דפים להתמטיקה ולפיסיקה

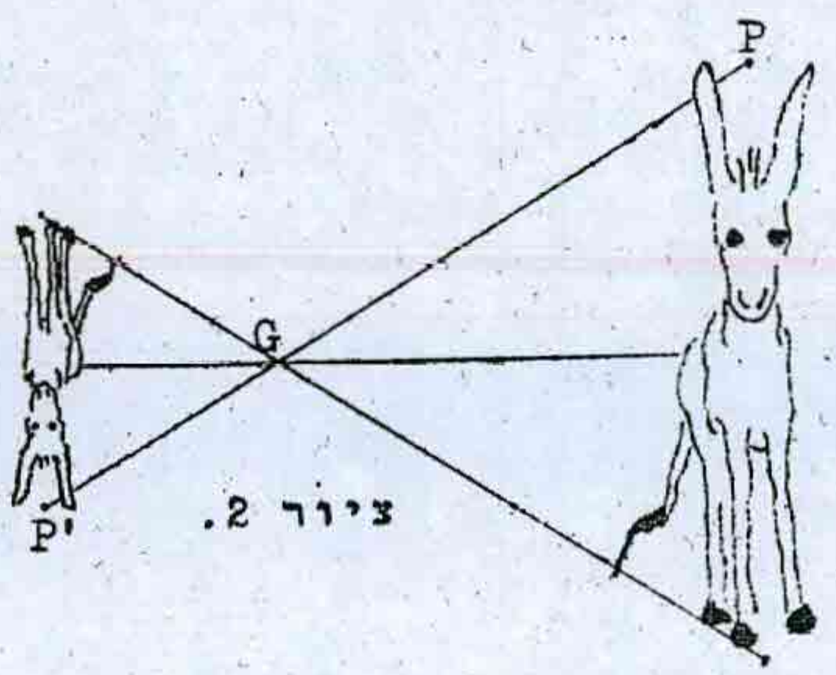
לנוער המתלמד

מאי 1942 | חוברת ב' | אייר תשיב

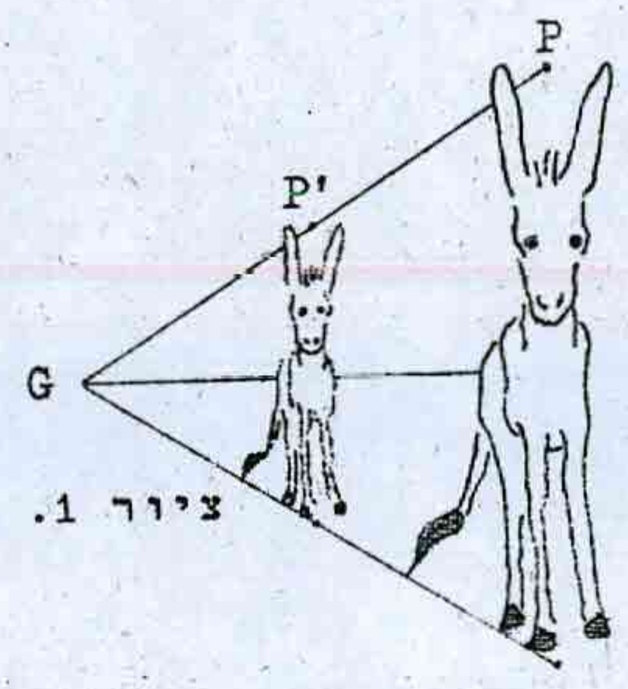
ד"ר ת. מוצקין

קו־אוילר ומעגל־תשע־הנקודות

משני החמורים שבציור 1 מתקבל הקטן מן הגדול ע"י כך שמקשרים כל נקודה P של החמור הגדול עם ה מ ר כ ז G ובוחרים את התמונה 'P על הישר GP, אך במחצית הרוחק מ G. בקצור נאמר: כפלנו את החמור הגדול ב 1/2 לגבי המרכז G.



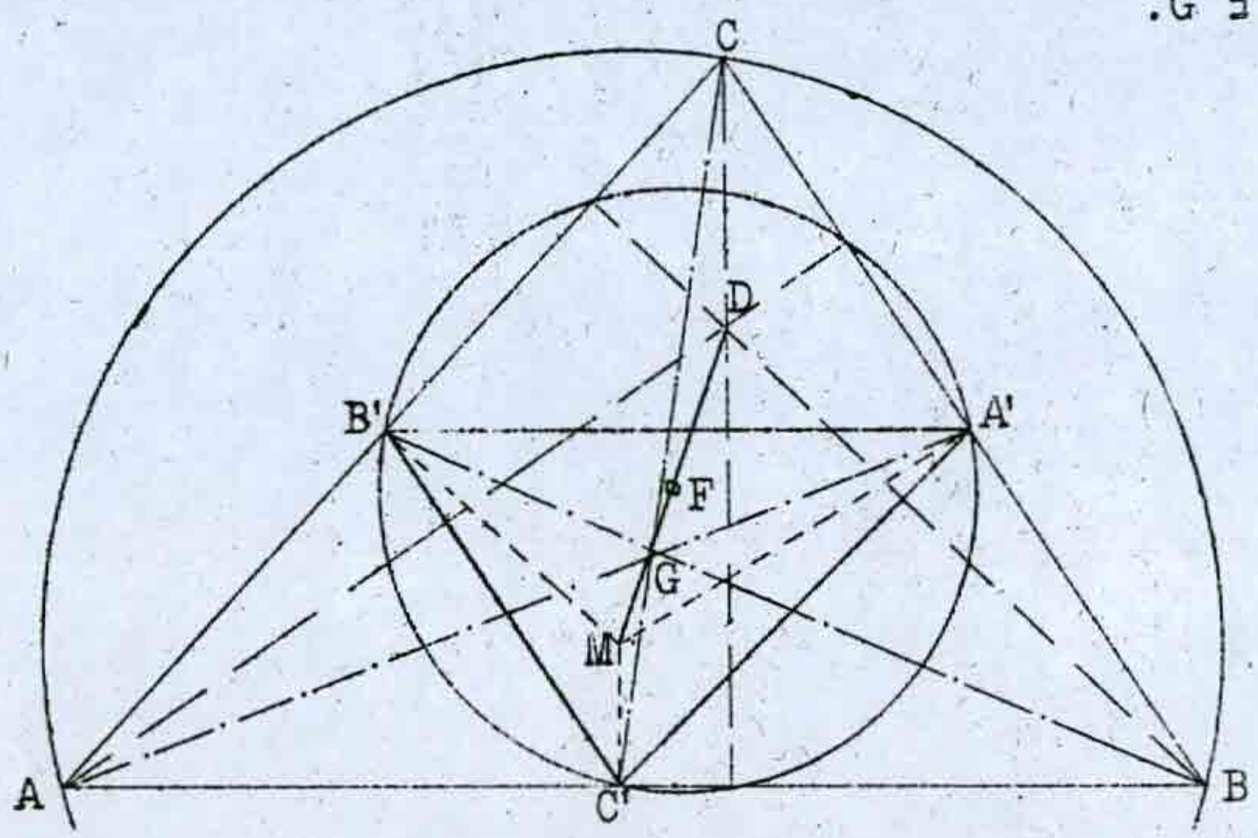
ציור 2.



