{b}$ בתור שבר עשרוני מסויים?

ש א ל ה ג': מתי ישוה השבר $\frac{a}{b}$ לשבר עשרוני מחזורי טהור?

ש א ל ה ד': מתי ישוה השבר $\frac{a}{b}$ לשבר עשרוני מעורב?

תיטיבו לעשות אם תתעסקו בשאלות הנ"ל בכדי שתווכחו כי שרם ניתנו להן בבית-הספר תשובות ממצות, תשובות אשר אף הוכחות בצדן.

§2. מכאן ואילך יסמן $\frac{a}{b}$ (כמו ב §1) שבר פשוט, אמתי ומצומצם.
בעקבות שלוש הדוגמות נרשום את הצעדים הראשונים של התהליך החשבוני שבעזרתו המשכים שבר פשוט לשבר עשרוני. כמו שם נתחיל את החשבון ע"י השויון $a=0.b+a$.
עתה נכפול את a ב 10 ונניח כי $10a$ מכיל s_1 פעמים את b ומפריש את השארית a_1.
אם a_1 שונה מ 0, נסתכל ב $10a_1$ ונניח כי מכפלה זו מכילה s_2 פעמים את b ומפרישה את השארית a_2. כך נוכל להמשיך ולחשב את השאריות ללא קץ, אלא אם כן נגיע כעבר מספר צעדים סופי (כמו בדוגמה א' של §1) לשארית השוה ל 0.
אם עוד נכתוב, לשם אחידות הסמון, a_0 במקום a, נוכל לסכם את החשבון המתואר לעיל ע"י השויונות הבאים:

$$
\begin{array}{ll}
a_0=0.b+a_0 & \text{הפעולה הראשונה של התהליך החשבוני המתואר} \\
10a_0=s_1.b+a_1 & \text{" השניה " " " "} \\
10a_1=s_2.b+a_2 \quad \text{אם} & \text{" השלישית " " " "} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
10a_{r-1}=s_r.b+a_r \quad \text{אם כל} & \text{" ה r+1 " " " " , השארית הקודמות שונות מ 0}
\end{array}
\qquad (1)
$$

בדוגמה א' של §1: $a_0=31$, $a_1=60$, $a_2=100$, $a_3=0$, $s_1=1$, $s_2=2$, $s_3=4$.
ובדוגמה ב' של §1: $a_0=2$, $a_1=20$, $a_2=89$, $a_3=2$, $a_4=20$, וכו'.

תרגיל א': חשב את a_{10} ואת s_{10} בדוגמה ב' של §1.
תרגיל ב': הוכח כי המספרים s_1, s_2, s_3 וכו' אשר ב (1) הם אמנם ספרות, דהיינו קטנים מ 10.

אם נכפל את השויון השני שב (1) ב 10, נקבל $10^2.a_0=10s_1b+10a_1$.
עתה נציב במקום $10a_1$ את ערכו לפי השויון השלישי שב (1) ונקבל

$$10^2.a_0=10s_1b+s_2b+a_2$$

או

$$10^2a_0=(10s_1+s_2)b+a_2 \qquad (2)$$

תרגיל ג': הוכח את השויון $10^3a_0=(10^2s_1+10s_2+s_3)b+a_3$.
תרגיל ד': מצא את ערכו של a_5 בדוגמה של §1 ואשר כי a_5 היא השארית אשר מפריש $10^5.103$ בהתחלקו ב 330.

השויונות שב (2) ובתרגיל ג' נותנים מקום להשערה כי, במקרה שהשאריות $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ שונות מ 0, יתקיים גם השויון הבא:

$$10^ra_0=(10^{r-1}s_1+10^{r-2}s_2+\ldots+s_r)b+a_r \qquad (3)$$

ואמנם אפשר להוכיח את אמתותה של הנוסחה (3) ע"י אינדוקציה שלמה, ואת ההוכחה הזאת תמצאו בתוספת למאמר הזה.

§3. נפנה עתה לפתרונן של הבעיות אשר הצגנו בהקדמה. בסעיף זה נטפל בבעיה: מתי ייפסק התהליך החשבוני המתואר ב (1) ע"י כך שנגיע לשארית השוה ל 0 ונמצא באופן זה את הצגתו של $\frac{a}{b}$ ע"י שבר עשרוני סופי?

נניח תחילה כי r השאריות הראשונות $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ שונות מ 0 אבל $a_r=0$. (כך למשל בדוגמה א' שב §1 מצאנו כי a_0, a_1, a_2 שונים מ 0 אבל $a_3=0$. לכן כאן $r=3$) הנוסחה (3) נותנת במקרה זה

$$10^ra=(10^{r-1}s_1+\ldots+s_r)b,$$

ולכן

$$\frac{a}{b}=\frac{10^{r-1}s_1+\ldots+s_r}{10^r} \qquad (5)$$

מכיוון ש $\frac{a}{b}$ הנהו שבר מצומצם, אומר השויון האחרון כי b מחלק את 10^r, דהיינו: אם בחשבון המתואר ב (1) נגיע כעבר מספר צעדים סופי לשארית השוה ל 0, אזי b מוכרח לחלק חזקה מסויימת של 10.

עתה נניח כי b מחלק חזקה מסויימת של 10, 10^r, ונוכיח כי בחשבון המתואר ב (1) נגיע כעבר מספר צעדים סופי לשארית השוה ל 0. ואמנם, לו היו כל השאריות ב (1) שונות מ 0, היינו מקבלים על-סמך הנוסחה (3) את השויון

$$a_r=10^ra-(10^{r-1}s_1+\ldots+s_r)b \qquad (6)$$

לפי הנחתנו b מחלק את המספר $10^r a$ אשר באגף הימני של השויון (6); כמו כן מחלק b אף את המחסר
$$(10^{r-1}s_1+\ldots+s_r)b\ ,$$
ולכן b מוכרח לחלק את הבדלה a_r. אבל a_r הריהי שארית של חלוק לגבי b, ועל כן $a_r<b$, והן לא יתכן כי b יחלק מספר טבעי הקטן ממנו. הסתירה, אשר בה נתקלנו, מוכיחה כי אם b מחלק חזקה ידועה של 10, אזי לא יתכן כי כל השאריות שב (1) תהיינה שונות מ 0. נסכם את מסקנותינו בסעיף זה במשפט הבא:

משפט א': תנאי הכרחי ומספיק להצגתו של השבר $\frac{a}{b}$ בתור שבר עשרוני מסויים הוא כי b יחלק חזקה מסויימת של 10.

§4. בסעיף זה נטפל במקרה שבחשבון המתואר ב (1) לא נגיע לעולם לשארית השוה ל 0. על-סמך הסעיף הקודם אין דבר זה יכול לקרות, אלא אם כן בין מחלקיו הראשוניים של המכנה b יימצא לפחות מספר אחד השונה מ 2 ומ 5. מכיון שכל השאריות a_0, a_1, a_2, a_3 וכו' הנם מספרים טבעיים הקטנים מ b, הרי אם נרשום לפנינו את b השאריות הראשונות
$$,\ a_{b-1},\ldots,a_2,a_1,a_0 \qquad (7)$$
בלי ספק הנמצא ביניהן לפחות שתים השוות זו לזו (כי הלא מצויים רק b–1 מספרים טבעיים שונים הקטנים מ b והם 1, 2, ..., b – 1). ההערה הפשוטה הזאת כבר נושאת בחובה את ההוכחה הכללית לעובדה כי שבר $\frac{a}{b}$ אשר מכנהו מתחלק לפחות במספר ראשוני אחד השונה מ 2 ומ 5 שוה לשבר מחזורי. ואמנם, אם השארית a_r שוה לשארית a_{r+k} העוקבת אותה, אזי ברור כי החשבון אשר בו עלינו להמשיך, לאחר שהגענו אל השארית ה r+k, יהיה חזרה ממש על החשבון שכבר נעשה לאחר הגיענו אל השארית ה r. (כך, למשל, בדוגמה ב' של §1 יכולנו לבחור: r=0, r+k=3.)