ציור 1.

בציור 2 מתקבל 'P מ P באותו אופן, אולם 'P נמצאת הפעם מצדו השני של G; זהו כפול ב 1/2-.

בציור 3 מצויר משולש ABC ושלשת הקוים התיכונים (המדיאנות) שלו; כידוע עוברים קוים אלה דרך נקודה אחת, ששמה "מרכז-הכובד"; היא מסומנת ב G.



ציור 3.

כמו-כן מצוירים שלשת האנכים האמצעיים של צלעות המשולש; גם אלו עוברים דרך נקודה אחת, המרכז של המעגל המקיף את המשולש; היא מסומנת ב M.

נכפל את הנקודות ואת הישרים הנזכרים ב 2/1- לגבי G. עפ"י כך תעבור A לאמצע של $\overline{BC}$, A' (מדוע?), וכן B ל B', ו C ל C'. כל המשולש ABC עובר ל"משולש האמצעים" A'B'C'.

מכיון שגבהי ABC עוברים בכפול לגבהי A'B'C' (היכן הם בציור?), עוברת הצומת D (נקודת-החתוך של הגבהים) של ABC לצומת של A'B'C', היא M. לכן נמצאת M על הישר GD(*), וקיים $GM=\frac{1}{2}\overline{GD}$.

את העובדה המעניינת הזאת גילה, כנראה, בראשונה ל. אוילר [L. Euler], שחי במאה ה-18 והיה אחד מגדולי המתמטיקה שבכל הדורות. הוא נולד בשויץ, עבר משם לגרמניה ובסוף לרוסיה. לאקדמיה המלכותית למדעים בסנקט-פטרסבורג (כיום לנינגרד) הבטיח לכתוב מאמרים מתמטיים אשר בהדפסתם תוכל לעסוק עד 20 שנה אחרי מותו; ואף על פי שנתעוור סמוך לבואו לרוסיה, קיים את הבטחתו, אם גם בשנדי קל: החומר שבעזבונו הספיק ל-40 שנה. לפני עשרות שנים התחילה ועדה המורכבת מבאי-כח של אקדמיות שונות להוציא את כתביו בהוצאה שלמה ומסודרת, ומפעל זה שרם נסתיים. אולם לא רק במספר העמודים עלה אוילר על כל מתמטיקאי לפניו ואחריו עד היום הזה, הוא אף הספיק לגלות תגליות חשובות ומעניינות בתחומים שונים במספר רב כזה שהתברר כי נוח יותר לקרא חלק של המשפטים שגלה על שם מתימטיקאים אחרים, או לכחות לצרף את שמותיהם לשמו, כי אחרת היו לנו יותר מדי "משפטי אוילר" במתמטיקה.

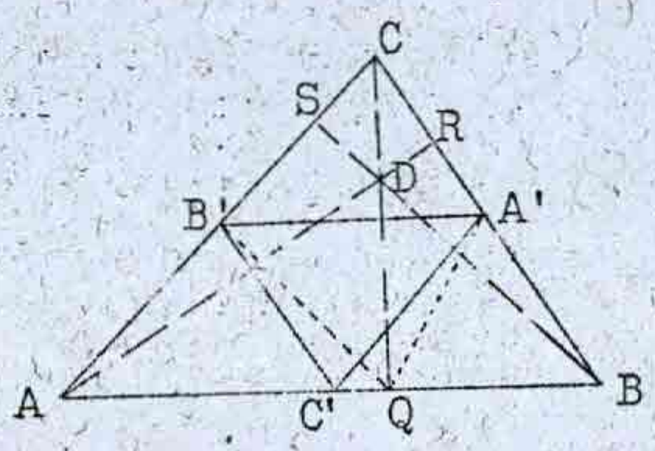
"קו-אוילר" - כך נקרא הישר DM, אינו כמובן אלא אחד הדברים הפשוטים ביותר שגלה אוילר.

בהמשך חקירותיו בתורת המשולש גלה גם מעגל מענין. עשרות שנים אחריו גלה אותו מחדש המתמטיקאי פויירבך [Feuerbach], ולפי זה נקרא המעגל הזה זמן רב בשם "מעגל-פוירבך", לפעמים כנוהו גם בשם "מעגל-אוילר-פוירבך", אך כיום שמו בדרך-כלל "מעגל-תשע-הנקודות". מעגל זה הוא המעגל המקיף את משולש-האמצעים A'B'C'. הוא מתקבל איפוא מן המעגל המקיף את המשולש היסודי ABC עפ"י הכפול ב 2/1- לגבי G; בכפול זה עובר "המרכז המקיף", M, למרכז של מעגל-תשע-הנקודות, F. לכן נמצאת גם M' על קו-אוילר ו $\overline{GF} = \frac{1}{2}\overline{GM}$. (הוכח כי F היא האמצע של $\overline{DM}$!)

ובכך מצאנו:

משפט א. המרכז המקיף, מרכז הכבד, מרכז מעגל-תשע-הנקודות והצומת של כל משולש נמצאים על ישר אחד.

כדי להצדיק את השם "מעגל-תשע-הנקודות" נראה ראשית שהוא עובר דרך העקבים S,R,Q של הגבהים מ A, B ו C (ציור 4). מכיון שהמשולשים B'C'A' ו B'A'Q חופפים על B'A'C (הוכח זאת!), הריהם חופפים זה על זה ו $A'\hat{Q}B' \cong A'\hat{C}'B'$; היות ו Q ו C' נמצאות מאותו הצד של B'A', הכן אפוא על אותו המעגל דרך B' ו A'. הראינו אפוא שהמעגל העובר דרך האמצעים A', B', C' עובר גם דרך העקבים S,R,Q.



ציור 4.

ב D סמנו את הצומת של ABC; הוכח שאז A היא הצומת של BCD, B של ACD, C של ABD. בגלל הכינוי זו נקראת קבוצת ארבע הנקודות ABCD רביעית-אמתים. לארבעת המשולשים ישנם אותם העקבים S,R,Q, ובפסקה הקודמת הראינו שהמעגל דרך העקבים עובר גם דרך אמצעי הצלעות. על כן נוספות אל הנקודות A', B', C', Q, R, S על מעגלנו גם נקודות האמצע של $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$, וכך קבלנו:

משפט ב. 3 העקבים, 3 אמצעי הצלעות ו 3 האמצעים של הקטעים המקשרים את הצומת עם הקדקדים נמצאים על מעגל אחד.

מתוך המספר הרב של הבעיות המעניינות שאפשר להציגן בקשר עם קו-אוילר ומעגל-תשע-הנקודות בחרנו את הבאות:

הוכח (1) כי $\overline{FQ'} \cong \overline{FQ}$ (במקום הדרך שתוארה במאמר) על סמך $\overline{FM} \cong \overline{FD}$, עפ"י הסתכלות בטרפז QDMC'.

(2) כי מעגל-תשע-הנקודות מתקבל גם עפ"י כפול ב 2/1 של המעגל המקיף לגבי D. לאן עוברות C,B,A בכפול זה?

(*) על "הישר" (בה"א הידיעה) GD מותר לדבר רק בסקרה ש G ו D הן נקודות שונות; מצא באיזה משולש הן מתלכדות.

(3) כי מעגל-תשע-הנקודות מתקבל גם עייי כפול ב2/1 של המעגל המקיף את ABD לגבי C. הסק מכאן משפט על המעגלים המקיפים את 4 המשולשים הניתנים עייי רביעית-צמתים והוכח את המשפט ההפוך לו.

(4) כי אם F_1, F_2, F_3 הם המרכזים של מעגלי-תשע-הנקודות של המשולשים AB'C', BC'A', CA'B', אזי מתקבל המשולש $F_1F_2F_3$ עייי כפול של המשולש ABC ב2/1 לגבי F.

(5) כי M,G,F,D מהוות רביעיה הרמונית.

(6) כי קו-אוילר עובר דרך אחד הקדקדים אם המשולש הוא שוה-שוקים או ישר-זוית ורק אז.

ב נ ה (7) משולש, אם נתונות 3 נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד, כך שהאחת תהיה המרכז המקיף, השניה מרכז-מעגל-תשע-הנקודות, והשלישית האמצע של אחת הצלעות.

(8) משולש לפי הצלע a, הרדיוס של המעגל המקיף, R, כן ששתי נקודות נתונות תהיינה המרכז המקיף והצומת שלו.

צ י י ר (9) את הציורים 3 ו 4 במקרה שהמשולש היסודי הוא קהה-זוית.

(10) את המעגלים המוקפים ב ABC, ABD, ACD, BCD והוכח כי מעגל-תשע-הנקודות משיק להם. הוכח כמו-כן כי מעגל-תשע-הנקודות משיק גם ל-12 המעגלים המוקפים במשולשים הללו מבחוץ.

ד"ר א.ברא-אלי

כבוש המהירות וגבולותיה הטבעיים

כל המדפדף בעתונים נתקל מדי פעם בהודעות על שיאי מהירות שונים. לפעמים מוצא אתה גם באורים ו נ כ ו א ו ת - שלא תמיד מתאימים למציאות. כן קראתי שעם מאמר המוקדש לנושא הנייל ובו המליץ: "עד כמה שהדבר נוגע ל מ ל ו נ ה , אין לצפות לגבול כלשהו בכבוש המהירות". משמע המליץ הללו הוא: לפנינו מכונה, היכולה לרוץ (לשוט, לעוף) במהירות מסויימת; אם בשכללה במובן כמותי או איכותי (כלומר נגדיל את הכוח המניע, נשפר את צורתה החיצונית, נשתמש בחומר קל יותר, וכו'), נגיע למהירות גבוהה יותר, והיות ואין גבול לשכלולים הללו, לכן אין גם גבול להגדלת מהירות המכשיר...

ואולם במקרים ידועים מותר לשאול, האמנם אינו קיים גבול היכולת בשביל שימוש מכונה מסוים; ולפעמים אפשר לענות על שאלה זו על יסוד חוקי טבע בלבד.

ד ו ג מ ה : מכונה תרמית הנוסכת לעבודה מיכנית את החום, המופק מחומרי הסקה. והנה מובן מאליו, כי העבודה הזאת לא תוכל לעלות על שויו המיכני של החום המושקע במכונה. כ ל ש כ ל ו ל ש ל מ כ ו נ ה ת ר מ י ת י כ ו ל א י פ ו א ל ה ש ו ו ת ר ק א ת ה א ב ד ו ת מ מ י כ נ י ו ת , הנגרמות עייי חכוך, זעזועים, וכדו'.

הגבלה אחרת, עוד יותר צרה, נובעת מן החוק הידוע בשם החוק השני של תורת-החום, אשר בתקפו תלויה פעולת מכונה תרמית בטמפרטורה של האויר המקיף אותה. ושום מהנדס לא יוכל להמלט מן ההגבלה הזאת עייי שנויים קרנטשרוקשיביים של מכונתו.

הגבלות מעין אלו קיימות כמובן גם לגבי מכשירי תנועה לסיניהם. בטורים הבאים נעמוד בקצרה על המכשולים העקריים העומדים על דרך המהנדס רודף המהירות. עליו להלחם בעד או כנגד גורמים שונים, כגון: כוח, חומר, כסף, אדם, ארץ, אויר, ועוד, השלובים זה בזה שתות או יותר.

ה כ ו ח . בעית הכוח גורמת לקשיים הן כמותיים והן איכותיים. מכונת כוח, שהושמאה בתנאים מסויימים, לא תמיד תתאים לתנאים אחרים, הגדילתה לשם הגברת פעולתה נתקלת גם היא במכשולים שונים, אשר אחד מהם מהוה ביחוד אבן-נגף לא תסולק: אם נגדיל את המדות הקויות של המכונה ביחס מסויים (n), יגדל נפחה - ולכן גם משקלה - ביחס n^3, ואולם כוחה יגבר רק ביחס n^2. (נסו-נא להסביר לכם עובדה זו)

ה ח ו מ ר . השמוש בחומרים קלים יכול להועיל רק במדה מוגבלת: בדרך כלל מסמיינים הם בחוזק קטן או בינוני, והלא דוקא תכונת החוזק הנה חשובה ביותר בשביל המכונות המהירות: רעידות, זעזועים והכוח הצנטריפוגלי

המסוכנים לכל חומר ולכל מכונה, מגיעים כאן לשעורים פנטסטיים ממש! ההתפתחות הנפלאה של המטלורגיה בשנים האחרונות אינה נותנת מקום לאופטי-מיות יתרה, ויש יסוד חזק לחשוש שאין סכויים רבים להישגים נוספים בכוון זה.

ה כ ס ף . בנין מכשירים, המיועדים למטרות מדעיות או ספורטיביות מיוחדות (ללא סכויים לתעשיה רחבה) דורש בדרך כלל השקעת סכומים עצומים עד כדי להעמיד בסימן שאלה את עצם אפשרות הגשמתו. למשל: לפי חשבון משוער צריך לעלות בנין רקיטה (זיקוקית) גדולה, המתאימה להעברת בני-אדם, במליונים - ואולי גם במליארדים - דולרים. האמנם סותר אי"כ לחשוב את הגורם הכספי ל"לא-פרינציפיוניי"?