נסכם את מסקנותינו בסעיף הזה במשפט הבא:

משפט ב': כל שבר $\frac{a}{b}$, אשר מכנהו מתחלק לפחות במספר ראשוני אחד השונה מ 2 ומ 5, שוה לשבר עשרוני מחזורי.

בודאי תזכרו כיצד הופכים שבר מחזורי טהור לשבר פשוט. אם, למשל, $\alpha = 0,\dot{3}12\dot{9}\ldots$ (כאן חוזרות הלוך וחזור 4 הספרות הראשונות שאחרי הפסיק), אזי כופלים את α ב 10^4 ומקבלים $10^4\alpha = 3129,\dot{3}12\dot{9}\ldots$; עתה מחסרים את α מ $10^4\alpha$ ומקבלים $10^4\alpha-\alpha=(10^4-1)\alpha = 3129$. לכן
$$\alpha = \frac{3129}{10^4-1}$$

באופן כללי, אם נתון השבר המחזורי הטהור $\alpha = 0;\dot{s}_1 s_2\ldots\dot{s}_r\ldots$ (בו חוזרות הלוך וחזור n הספרות הראשונות שאחרי הפסיק), אזי כופלים את α ב 10^n ומקבלים $10^n\alpha = s_1s_2\ldots s_n,\dot{s}_1 s_2\ldots\dot{s}_n\ldots$. מחסרים את α מ $10^n\alpha$ ומקבלים $(10^n-1)\alpha = \overline{s_1s_2\ldots s_n}$ (בכדי למנוע אי-הבנה סמנו ב $\overline{s_1\ldots s_n}$ את המספר $(s_1 10^{n-1}+s_2 10^{n-2}+\ldots+s_n$; לפיכך
$$\alpha = \frac{\overline{s_1s_2\ldots s_n}}{10^n-1} \qquad (8)$$

§5. נטפל עתה בשאלה: מתי ישוה שבר $\frac{a}{b}$ לשבר עשרוני מחזורי טהור? תשובה מלאה לשאלה זו נשיג בשלושת השלבים הבאים:

שלב ראשון: ראשית נוכיח כי אם בתהליך החשבוני המתואר ב (1) השארית a_0 (זאת המונה עצמו) תשוה לאחת השאריות העוקבות אותה, אזי השבר ישוה לשבר מחזורי טהור. ואמנם, אם $a_0=a_k$; הרי לכשנגיע (כעבור k+1 צעדים) אל השארית a_k, יהיו צעדי החשבון הבאים חזרה ממש על צעדי החשבון שבו התחלנו עם השארית a_0 בשורה השניה של (1). לפיכך תחזרנה הלוך וחזור באותו סדר k הספרות הראשונות שאחרי הפסיק. כך, למשל, מצאנו בדוגמה ב' של §1 כי $a_3=a_0$; שם היה אפוא k=3.

שלב שני: שנית נוכיח כי אם השבר $\frac{a}{b}$ שוה לשבר מחזורי טהור אזי המכנה b זר ל 10. ואמנם, אם $\frac{a}{b} = 0,s_1\ldots s_n\ldots$, אזי לפי נוסחה (8) נקבל
$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{s_1\ldots s_n}}{10^n-1}\ .$$

מכיוון ש $\frac{a}{b}$ הנהו שבר מצומצם, הרי ש b מחלק את 10^n-1. והלא ברור כי מספר המחלק את אחד המספרים של הסדרה 9, 99, 999, וכו' אינו מתחלק לא ב 2 ולא ב 5. לפיכך b זר ל 10.

<u>שלב שלישי</u>: שלישית נוכיח, כי אם מכנהו b של שבר פשוט אמתי ומצומצם $\frac{a}{b}$ זר ל 10, אזי בתהליך החשבוני ב (1) תשוה השארית הראשונה a_o (ז"א המונה עצמו) לאחת השאריות העוקבות. לשם כך, בהסתמכנו על הנאמר בראשית הסעיף הרביעי, נסמן ב a_k את השארית הראשונה שבסדרה (7) השוה לאחת השאריות העוקבות אותה, ז"א $a_k=a_{k+r}$, ונניח בנגוד לטענתנו כי $k>0$.

נרשום עתה את השויון ה k+1 שב (1): $10a_{k-1}=s_kb+a_k$.

נרשום כמו כן את השויון ה k+r+1 שב (1): $10a_{k+r-1}=s_{k+r}b+a_{k+r}$.

מכיוון ש $a_k=a_{k+r}$, נקבל עי"י חסור את השויון $10(a_{k+r-1}-a_{k-1})=(s_{k+r}-s_k)b$. שויון זה אומר כי המספר b מחלק את המכפלה $10(a_{k+r-1}-a_{k-1})$; מכיון ש b זר ל 10, הרי מוכרח b לחלק את $a_{k+r-1}-a_{k-1}$. מכיוון שהמחוסר והמחסר שבהבדל $a_{k+r-1}-a_{k-1}$ שניהם שאריות של חלוק ב b, הריהם מספרים טבעיים הקטנים מ b; הבדלם של שני מספרים כאלה אינו יכול להתחלק ב b, אלא אם כן הוא שוה ל 0; ז"א $a_{k-1}=a_{k+r-1}$. השויון האחרון סותר את הנחתנו כי a_k היא השארית הראשונה השוה לאחת השאריות העוקבות אותה, שהרי a_{k-1} קודמת ל a_k. מסתירה זו אנו למדים כי אמנם $a_k=a_o$.

משלוש המסקנות האחרונות נובע מיד המשפט הבא:

משפט ג': תנאי הכרחי ומספיק בכדי ששבר $\frac{a}{b}$ ישוה לשבר מחזורי שהורו הוא שb יהיה זר ל 10.

בתור מסקנה הגיונית מן המשפט הקודם אנו מקבלים את המשפט הבא:

משפט ד': אם שבר $\frac{a}{b}$ שוה לשבר מחזורי מעורב, אזי המכנה b אינו זר ל 10.

תוספת: ברצוננו להוכיח את נכונותה של הנוסחה (3) לגבי כל r שהוא. ואמנם, לגבי r=1 הנוסחה נכונה, כי במקרה זה הריהי מתלכדת עם השויון $10a_o=s_1.b+a_1$. בכדי להוכיח את נכונותה גם בשביל כל r הגדול מ 1, נניח את נכונותה בשביל r-1:

$$10^{r-1}a_o=(10^{r-2}s_1+\dots+s_{r-1})b+a_{r-1} \qquad (4)$$

ונשתדל להוציא מכאן את נכונות הנוסחה (3). אם יצלח הדבר בידינו, נוכל אזי על-סמך עקרון האינדוקציה להכריז על נכונותה של הנוסחה (3). בכדי להוכיח בעזרת השויון (4) את השויון (3), נכפול את השויון (4) ב 10 ונקבל

$$10^ra_o=(10^{r-1}s_1+\dots+10s_{r-1})b+10a_{r-1}$$

בהשתמשנו בשויון $10a_{r-1}=s_rb+a_r$ הכתוב בשורה ה r+1 של נוסחה (1), נקבל:

$$10^ra_o=(10^{r-1}s_1+\dots+10s_{r-1})b+s_rb+a=(10^{r-1}s_1+\dots+s_r)b+a_r \qquad \text{מ.ש.ל.}$$

וכעת נסה את כחך בהתרת התרגילים הבאים ושלח את הפתרונות ביחד עם הפתרונות לבעיות שבסוף העתון:

תרגיל א: הוכח כי כל שבר מחזורי טהור הקטן מ 1 שוה לשבר פשוט אמתי, אשר בצורתו המצומצמת מכנהו זר ל 10.