ה א ד ם . כיצד משפיעה מהירות הנסיעה על האדם? כפי הנראה איננה מזיקה באפן בלתי-אמצעי כל זמן שהנוסע מוגן כפני הטמפרטורה הנמוכה, לחץ האויר, חוסר החמצן, וכדו', ואת הזקנה ללא-עת המצויה אצל הנהגים והטיסים יש כנראה ליחס לזעזועי העצבים התכופים, הכרוכים במקצועות הללו. הדברים אמורים על הנסיעה ב מ ס י ל ה י ש ר ה : כי בשעת כל סבוב נתון הנוסע בידי כוח צנטריפוגלי, העלול לגרום לדחיפה חזקה או גם להצטרפות הדם בצדו האחד של הגוף; הלב אינו מצליח אז להחזיר את הדם למסלולו ובתולדות התעופה נרשמו כבר מקרי התעלפות ומות, אשר נגרמו ע"י ס ב ו ב האוירון. גם הצורה הכדורית של הארץ ותנועתה הסבובית מכבידות במדת-מה על נהיגת מכוניות מהירות, אך הסכנה הכרוכה בכך מוגזמת מאד במאמרים פופולריים, ולא קשה להתגבר עליה.

נראה עכשיו, כיצד משפיעים הגורמים הנ"ל על מכשירים המיועדים לתנועה על היבשה, במים ובאויר.

המכשיר הפרימיטיבי ביותר, המיועד לתנועה על פני היבשה, נתון ע"י גוף, ה נ ס ח ב על פני הקרקע. במקרה זה נובעת ההתנגדות לתנועה מ"חכוך ההסעה". באמצעות הגלגלים אפשר להפכו ל"חכוך הגלגולי", הגורם להתנגדות קטנה יותר, ביחוד על מסילה ישרה וחלקה (כגון כביש, פסים, וכדו'). ע"י כך עולה מהירות המכשיר ב ל י ה ג ב ר ת ה כ ו ח ה מ נ י ע , ואולם הודות למהירות המגברת מתפתחת התנגדות האויר, הגדלה עם ר ב ו ע המהירות! לכן: ה ת נ ג ד ו ת ל ת נ ו ע ה א ש י ת נ ו ב ע ת ב ע י ק ר מ ה ח כ ו ך , ב ש ע ה ש ת נ ו ע ה מ ה י ר ה נ ת ק ל ת ב ה ת נ ג ד ו ת א ו י ר ח ז ק ה . הטפק המכונה (בכוחות סוס), הדרוש כדי להתגבר על ההתנגדות הזאת, גדל ביחס עוד יותר גבוה (עם קובית המהירות!); כיבוש המהירות נתקל איפוא בקושי חמור מאד מצד זה וההישגים העצומים, המצינים בכל זאת את השנים האחרונות, באו בעיקר הודות לשנויים רדיקליים ב צ ו ר ה ה ח י צ ו נ י ת של המכשירים. יש גם לזכור את הקפיצות הגדולות בכוח המכונות: הנה, למשל, השתמש סיגריב [Seagrave], בעל השיא במהירות הנסיעה במכונית ב-1930, במכונה בת 1000 כ"ס; שנה אחת אחריו נסע קמפבל [Campbell] במכונית עם מנוע בעל 1500 כ"ס, ואולם מהירותו עלתה רק בשעור של עשרות קילומטרים לשעה מועטות.

נוסף על המכשולים הנ"ל יש לזכור גם את סכנת המאמצים הגדולים, הנגרמים ע"י הסבוב המהיר של הגלגלים. הגדלת הגלגל אינה מועילה כאן הרבה, היות והכוח הצנטריפוגלי גדל עם רדיוס הגלגל; אך עוד יותר מסוכן הוא השמוש בגלגלים הקטנים (מדוע?).

יש איפוא לשער שמהירות המכונית מן הטיפוס הקיים לא תוכל לעלות על גבול מסוים (כחמש או שש מאות קילומטרים לשעה).

טיפוס אחר של מכשיר תנועה על יבשה הוא מ כ ו נ י ת ב ל י ג ל ג ל י ם , המחליקה ישר על מסילתה החלקה (שלג, וכדו'). בסקרה זה יש כמובן לדאוג לאמצעי הנעה בלתי תלויים בגלגלים (כי הרי במכונית הרגילה משמשים הגלגלים גם כאמצעי הנעה - ולא רק לשם הקטנת החכוך). את הבעיה הזאת אפשר לפתור בדרכים שונות, כגון: א) מדחף (פרופלר), אשר יעילותו לא כימלת מזו של הגלגל הרגיל - כפי שמוכיחה הערקטיקה של התעופה וגם נסיונות מוצלחים במכשירים ארציים; ב) זיקוקית (רקיטה), שאמנם נצולה החסכוני אפשרי רק במהירויות גדולות מאד, שאינן מתאימות לתנאים ארציים. שאלה חמורה יותר היא סדור המסילה בשביל מכשיר המחליק עליה. אחת מן ההצעות המעניינות ביותר בכוון זה היא: א ו י ר ד ח ו ס בין המסילה למכשיר; נסיונות ב"סיכה אויריתי" כזאת נעשו כבר בקנה-מדה קטן ובהצלחה מפתיעה.

אין איפוא כל ספק שבתנאים אלה תוכל מהירות של מכשיר לעלות בחרבה על הגבול הנקבע לעיל בשביל המכונית "הרגילה", ואולם המהירות הזאת לא תגיע למהירות של אוירון - ועל כל פנים לא תעלה עליה. המהירות של אוירון המונע במדחף, מהוה איפוא את הגבול העליון של מהירות מכשיר ארצי, המונע

באותם האמצעים (הצעות לבנין מכשירי תנועה ארציים, השונים מן הטפוסים הנייל שהם יצאו מגדר החקירה העיונית, ומוקדם איפוא לדון על גבולות יכולתם).

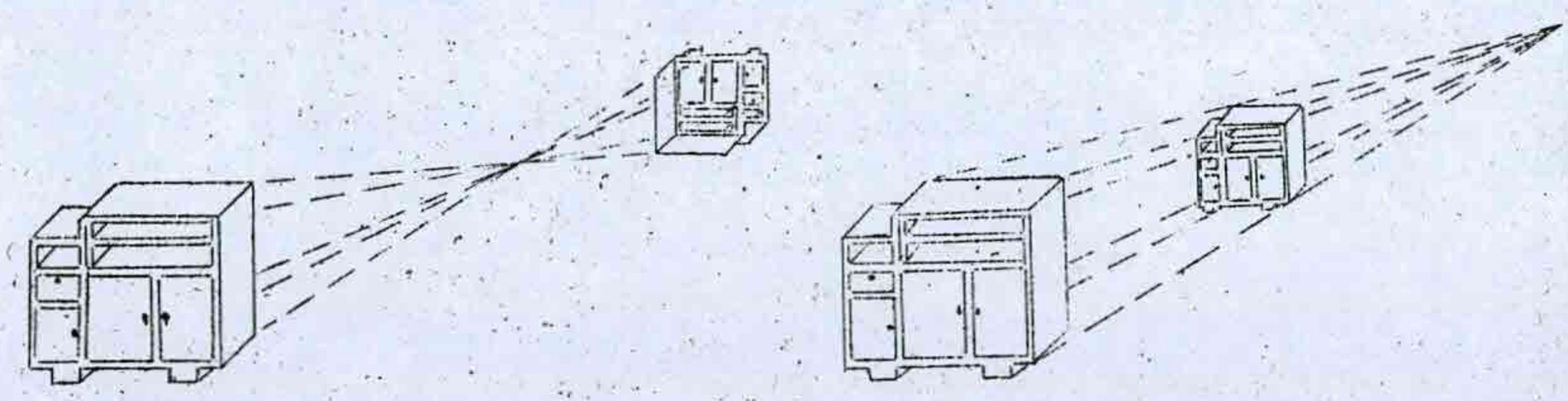
מבין המכשירים הנוסעים בתוך או על גבי המים, והמונעים במדחף, יהיה יתרון המהירות לסובל פחות מהתנגדות המים: אניה רגילה תסע איפוא מהר מצוללת; ומהירה משתיהן היא סירת-גלישה, אשר כמעט לא שוקעת במים אלא מחליקה על פניהם. בסירה כזאת - עם מדחף העובד במים או באויר הושגה כבר מהירות גבוהה למדי (יותר מ-160 קיים לשעה) ואין כל ספק שאפשר להעלותה עוד יותר. אך יחד עם זה ברור שאין סירת-הגלישה יכולה להתחרות לא באוירון ואפילו לא במכונית המחליקה על שכבת אויר כמתואר לעיל. עולה איפוא שמכשירי היבשה כמכשירי המים נופלים במהירותם מן האוירונים - בתנאי שמקור הכוח הוא מנוע תרמי רגיל. גם החלפת המנוע במכונת כוח מטפוס אחר (כגון טורבינת הקיטור) אינה עלולה להשפיע על היחס הזה כל עוד ישארו הגלגל והמדחף בתפקידם. נתכונן איפוא בתנאי התנועה של האוירון בטיסה מהירה.

כנפי האוירון שוכללו בזמן האחרון מאד - בהתאם לחקירה מקיפה, עיונית ומעשית. הודות לכך הגיע הנצול של כוח ההרמה שלהן כמעט עד כדי המכסימום האפשרי, בשעה שהתנגדות האויר לתנועתן הורדה כמעט עד המינימום. העלאת המהירות שהושגה כבר (כ-700 קיים לשעה) אפשרית איפוא רק על חשבון הגברת יעילותם של אמצעי ההנעה (המנוע והמדחף). אין להעלות את מהירות הסבוב של המדחף מעל לגבול מסוים המתאים למכסימום יעילותו, והגדלתו דורשת הרי שמוש בכוח מנוע נוסף עם כל התקלות הנובעות מכך. קיים עוד מכשול רציני אחד, והוא: חוק התנגדות האויר, שעליו מבוססים כל החשבונות בתעופה, קיים רק בתחום המהירויות הנמוכות ממהירות הקול (1300 קיים לשעה), וכבר החל משעור המהירות של 900 קיים לשעה בערך ואילך גדלה התנגדות המהירות במדה הרבה יותר גדולה מכפי שמתאים לחוק הנייל. כוח המנוע הדרוש גדל בתחום החדש הזה במדה מבהילה ממש: כך, כדי להכפיל את המהירות שכבר הושגה, דרוש - בתנאים אחרים שוים - כוח פי כ-20 יותר גדול! אין איפוא לשער שמהירות אויר מן הטיפוס הקים (כנף-מנוע תרמי-מדחף) תעלה על 900-1000 קיים לשעה, - בלתי אם יומצא מנוע חדש, הנותן כוח רב שלא במחיר משקל נוסף. אם כן, האויר המאפשר את טיסת האוירון (כנפים!) והנעתו (מדחף), גורם בעצמו למעצור העקרי בדרך לכבוש המהירות. הטיסה בסטרטוספירה (שכבת אויר בגובה כ-10 קיים ויותר) נתקלת אמנם בהתנגדות אויר קטנה יותר, אך לעומת זה יורד בה הניצול של התכונות "החיוביות" של האויר ואין להגיד כיום, אם וכיצד תצליח הטכניקה להתגבר על מעגל קסמים זה.

לעומת כל הנאמר לעיל, פותח השמוש בזקוקית (רקיטה) אפקים חדשים בכל ענפי התעופה המיכנית. כבר הוכח ערכה בכוח מניע ע"י נסיונות מוצלחים במכוניות, באוירונים, ובמכשירים חדשים מיוחדים. הצלחתם של הנסיונות הללו עוררה לפני שנים אחדות התענינות רחבה במכשיר חדש זה וגרמה לחקירה מקיפה בשאלות עיוניות ומעשיות הכרוכות בו. המאורעות של השנים האחרונות דחו את ענין הזקוקית מזירת הטכניקה ואין לע"ע ידיעות חדשות עליה.

הרקיטה אינה זקוקה לאויר האטמוספירי אלא רק לחומר דולק ולחמצן, אשר יכול לשמש אותה גם בצורה נוזלת. בחלל הריק אין גבול טבעי למהירותה. אך כפי שנאמר במבוא, כרוכים נסיונות רציניים ברקיטה בהוצאות עצומות, שאינן נותנות מקום לאופטימיות יתרה לגבי רעיון-הרקיטה בעתיד הקרוב.

- = - = - = - = -

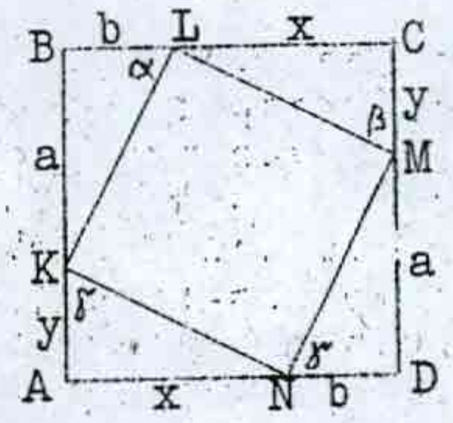


כפול של כוננית ב 1/2

כפול של כוננית ב 1/2

מגה עם מרחר ענק

היכן ההגיאה?



מ ש פ ט :
כל מלבן מוקף בתוך רבוע - הוא רבוע.

ה נ ח ה :
ABCD הוא רבוע, KLMN הוא מלבן מוקף בתוכו.