תרגיל ב: הראה כי כל שבר מסויים שוה לשבר מחזורי מעורב.

תרגיל ג: הוכח כי כל מספר טבעי הזר ל 10 מחלק אינסוף מספרים של הסדרה 9, 99, 999, וכו'.

תרגיל ד: הכלל את המשפטים ב' ו- ג' למקרה ש $\frac{a}{b}$ גדול מ 1.

תרגיל ה: הוכח כי סכומם ומכפלתם של שני שברים מחזוריים טהורים אפשר להציג בתור שברים מחזוריים טהורים.

תרגיל ו: האם אף מנתם של שני שברים מחזוריים טהורים תשוה תמיד לשבר מחזורי טהור?

י. בר-הלל

בניות הנדסיות בעזרת המחוגה בלבד

מסורת עתיקת ימים היא לצמצם את השמוש במכשירים למען הבנ-
סיות הפשוטות, המופיעות בספרו של אבקלידס (Euclides) והנלמדות בבית-הספר
התיכון, לסרגל ומחוגה בלבד. ברם עוד במאה ה-16 נמצאו מתמטיקאים שנטו
לצמצם עוד יותר את השמוש החפשי במכשירים. ובאמת הצליחו לפתר את כל בעיות-
הבניה המופיעות בספרו של אבקלידס בעזרת סרגל ומחוגה בעלת מיפתח קבוע.
עוד תהיה לנו בודאי ההזדמנות לדון על בניות המבוצעות בעזרת סרגל בלבד.
הפעם נעסק בשאלה ההפוכה: מ ה י ן ב ע י ו ת - ה ב נ י ה ש א פ ש ר
ל ה ת י ר ן ב ע ז ר ת ה מ ח ו ג ה ב ל ב ד ? כדי למנע בעד אי-
הבנות, הריני מדגיש מיד שלמען בנית קו ישר נסתפק במציאת שתי נקודות
הנמצאות עליו והקובעות אותו.

התשובה לשאלתנו ניתנה ע"י אותו מ ס כ ר ו נ י (Mascheroni)
שהיה הראשון שהעמידה בספרו "ההנדסה של המחוגה" (Geometria del compasso)
בשנת 1797, והיא פשוטה ומפתיעה באחת: כ ל ב ע י ת - ב נ י ה
ה נ פ ת ר ת ב א מ צ ע ו ת ס ר ג ל ו מ ח ו ג ה , א פ ש ר
ל ה ת י ר ה ג ם ב ע ז ר ת ה מ ח ו ג ה ב ל ב ד ! במשפט מענין
זה נשפל בכללותו בהזדמנות אחרת, הפעם בעסק רק בכמה בעיות יסודיות הנפתרות
לפי השיטה הזאת, אשר תכבסנה אותנו בסדת-מה לעולם חדש ומענין זה. - -

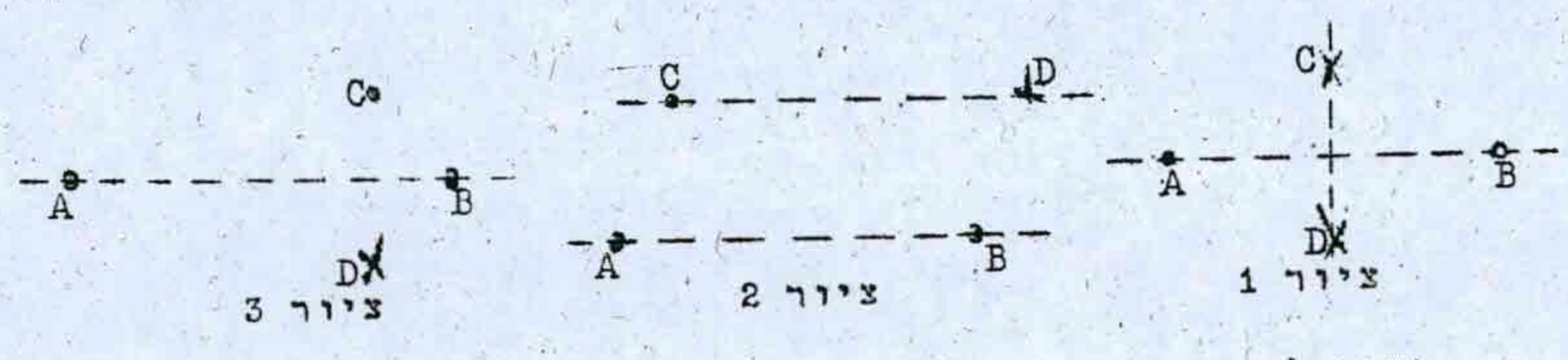
נתחיל בשלוש בעיות-בניה הנפתרות גם כרגיל, ללא הגבלה מפורשת,
באמצעות המחוגה בלבד, והן

(1) בנית האנך האמצעי לקטע נתון (הנתון ע"י שני קצותיו) (ציור 1)

(2) העברת מקביל לישר נתון (ע"י שתי נקודותו) דרך נקודה נתונה
מחוצה לו (ציור 2).

(3) קביעת נקודה הסימטרית לנקודה נתונה לגבי ישר נתון (ציור 3).

הציורים המתאימים יספיקו לביאור הענין. (הקוים הפרוסקים אינם
שייכים, כמובן, לשרטוט עצמו, הם שורטטו רק כדי להקל על הבנתו. נקודות
נתונות מצויינות ע"י מעגל קטן.)



ציור 3 ציור 2 ציור 1

נעבר למעיה רביעית שבפתרונה יהיה כבר משום חדוש, והיא

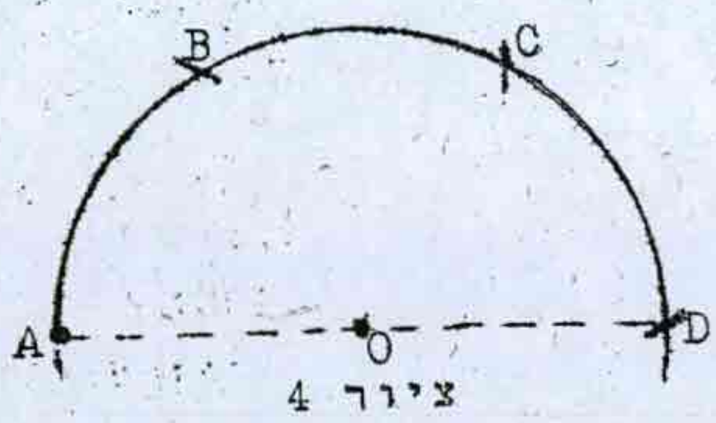
(4) קביעת נקודה הסימטרית לנקודה נתונה לגבי נקודה אחרת נתונה.

יהא נתון אפוא קטע $\overline{AO}$. עלינו לקבוע
נקודה D על AO באופן שיתקיים: $\overline{DO} \cong \overline{AO}$.

לשם כך (ציור 4) נחוג סביב O מעגל
ברדיוס החופף על $\overline{AO}$, (מכאן ואילך נכתב
בקצור: נחוג $(\overline{AO})$ O), ועל מעגל זה נקבע
בזה אחר זה את הנקודות D,C,B, כך שיתקיים:

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{OA}$$

הנקודה D תהא הנקודה המבוקשת.
(הוכח זאת!)