מ ס ק נ ה :

$$\overline{KL} \cong \overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{KN}$$

ה ו כ ח ה : כל המשולשים AKN, KBL, LCM ו MDN דומים כי הזויות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ חופפות כזויות חדות ששוקיהן מאונכות בהתאמה. ולכן ברור כי המשולשים הנגדיים חופפים. כלומר:

$$(1) \quad \triangle KBL \cong \triangle NDM \ , \ \triangle AKN \cong \triangle LCM$$

נסמן $\overline{AN} \cong \overline{LC} = x \ , \ \overline{AK} \cong \overline{CM} = y$

$\overline{KB} \cong \overline{MD} = a \ , \ \overline{BL} \cong \overline{ND} = b$

לפי ההנחה $x+b=a+y$

או $x-y=a-b \quad (2)$

מדמיון המשולשים AKN ו BKL נקבל

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

או

$$\frac{x}{y} - 1 = \frac{a}{b} - 1$$

$$\frac{x-y}{y} = \frac{a-b}{b}$$

$$b(x-y) = y(a-b)$$

ולפי (2)

$$(3) \quad b(a-b) = y(a-b)$$

או

$$(4) \quad b = y$$

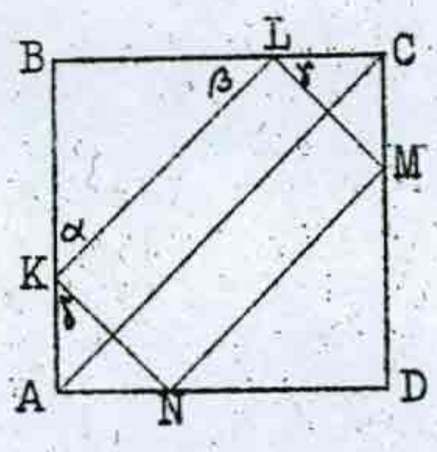
$$a = x$$

מכאן

$$(5) \quad \triangle AKN \cong \triangle BLK$$

מ (5) ו (1) יוצא

$\overline{KL} \cong \overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{KN}$ מ.ש.ל.



וכעת נוכיח כי אפשר להקיף בתוך הרבוע ABCD מלבן שאינו רבוע.

תהי K נקודה על AB כך ש

$$(6) \quad \overline{AK} = \frac{\overline{KB}}{2}$$

נעביר $KL \| AC$, ו KN ו LM מאונכים על KL ונקשר את M עם N ונראה כי המרובע KLMN הוא המלבן הדרוש.

המשולש ישר-הזוית KBL הוא שוה-שוקיים (כי $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ו $KL \| AC$) ולכן

$$\alpha \cong \beta = 45^\circ$$

ולכן גם $\gamma \cong \delta = 45^\circ$

ו $\overline{AK} \cong \overline{LC}$

ומכאן $\triangle AKN \cong \triangle LMC$

לפי צלע ושתי זויות על ידה; וקבלנו:

$$(7) \quad \overline{KN} \cong \overline{LM}$$

אבל גם

$$(8) \quad KN \parallel LM$$

כשני אנכים על KL.

מ (7) ו (8) יוצא ש KLMN הוא מקבילית ולכן KLMN הוא מלבן לפי המשפט שמקבילית בעלת זוית ישרה היא מלבן.

וברור כי

$\overline{KL} \not\cong \overline{KN}$, אחרת

$\triangle AKN \cong \triangle KBL$,

ו $\overline{AK} \cong \overline{KB}$ בנגוד ל (6).

קבלנו אם כן סתירה למשפט שהוכח בצד ימין.

ה. י כ ן ה ש ג י א ה ?

. . . . .

ראלה שמות התלמידים שהגישו לנו פתרונות לבעיות שהוצגו בחוברת הראשונה, לפי מוסדותיהם:

ירושלים. הגמנסיה העברית: צבי אלטר, ה'. מיכאל משלר, ה'. רחל מרכוס, ז'. בית הספר התיכון: עמוס ינובסקי, ו'. יעקב שניאורסון, ז'. גדעון כרמי, ח'.
ביהמ"ד למורים "מזרחי": יוסף עטייה - י'. דימנט, ג'.
גמנסיה "סוקולוב": אליהו אייזיקס, ו'.

תל-אביב. גמנסיה "בלפור": עמנואל גולדשלק, ו'. עמוס דה-שליט, ו'. משה מלינוביץ, ו'. גבריאל קליבנוב, רבקה קפלן, ה'.
בי"ס עי"ש מכס פיין: זלמן נגרי, ב'. זאב קפלן, ב'.

חיפה. בי"ס ראלי, אחוזה: אורי ברזל, ד'.

מבתי ספר אחרים לא הגיעו אלינו פתרונות, מכיון שהעתון הופץ באיחור בין תלמידיהם מתוך סבות שאינן תלויות במערכת. נקוה שלהבא ישתתפו ביתר שאת.

א. פתרונות לתרגילים שניתנו במאמר "על הפיכת שברים פשוטים לעשרוניים".

תרגיל א: הוכח כי כל שבר מחזורי שהור הקטן מ 1 שוה לשבר פשוט אמיתי, אשר בצורתו המצומצמת מכנהו זר ל 10.

לפי משלו: $\frac{1}{a} = 0,\dot{s}_1 s_2 s_3 \ldots \dot{s}_n = \frac{s_1 s_2 s_3 \ldots s_n}{9\,9\,9\ldots 9}$

ומכיון ש 999...9 זר ל 2 ול 5, הרי גם המכנה של השבר המחזורי המצומצם a זר ל 10. הערה: השבר הנ"ל יכול לשוות ל 1 במקרה ש $s_i=9$ $(i=1,\ldots,n)$, ז"א, $a=1$; במקרה זה המספר אינו נכון.

תרגיל ב: הראה כי כל שבר מסוים שוה לשבר מחזורי מעורב.
$0,s_1 s_2 \ldots s_r = 0,s_1 s_2 \ldots (s_r-1)\dot{9}$; למשל: $0,358 = 0,357\dot{9}$.

תרגיל ג: הוכח כי כל מספר טבעי הזר ל 10 מחלק אינסוף מספרים של הסדרה 9, 99, 999, וכו'.
לפי משלו: אם a זר ל 10, אז $\frac{1}{a} = 0,\dot{s}\,s\ldots\dot{s} = \frac{ss\ldots s}{99\ldots 9}$. ההמשך ברור.

הפותרים לא הראו כי יש אינסוף מספרים כאלה המתחלקים ב a. התשובה המלאה מתקבלת מתוך כך שהנוסחה (8) שבמאמר נכונה לא רק בשביל המקרה ש m הוא אורך המחזור, אלא גם כאשר m הוא כפולה כלשהי של אורך המחזור.

תרגיל ה: הוכח כי סכום ומכפלתם של שני שברים מחזוריים שהורים אפשר להציג בתור שברים מחזוריים שהורים.
לפי דה-שליט: המכנה של מכפלת השברים כמו של סכום השברים שוה למכפלת מכניהם. ההמשך ברור.

תרגיל ו: האם אף מנתם של שני שברים מחזוריים שהורים תשוה תמיד לשבר מחזורי שהור?
התשובה היא שלילית, כי למשל $\frac{6}{7}:\frac{4}{7}=\frac{3}{2}=1,5$; ו 1,5 אינו שוה לשבר מחזורי שהור.
פתרו: דה-שליט, מטלר, רחל מרכוס.