ציור 4

בניה זו מאפשרת לנו לקבוע קטע הגדול פי שנים, או פי שלושה,..., או פי n מקטע נתון. – –

וכיצד נחצה קטע נתון? הנכם חושבים בודאי שזה ענין פשוט מאד. בונים את האנך האמצעי לקטע הנתון ונקודת החתוך שלהם תהיה הנקודה המבוקשת. נכון מאד! אולם שכחתם שגם הקטע וגם האנך האמצעי נקבעים ע"י שתי נקודות – והרי תודו לי שאין זה ענין כה פשוט לקבוע, בעזרת מחוגה בלבד, את נקודת-החתוך של שני ישרים הנתונים לנו בצורה משונה כזאת!

אין לנו אפוא כל ברירה אלא לגשת לבעיה זאת בעקיפין. נתיר מקודם המה בעיות-בניה עוזרות אשר יש להן ענין גם כשהן לעצמן, והן

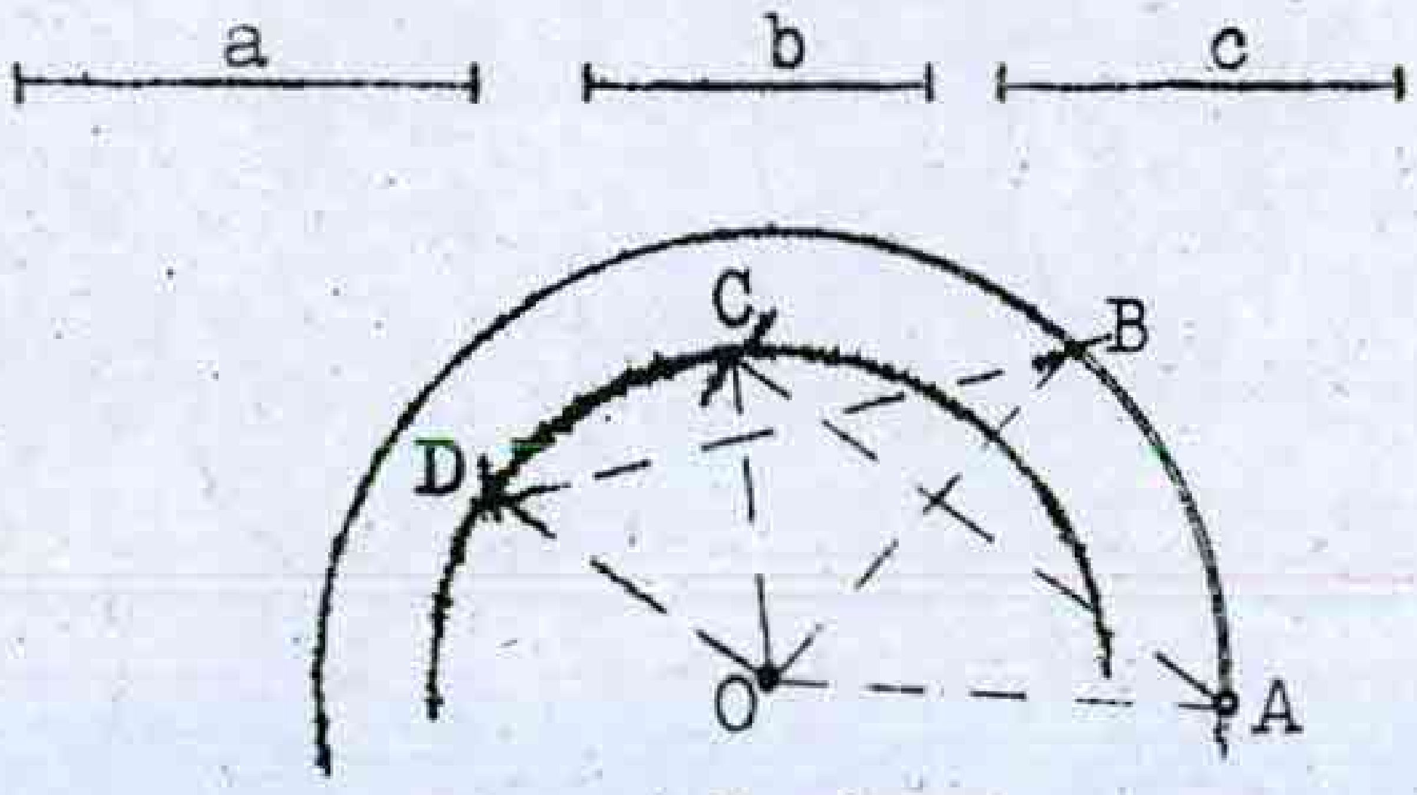
(5) בנית המתכנתי (הפרופורציוני) הרביעי לשלושה קטעים נתונים

(6) חצית קשת נתונה

(7) קביעת נקודת-החתוך של מעגל נתון עם ישר נתון דרך מרכזו.

נתונים אפוא שלושה קטעים a,b,c. עלינו למצוא את המתכנתי הרביעי d כך שיתקיים:

$a:b = c:d$.



ציור 5.

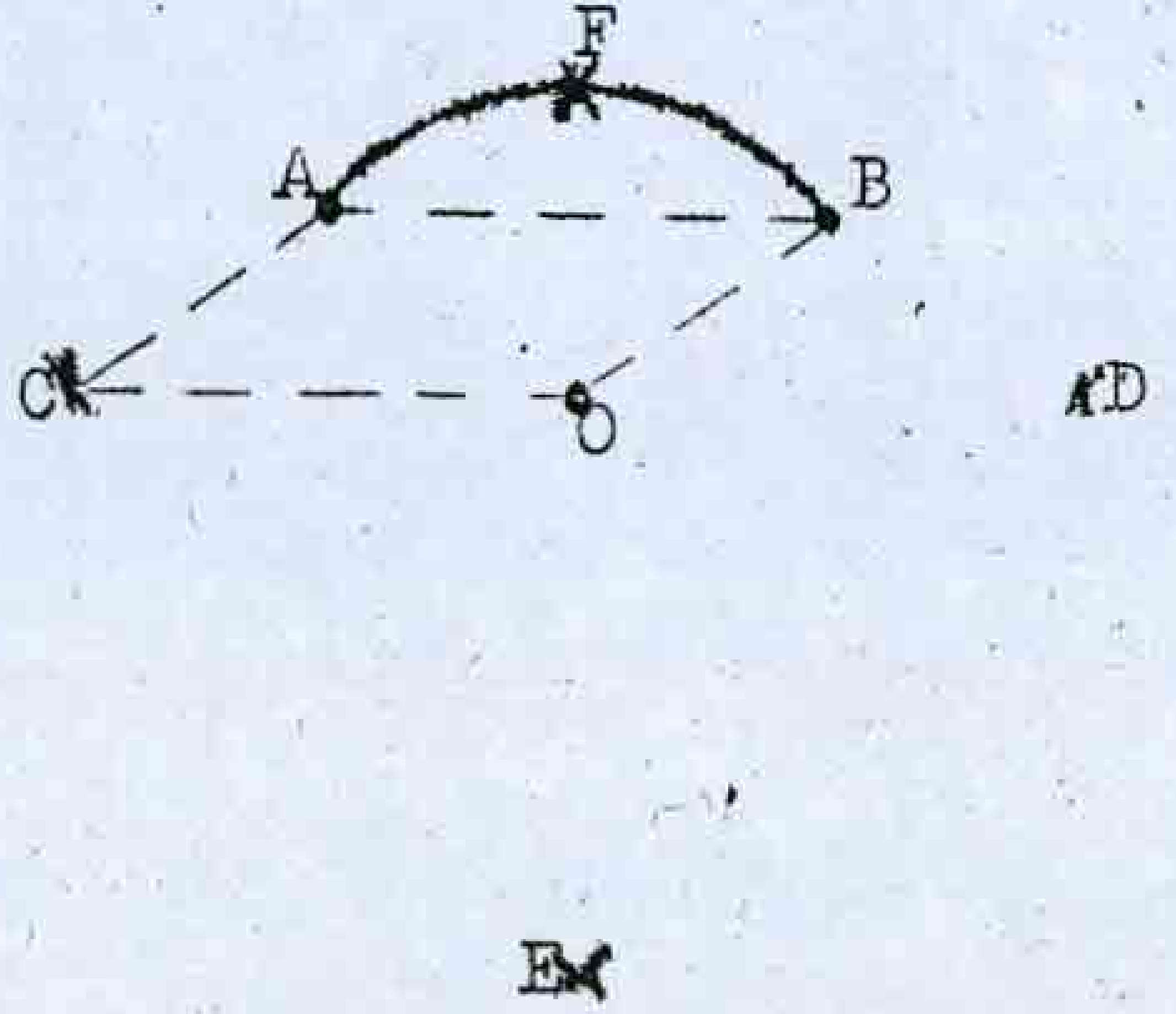
לשם כך (ציור 5) מציינים נקודה כלשהי, O. חגים O(a) ו O(b). על O(a) מציינים נקודה כלשהי, A. חגים A(c). את נקודת-החתוך של O(a) עם A(c) מסמנים ב B. חגים A(r) ו B(r), כאשר r הוא קטע כלשהו. את נקודת-החתוך של A(r) עם O(b) מסמנים ב C, ואת נקודת-החתוך של B(r) עם O(b) ב D. $\overline{CD}$ הוא המתכנתי הרביעי המבוקש.

(הוכח זאת בעזרת דמיון-המשולשים AOC ו BOD! איך תפתר את הבעיה הזאת כאשר יתקיים: $c>2a$?)

כדאי להעיר שבניה זו לא רק שאינה מסובכת יותר מן הבניה המקובלת באמצעות מחוגה וסרגל, כי אם עולה עליה בפשטותה (על כל פנים כאשר קיים: $c<2a$). – –

התרת הבעיה השישית מסובכת יותר, גם מבחינת הבניה וגם מבחינת ההוכחה.

נתונה אפוא קשת $\widehat{AB}$ השייכת למעגל שמרכזו O. עלינו לקבוע את אמצע הקשת. (ציור 6)



ציור 6.

לשם כך מעבירים דרך O מקביל ל AB וקובעים עליו שתי נקודות C ו D כך שיתקיים:

$$\overline{OC} \cong \overline{OD} \cong \overline{AB}$$

חגים $C(\overline{CB})$ ו $D(\overline{DA})$. ($\overline{DA} \cong \overline{CB}$; הוכח זאת!) את נקודות-חתוכם מסמנים ב E. חגים $C(\overline{OE})$ ו $D(\overline{OE})$. את נקודת-חתוכם מסמנים ב F. F נמצאת על $\widehat{AB}$ וחוצה אותה.

הוכחה: לפי המשפט: "סכום רבועי האלכסונים בכל מקבילית שוה לסכום רבועי צלעותיה" קיים:

$$\overline{BC}^2+\overline{AO}^2 = 2\overline{CO}^2+2\overline{BO}^2$$

ומכיוון שקיים $\overline{AO} \cong \overline{BO}$

יוצא $\overline{BC}^2 = 2\overline{CO}^2+\overline{AO}^2$ (א)

אולם $\widehat{COE}= d$ (מדוע?)

ולכן (לפי משפט פיתגורס): $\overline{CE}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OE}^2$

אך, לפי הבניה, קיים: $\overline{BC} \cong \overline{CE}$; וגם: $\overline{OE} \cong \overline{CF}$. לכן:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CF}^2 \quad (ב)$$

עפ"י השוואה של (א) עם (ב) נקבל:

$$\overline{CF}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 \quad (ג)$$

אולם גם $C\hat{O}F$ היא ישרה, ועל כן קיים:

$$\overline{CF}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{FO}^2 \quad (ד)$$

מ (ג) ו (ד) יוצא: $\overline{AO} \cong \overline{FO}$, כלומר: F נמצאת על $O(\overline{OA})$. (גמר בעצמך את החלק האחרון של ההוכחה, בו צריך להראות ש F היא האמצע של $\widehat{AB}$) - -

נמנה לבעית-העזר האחרונה.

נתון אפוא מעגל $O(r)$ ונקודה כלשהי, A, שאינה במצאת עליו. עלינו לקבוע את נקודת-החתוך של OA עם $O(r)$. (ציור 7)

לשם כך חגים סביב A מעגל ברדיוס כלשהו החותך את $O(r)$ ב B וב C. נקודת-האמצע של $\widehat{BC}$ תהיה הנקודה המבוקשת. - -

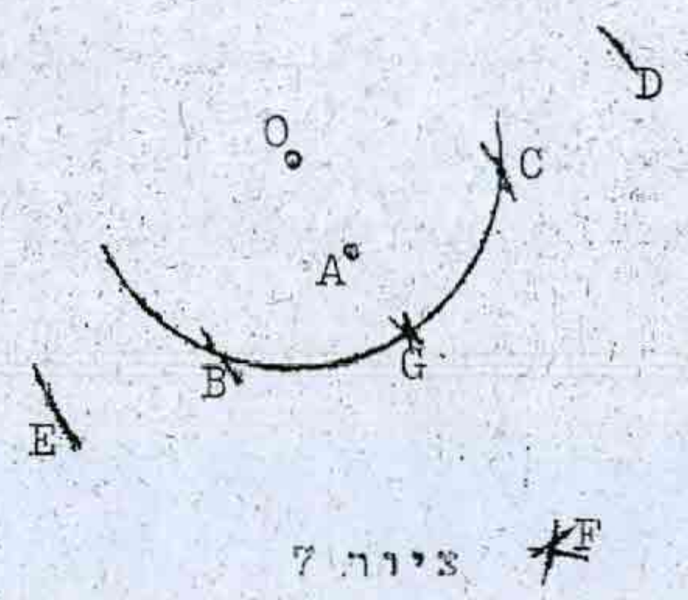
וכעת בוכל סוף-סוף לפתור גם את הבעיה האחרונה שלנו, והיא:

(8) לחצות קטע נתון.

אם הקטע הנתון הוא $\overline{AB}$, אזי קובעים C, הסימטרית ל A לגבי B ובונים קטע k, כך שיתקיים:

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : k$$

לבסוף חגים $A(k)$ וקובעים את נקודת-חתוכו עם $\overline{AB}$. נקודה זו תהיה האמצע של $\overline{AB}$. (הוכח זאת!)



ציור 7

אסיים בהצגת בעיות אחרות, המסודרות בערך לפי מדת-הקושי שבהן:

(1) הכפל זוית נתונה (היא נתונה ע"י קדקדה ושתי נקודות כלשהן על שוקיה!).

(2) חצה זוית נתונה!