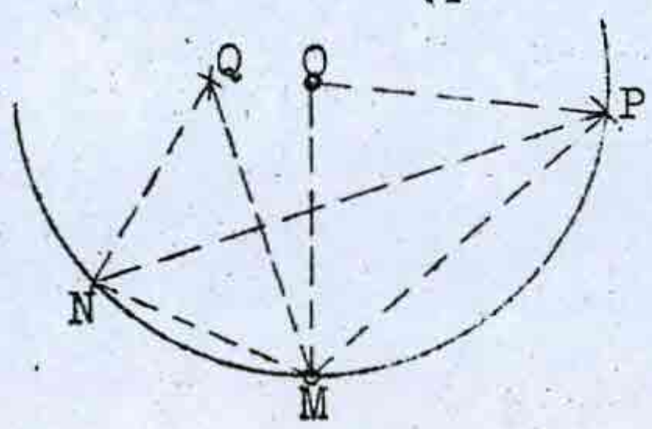
ב. פתרונות לבעיות שהוצגו במאמר "בניות הנדסיות בעזרת המחוגה בלבד".

(1) הכפל זוית נתונה!
תהא $B\hat{A}C$ הזוית הנתונה. חגים $A(\overline{AB})$ ו $C(\overline{BC})$. מסמנים את נקודת חתוכם ב D. $B\hat{A}D = 2B\hat{A}C$. ההוכחה ברורה.
פתרו: רחל מרכוס, עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט, מלינוביץ, קליבנוב.

(2) חצה זוית נתונה!
תהא $B\hat{A}C$ הזוית הנתונה. קובעים את נקודת החתוך של AB עם $A(\overline{AC})$ (לפי בניה 7 שבמאמר). ההמשך ברור.
פתרו: עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט, מלינוביץ, קליבנוב.

(3) נתונה זוית $A\hat{B}C$ וקרן $\overline{EF}$. בנה קרן $\overline{EG}$ כך שיתקיים: $G\hat{E}F = A\hat{B}C$.
קובעים את נקודת החתוך של EF עם $E(\overline{BC})$. ההמשך ברור.
פתרו: עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט, קליבנוב.

(4) הוכח את נכונות הבניה הבאה של המתכונתי הרביעי לשלושה קטעים נתונים p,n,m (בתנאי שקיים: $n \quad 2m$, $p \quad 2m$):
מציינים נקודה כלשהי, O. חגים $O(m)$.
עליו מציינים נקודה כלשהי, M. חגים $M(n)$ החותך את $O(m)$ ב N. חגים $M(p)$ החותך את $O(m)$ ב P. בונים את הנקודה הסימטרית ל M לגבי PN, ומסמנים אותה ב Q. $\overline{MQ}$ הוא המתכנתי הרביעי המבוקש.



הוכחה: המשולשים QNM ו POM דומים, כי שניהם שוי-שוקים, $P\hat{O}M = 2P\hat{N}M$ (מרכזית והיקפית), $Q\hat{N}M = 2P\hat{N}M$ (סימטריה). ההמשך ברור.
פתרו: עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט.

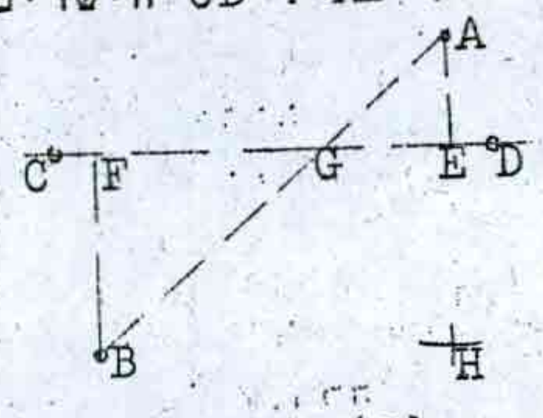
(5) קבע את המרכז של המעגל המכיל שלש נקודות נתונות!
ברור שעל סמך הבניה שבבעיה 6ב אפשר למצוא את מרכז המעגל בנקודת חתוך של שני אנכים אמצעיים. אולם לא לחנם הוקדמה בעיה זו: נוח יותר לקבוע את רדיוס המעגל עפ"י הפיכת הבעיה הקודמת! יהיו M,N,P הנקודות הנתונות. קובעים את Q הסימטרית ל M לגבי PN, והרדיוס המבוקש יתקבל כמתכנתי רביעי לקטעים $\overline{QM},\overline{NM},\overline{PM}$ (לפי בניה 5 שבמאמר). ההמשך ברור.
פתרו: גולדשלק, דה-שליט (עפ"י אנכים אמצעיים).

(6א) קבע את נקודת החתוך של שני ישרים נתונים המאונכים זה על זה!
יהיו AB ו CD הישרים הנתונים. קובעים את E, הנקודה הסימטרית ל C לגבי AB. נקודת-האמצע של $\overline{CE}$ (לפי בניה 8 שבמאמר) היא נקודת החתוך המבוקשת. ההוכחה ברורה.

פתרו: גולדשלק, דה-שליט; קליבנוב (מסובך במקצתו).
ברור שבאותו האופן מוצאים את עקב האנך המורד מנקודה נתונה על ישר נתון.

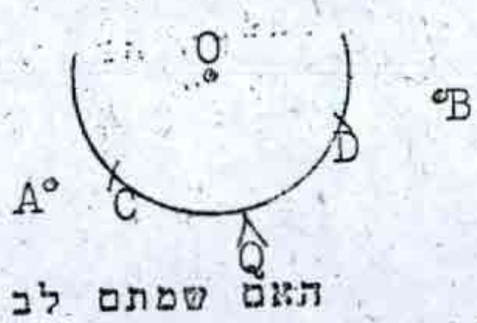
(6ב) קבע את נקודת החתוך של שני ישרים שאינם מאונכים זה על זהן

יהיו AB ו CD הישרים הנתונים. תהא G נקודת החתוך המבוקשת שלהם. מוצאים את עקבי האנכים המורדים מ A ומ B על CD, לפי הבעיה הקודמת, ומסמנים אותם ב E וב F. המשולשים AEG ו BFG דומים, על כן: $\overline{AE}:\overline{BF}=\overline{AG}:\overline{BG}$; מזה: $(\overline{AE}+\overline{BF}):\overline{BF}=\overline{AB}:\overline{BG}$. שלושת הקטעים הראשונים ידועים (את הראשון אפשר לקבל ע"י השלמת EFB למלבן EFBH, כי אז: $\overline{AE}+\overline{BF}=\overline{AH}$), ועל כן אפשר לקבוע גם את $\overline{BG}$, ההמשך ברור.
פתרו: גולדשלק, דה-שליט.



(7) קבע את נקודת החתוך של מעגל נתון עם ישר נתון שאינו עובר דרך מרכזו!