(3) נתונה זוית $A\hat{B}C$ וקרן $\overline{EF}$ (כלומר שראשיתה E והמכילה את F). בנה קרן $\overline{EG}$ כך שיתקיים:

$$G\hat{E}F \cong A\hat{B}C$$

(4) הוכח את נכונות הבניה הבאה של המתכנתי הרביעי לשלושה קטעים נתונים p,n,m (בתנאי שקיים: $n<2m$, $p<2m$):

מצייבים נקודה כלשהי, O. חגים $O(m)$. עליו מצייבים נקודה כלשהי, M. חגים $M(n)$ החותך את $O(m)$ ב N. חגים $M(p)$ החותך את $O(m)$ ב P. בונים את הנקודה הסימטרית ל M לגבי PN, ומטמנים אותה ב Q. $\overline{MQ}$ הוא המתכנתי הרביעי המבוקש.

(5) קבע את המרכז של המעגל המכיל שלוש נקודות נתונות!

(6) קבע את נקודת-החתוך של שני ישרים נתונים

(א) המאונכים זה על זה
(ב) שאינם מאונכים זה על זה!

(7) קבע את נקודת-החתוך של מעגל נתון עם קו ישר נתון שאינו עובר דרך מרכזו!

(8) הקף מחומש משוכלל בתוך מעגל נתון!

מ. ימר

נסיונות בפיסיקת האטומים

טרם ידועות לנו תכונות האטום במלואן; אולם תכונה אחת מובטחת לו ללא כל ספק: להעסיק את שכל האדם ולהפעיל את דמיונו. אילו היינו דנים לפי מספר הספרים שיצאו מסכבש הדפוס על הנושא הזה בשנים האחרונות, היה עלינו לייחס לאטום השפעה כה גדולה שכל אחד המתעסק בו במעבדה הפיסיקלית או באמצעות המתמטיקה מרגיש חובה לכתב עליו ספר. ולא רק הפיסיקאי או המתמטיקאי מרבה לכתב עליו - גם חימאים, טכנאים ועתונאים חברו סופרים הפונים אל הקהל הרחב. ואם נוסיף עוד את מבול המאמרים בירחונים המדעיים המוסרים על התוצאות של מחקרים ועיונים בדבר האטום, הרי יובהר לנו כי תופעה זו - יחידה בתולדות המדע - ראויה לתשומת לב מיוחדת גם מצדכם.

אין ברצוני להעשיר ספרות זו במאמר עיוני נוסף על פעולות האטום ומבנהו. כוונתי היא להדריך אתכם בעריכת נסיונות שיקרבו אתכם אל מושג האטום מבחינה מעשית, נסיונות שבצועם איננו כרוך בהוצאות מרובות או במכשירים מסובכים.

קל להבין את התיאוריות המפשטות - קשה לאמתן בנסיון. עשרות שנים עברו מאז התנהל באוניברסיטה של וינה הוויכוח המפורסם הבא בין שנים מגדולי הפיסיקאים. לאחר שבולצמן (Boltzmann) סיים את הרצאתו הארוכה על האטומים והפרודות, קם ממקומו חברו ארנסט מך (Ernst Mach) ואמר: "איננו יודע שישנם אטומים!" בולצמן השיב: "הנני יודע שישנם!" ועונה מך: "איננו יודע!", ובזאת נסתיים הוויכוח. ואמנם נכון הוא כי אין לנו בטחון גמור בקיום האטומים, עד היום טרם ראתה אותם עין-אנוש ואף לא תראה אותם לעולם. אולם ההשערה על קיומם מאפשרת לנו הבנה עמוקה של החומר ושל תכונותיו הידועות מכבר, ומאפשרת לנו לנבא תופעות אשר ראיתן מראש בלעדיה היתה מן-הנמנע. מספר הנסיונות אשר הסברה מספקת אפשר לתת להן רק על יסוד הנחה זו - לא ייטעו מרוצו!

הבה, נערך גם אנו נסיונות כאלו ונשתדל להסבירם. ואם יימצא ביניכם מי שיעלה בידו לבארם מבלי להסתפך על תורת האטומים והפרודות - יואיל נא להעלות את דעותיו על הנייר ולשלוח אותו לנו.

נ ס י ו ן א. בשנת 1827 גלה הבוטנאי רוברט בראון (Robert Brown) תנועה מוזרה. הוא הכניס אבקה של צמחים שונים לתוך מים והחלקיקים הקטנים שיצאו מן הגרעינים התנועעו כלי הרף וללא כל סדר בתוך הנוזל. לראשונה חי בראון כי תנועה בלתי-פוסקת זו נגרמה ע"י חיי התאים האורגניים. אולם בם נוכח כי נסיון זה יצליח גם בצמחים שנשתמרו בעשביה (הרבריום) למעלה ממא שנים. ולא זאת בלבד - בראון לקח פיח מארובות לונדון, נסורת עץ, אבקת זכוכית וגרניט של הטפינכס המצרי המפורסם, ובכל החמרים הללו קבל אותה מסקנה: תנועה בלתי-פוסקת ובלתי-מסודרת של החלקיקים המיקרוסקופיים.

במאמר שכתב בראון שנתיים אחרי זה הוכיח כי סבת התנועה המשונה הזו איננה יכולה להיות אף אחת מן העובדות הבאות: 1) זרימת הנוזל 2) תנועה פנימית בעקבות ההתאדות 3) השפעה הדדית של החלקיקים 4) שווי-משקל בלתי יציב 5) תופעות נימיות 6) התהוות של גזים. רוברט בראון בעצמו לא הצליח להסביר את התופעה - דבר זה עלה בידו של ק. ויינר (K. Wiener), אז רק בשנת 11863

ויינר גלה כי סבת התנועה בטיב הנוזל - במבנה הפרודתי שלו. לפי דעתו נעות הפרודות של הנוזל ללא הרף מפאת אנרגית החום הפנימית שלהן ופוגעות לטירוגין בחלקיקים המרחפים. אם גדולים הם פני החלקיק - הרי יפגע בהם בבת אחת מספר גדול של פרודות, וקרוב לודאי כי פגיעות אלו הבאות מצדדים שונים תבטלנה זו את זו. אולם, כאשר החלקיק בעצמו קטן הוא מיקרוסקופי -, קטן גם מספר הדחיפות שהוא נדחף מאותו הרגע וגדולה אז האומדנה שהדחיפות מצד אחד תהיינה חזקות יותר מאשר מן הצד הנגדי. במקרה זה יווצר כוח שיניע את החלקיק. הסברה זו שנתן ויינר מסתמכת אפוא על השע הפרודות.

אלברט איינשטין ו-פון סמולוחובסקי (von Smoluchowski) לא הסתפקו בהסברה איכותית זו, אלא ערכו חשבונות רבים בקשר עם התופעה הזאת, חישבו את מהירותו של החלקיק הנע וכדומה והגיעו לידי מסקנות שנתאמתו אחר כך ג עיי נסיונות.

והנה נסיון שתוכלו גם אתם לערכו בנקל: המיסו מסטיכס או גומיגוט – כמחצית הגרם – ב 10 סמ"ק כהל מרוכז ואחר מהלו את התמיסה במים רבים עד אשר תפרשנה שוב כדוריות קטנות של גומי מתוך התמיסה. (קוטר הכדוריות 10^{-5} סמ'ן) במקום להשתמש במסטיכס אפשר גם להמיס רוטיל במים בלבד. את התרחיף המתקבל שמים על זכוכית מתחת למיקרוסקופ ומאירים היטב מן הצד. על נקלה תוכלו להווכח בתנועת בראון .של הגופיפים המיקרוסקופיים בתרחיף.

נ ס י ו ן ב. ללא ספק שאלתם את עצמכם מדוע הצבעים הנהדרים בשמי הערב בשעת שקיעת השמש ומדוע בכלל לשמים צבע התכלת שלו, אשר המשוררים כה מרבים לדבר עליו. תשובה לכך תקבלו מן הנסיון השני, בו תראו שקיעת שמש מלאכותית עם כל שלל הצבעים המתחלפים – בחדר ועל בד לבן!

כדי להבין כראוי את הנסיון הזה עליכם להזכר בכמה מסקנות כלליות מתורת האור. תופעות ההיאבכות (אינטרפרנציה) מראות כי קרן אור אינה אלא גל המתפשט במהירות בחלל; קרן אור אדומה היא גל ארוך (אורך הגל, כלומר המרחק בין שני קמרים, הוא 8000 אנגסטרם; אנגסטרם הוא 10^{-8} סמ') וקרן כחולה היא גל קצר יותר (4500 אנגסטרם). והנה עריכת הנסיון:

העמידו תא שקוף (כוס או כלי אחר) לפני האוביקטיב של פנט-קסט או מנורה סתם ושפכו לתוכו תמיסה של חומצה מלחית (5 טפות חומצה מרוכזת על 20 סמ"ק מים). הכניסו לתוך התמיסה גבישים אחדים של מלח-הצלום, $Na_2S_2O_3$, שתוכלו להשיגו אצל כל צלם, ובחשו היטב. לאט לאט יתאטם הנוזל ויפזר אור כחול לכל הצדדים, בו בזמן שהאור החודר דרך התא נהפך לאדמדם כאור השמש השוקעת. במו עיניכם תוכלו לראות את חלוף הצבעים מן הצהוב העדין לאדום הרווי.

מה קרה בתמיסה? הודות לתהליכים חימיים נפרשו פרודות של גפרית מן התמיסה בקבוצות ויצרו חלקיקים קטנטנים. פרודות אלו מפריעות להתפשטותן של הקרנים הכחולות שבתוך האור הלבן בה בשעה שהגלים הארוכים של הקרנים האדומות ממשיכים את דרכם ללא כל הפרעה. למה הדבר דומה? לגלי האוקינוס המכים על דפנות האניה: גל קצר מוחזר מחם כאילו מקיר מוצק, וגל ארוך מרים את האניה ואינו מושפע על ידה. כך מתפזרים גלי האור הקצרים לכל הכוונים (פזור של אור כחול), והקרנים האדומות ממשיכות את דרכן.

נסיון זה מראה לנו גם את הדרך לתשובה על השאלה בדבר צבע השמים. הקרנים הכחולות שבאור הלבן של השמש מתפזרות בגלל החלקיקים של האטמוספירה (פרודות האויר, אבק וכו'), והקרנים האדומות מגיעות אלינו בלתי-מפוזרות.

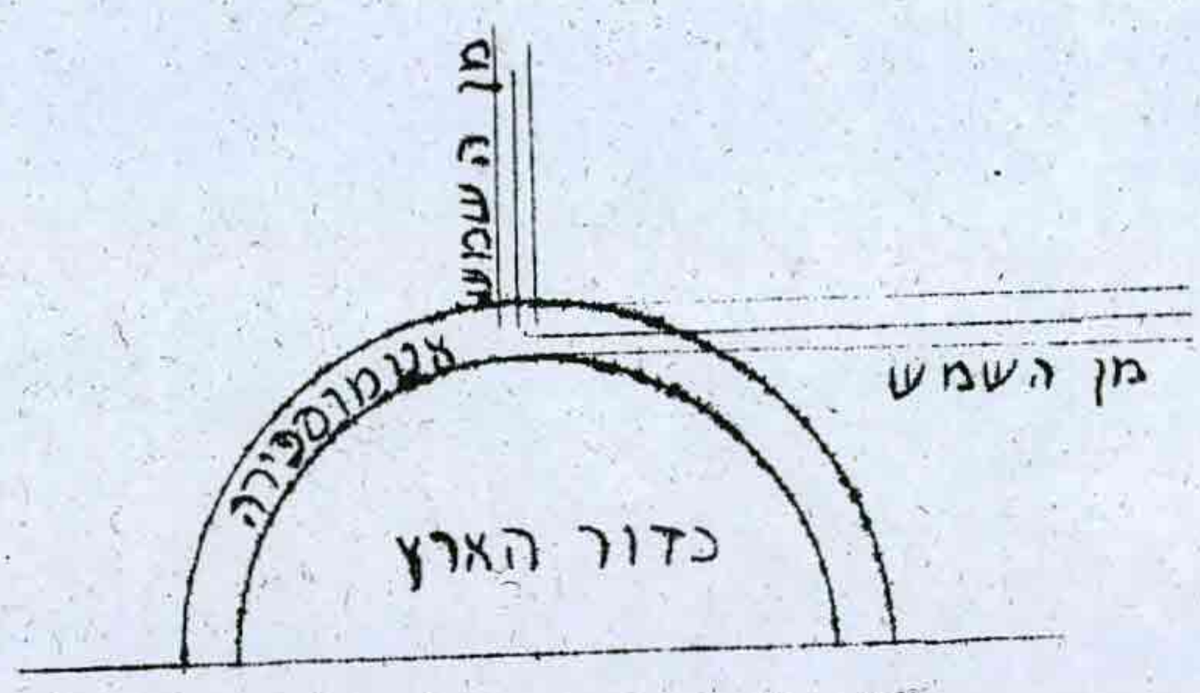
וכעת נסו נא לענות על השאלות הבאות:

(1) מהי השפעת הטמפרטורה על תנועת-בראון? תאר את הנסיון שערכת לשם כך!

(2) כיצד אפשר להוכיח כי כוחות חשמליים או מגנטיים אינם משפיעים על תנועת בראון?

(3) מדוע שונה צבע העשן העולה מסיגריה מצבע העשן הנפלט מפי המעשן?

(4) הסבר את צבעי השמש בשעת עליתה או שקיעתה! (היעזר עזי הציור!)



בעיות

הפתרונות לבעיות - גם לאלה שהוצגו בתוך המאמרים - צריכים להגיע למערכת לא יאוחר מן ה 5 באפריל. פתרונות שיגיעו אחרי תאריך זה לא יובאו בחשבון לפרסום בחוברת הבאה.
בתשובות תצינו את המספר הסדורי של הבעיה ותחזרו על הנוסח המלא שלה. עליכם לכתב בכתב ברור ולשרטט את הציורים הדרושים בדיקנות ולהשתמש בצד אחד של הניר בלבד. הבעיות המסומנות ע"י * נחשבות לקלות יותר, ולתלמידי הכתות ה'-ו' תנתן זכות-בכורה בפרסום פתרונותיהם.

בטוף שנת הלמודים יחולקו פרסים לאלה המצטיינים בהתרת בעיות.

*1. ללא ספק למדת את סימני ההתחלקות ב 2, 3, 5, 11 ובמספרים המורכבים מהם, כגון 4, 6, 8, 10 וכדומה. אך יש גם כללי-התחלקות במספרים ראשוניים גדולים יותר, אמנם לא כל כך נוחים ומידיים. תלמיד זריז יפיק תועלת משני הכללים הבאים:

א./ מספר מתחלק ב 7, אם ההבדל בין ספרת היחידות הכפולה ובין שארית המספר מתחלק ב 7. (למשל: 1561 מתחלק ב 7 כי 156-2.1, כלומר 154 יתחלק בו, מה שיודעים בעל פה, או מה שבודקים לפי אותו הכלל: 15-2.4=7).

ב./ מספר מתחלק ב 13, אם הסכום של ספרת היחידות כפולת 4 עם שארית המספר מתחלק ב 13.

לשם הוכחת הכללים הללו, תאר את המספרים בצורת $10y+x$, כאשר y הוא המספר "המקוטע".

*2. המספרים המביעים את הממדים של תיבה הם ראשוניים ולא-זוגיים; נפח התיבה, ביחידות מעוקבות מתאימות, מובע ע"י מספר בן שלש ספרות; פני התיבה (סכום שטחי כל שש הפיאות), ביחידות מרובעות מתאימות, מובעים ע"י מספר בן ארבע ספרות. מצא את הממדים והראה כי הפתרון הוא יחיד.

3. בשם "שלישיה פיתגורית" מכנים 3 מספרים טבעיים a,b,c כאשר $a^2+b^2=c^2$. השלישיה היא "ראשונית", אם ל a,b,c אין גורמים משותפים. "משולש פיתגוריי" הוא משלש ישר-זוית שכל צלעותיו נמדדות ע"י מספרים טבעיים. אפשר להוכיח כי כל השלישיות הפיתגוריות מתקבלות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$a = m^2-n^2 \ , \quad b = 2mn \ , \quad c = m^2+n^2$$

כאשר m, n הם מספרים טבעיים. (את ההוכחה הזאת ועוד חומר רב אחר תמצא בספרו של ליצמן: "משפט פיתגורס").

כאשר הרדיוס של מעגל הוא מספר ראשוני לא-זוגי כלשהו p, יש בדיוק שני משלשים פיתגוריים ראשוניים המקיפים אותו. הוכח כי לגבי כל זוג-משלשים כזה קיימות התכונות הבאות:

א. נצביהם הקצרים נבדלים ב 1.
ב. היתר במשלש האחד גדול ב 1 מן הנצב הגדול, והיתר בחברו גדול ב 2 מן הנצב הגדול.
ג. סכום היקפיהם שוה למספר רבועי כפול 6.

המתקדמים ביניכם יוכיחו גם את שתי התכונות הבאות:

ד. כאשר p הולך וגדל, מתקרב היחס של זויותיהם הקטנות ביותר אל 2.
ה. כאשר p הולך וגדל, מתקרב היחס של שטחיהם אל 2.

*4. לגרף של הפונקציה $y = \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{16-x^2}$ ישנה צורה מעניינת. מהי?

5. שרטט את הגרפים של הפונקציות $x^3+y^3-15xy=0$, $y=\cos x+\cos 3x$ ופתח את תכונותיהן.

6. חלץ את t מהשויונות הבאים $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, שרטט את הגרף של הפונקציה המתקבלת ופתח את תכונותיה.

*7. שתי דוברות יוצאות באותו הזמן זו לקראת זו משתי הגדות של נהר. הן נוסעות במהירות קבועה ובהגיען אל הגדה השניה, חוזרות ללא הפסד זמן. הן נפגשות בפעם הראשונה 70 מטר מן הגדה האחת ובפעם השניה במרחק של 40 מטר מן הגדה הנגדית. מצא את רוחב הנהר.

8. מצא בעזרת המשפט $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ את סכום הרבועים של n המספרים הראשונים הטבעיים:

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

*9. זהה את הערכים המספריים של האותיות המופיעות בתרגיל החלוק, כאשר לאותיות שוות מותאמים מספרים שונים ולאותיות שונות מספרים שונים והראה כי התאמה זו היא יחידה.

```
cddefg : ab =hifj
cch
  ee
  ab
  hdf
  dec
   hag
   hhj
     c
```

*10. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות (במישור) אשר הבדל רבועי מרחקיהן משתי נקודות נתונות שוה לגודל נתון.

*11. נתונות שלוש נקודות A, B, C, שאינן נמצאות על קו ישר אחד, ונתון ישר a דרך A. בנה מעגל שיעבור דרך A ו B ויחתך את a בנקודה E, באופן ש CE ישיק למעגל הזה.

12. הוכח: אם שני חוצים (ביסקטריסות) במשולש חופפים, המשלש הוא שוה-שוקים.

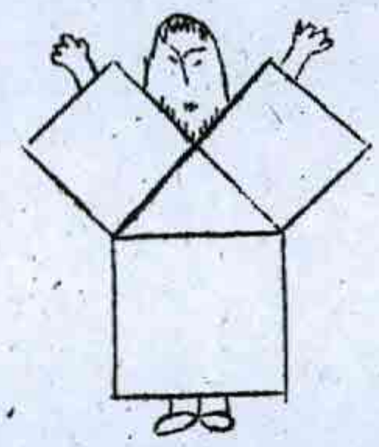
13. נתונים שני מעגלים שמרכזיהם O ו 'O בחצי-מישור אחד לגבי ישר נתון a. קבע על a נקודה P כך שהזוית בין המשיקים למעגלים דרכה ובין a תחפנה. כמה פתרונות?

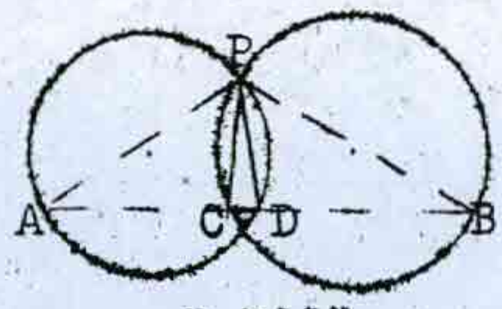
14. בנה משלש כך שקדקדיו יימצאו בהתאמה על הצלעות של משולש נתון ושצלעותיו תקבלנה בהתאמה לשלושה ישרים לא-מקבילים נתונים.

*15. הקף במעגל נתון משולש ישר-זוית באופן שנצביו יעברו דרך שתי נקודות נתונות.

שיחת חולין מתמטית

16. בקר אחד נכנס ראובן "הממציא" לכתה והמצאה חדשה באמתחתו: "מצאתי משולש אשר סכום הזויות בו גדול מ 180°". הכריז, ומיד שרטט על הלוח לפני הכתה המתוחה את השרטוט הבא (ציור א'), ובקול רם ובטוח המשיך: "הזוית $A\hat{D}P$ היא ישרה, לפי משפט-תלס, גם $B\hat{C}P$ היא ישרה, ואם נוסיף על סכומן את $C\hat{P}D$, נקבל שסכום הזויות במשולש CPD גדול מ 180°". סיים ויסב על מקומו. והכתה נבוכה. המורה חייך - והפקיד על הכתה לגלות לשעור הבא את השגיאה שב"הוכחתו" של ראובן. מה דעתכם?





ציור א.

*17. סדר 12 גפרורים בעלי אורך שוה בהתאם לציור ב', ושנה את מצבם של שלושה מהם כך שתווצרנה שש מקביליות חופפות.

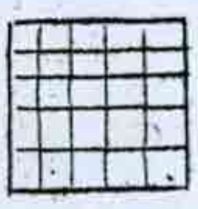

ציור ב.

18. שקילה בשעת חרום. מצא את המספר הקטן ביותר של אבני-משקל אשר בעזרתן תוכל לשקל כל משקל בין 1 קג' ו 40 קג' (במספרים שלמים). מותר לשים את המשקלות על שתי כפות המאזנים

*19. הנסית פעם לחבר פיסיקאים ומתמטיקאים? אם לאו, עשה זאת עתה! זהה את הערכים המספריים של האותיות (ראה בעיה 9), והראה שלחבור משונה זה 2 פתרונות הנבדלים זה מזה רק עי"י החלפת הערכים של O ושל I.

NEWTON
+KLEIN
KEPLER

*20. סדר את הספרות מ 1 עד 9 לתוך הרבוע שמימין כך שיתקבל אותו סכום בכל שורה ובכל עמודה. עליך להשתמש בכל ספרה לפחות פעם אחת.



כתובת המערכת:
דפים למתמטיקה ולפיסיקה
מעונות-עובדים ב', 10.
י ר ו ש ל י ם