יהא O(r) המעגל הנתון ו AB הישר הנתון. קובעים את הנקודה הסימטרית ל O לגבי AB ומסמנים אותה ב Q. חגים Q(r). נקודות החתוך של O(r) ו Q(r), C ו D, הן הנקודות המבוקשות. ההוכחה ברורה.
פתר: דה-שליט.

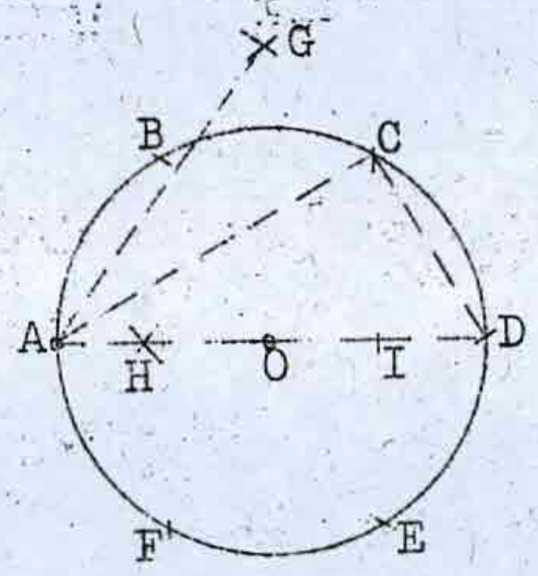


האם שמתם לב שע"י התרת הבעיות 6 ו 7 - בנוסף על הכתוב במאמר - מוכח כבר המשפט המרכזי של המאמר בדבר אפשרות פתרון כל בעיית-בניה בעזרת המחוגה בלבד, אשר הוכחתו הובטחה ל"הזדמנות אחרת"? כי הרי כל בניה מורכבת בעיקרה מקביעת נקודות החתוך של שני ישרים, של ישר ומעגל ושל שני מעגלים. ומאחר שלמדנו להוציא לפועל את שלש הבניות היסודיות הללו בעזרת המחוגה בלבד, בשוחים אנו שבדע להתיר כל בעיה, הנפתרת בעזרת סרגל ומחוגה, גם בלי סרגל! מן הראוי שתבררו לכם את הענין הזה היטב, ברור זה יוסיף הרבה להבנה עמוקה יותר של הגיאומטריה בכלל!

(8) הקף מחומש משוכלל בתוך מעגל נתון!

בכל ספר למוד לגיאומטריה מוכיחים שצלע המעושר המשוכלל המוקף בתוך מעגל בעל רדיוס r שוה ל $\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$. את הבטוי האלגברי הזה בונים בדרך הבאה:

מקיפים בתוך המעגל הנתון משושה משוכלל ABCDEF. $\overline{AC}=r\sqrt{3}$. חגים $A(\overline{AC})$ ו $D(\overline{AC})$ הנחתכים ב G. $\overline{OG}=r\sqrt{2}$. את אמצע $\overline{OD}$ מסמנים ב I. חגים $C(\overline{OG})$ ו $E(\overline{OG})$ הנחתכים על AD ב H. $\overline{HI}=\frac{1}{2}r\sqrt{5}$, ועל כן: $\overline{OH}=\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$. ההמשך ברור.
פתרו: דה-שליט, קליבנוב.



ג. <u>הפתרונות ל"בעיות"</u>.

(א1) הוכח: מספר מתחלק ב-7, אם ההבדל בין ספרת היחידות הכפולה ובין שארית המספר מתחלק ל-7.

(ב1) הוכח: מספר מתחלק ב-13, אם הסכום של ספרת היחידות כפולת 4 עם שארית המספר מתחלק ל-13.

פתרונו של דה-שליט:

א. <u>נתון</u>: המספר $10y+x$; <u>הנחה</u>: $y-2x$ מתחלק ב-7; <u>צ"ל</u>: $10y+x$ מתחלק ב-7.
<u>הוכחה</u>: $10y+x = 10y-20x+21x = 10(y-2x)+21y$

כאן האגף הימני מתחלק ב-7, כי גם 21 וגם $y-2x$, לפי הנחתנו, מתחלקים בו. לכן מתחלק גם האגף השמאלי, כלומר המספר הנתון, ב-7.

ב. <u>נתון</u>: המספר $10y+x$; <u>הנחה</u>: $y+4x$ מתחלק ב-13; <u>צ"ל</u>: $10y+x$ מתחלק ב-13.
<u>הוכחה</u>: $10y+x = 10y+40x-39x = 10(y+4x)-39x$

כאן האגף הימני מתחלק ב-13, כי גם 39 וגם $y+4x$, לפי הנחתנו, מתחלקים בו. לכן מתחלק גם האגף השמאלי, כלומר המספר הנתון, ב-13.

גדעון כרמי הכליל את הבעיה ומצא שיטה לקביעת סמני התחלקות מן הסוג הנידון לכל מספר ראשוני הזר ל-10. את מחקרו הקטן הזה נביא בחוברת הבאה. פתרו: דה-שליט, דימנט-עטייה, כרמי, משלר, רבקה קפלן, שניאורסון.

(2) המספרים המביעים את הממדים של תיבה הם ראשוניים ולא-זוגיים; נפח התיבה ביחידות מעוקבות מתאימות מובע ע"י מספר בן שלש ספרות; פני התיבה ע"י מספר בן 4 ספרות. מצא את הממדים והראה כי הפתרון הוא יחיד.

תשובתו של כרמי:
נסמן ב a,b,c את ממדי התבה, ב N=abc את נפח וב $P = 2(ab+bc+ac)$ את פני התיבה. - לפי הנתון

$$\frac{P}{N} > 1$$

נציב את הערכים של P ושל N ; ונקבל: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > \frac{1}{2}$

רואים מיד שאחד הממדים, נניח a, מוכרח להיות 3, וממד שני, נניח b, לכל היותר 7. קיימות שתי אפשרויות:

(1 $a = 3 , b = 7 , c > 7$ (2 $a = 3 , b = 5 , c > 5$

במקרה 1) c אינו יכול להיות גדול מ-43. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\right)$ עוד גדול מ $\frac{1}{2}$ אך $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}\right)<\frac{1}{2}$.

אך בגבולות אלה P קטן מ-1000. לכן מקרה זה מתבטל. נשאר איפוא המקרה 2) והוא הנכון. בכדי למצוא את c, נגבול אותו בתוך רוח מסוים. - נסמן ב c_M וב c_m את הערכים המכסימליים ומינימליים ש c יכול לקבל. מתוך השויון:

$$N_M = 3.5.c_M = 999$$

נמצא כי

$$c_M = \frac{999}{15} = 66,6$$

וכן מתוך

$$\frac{P_m}{2} = 15+3c_m+5c_m = 500$$

נמצא כי

$$c_m = 60,625$$

מכאן $67 > c > 60$. המספר הראשוני היחיד ברוח זה הוא 61. על-כן: $a = 3 , b = 5 , c = 61$.

הערת המערכת: הננו להעיר את תשומת לבכם לכך שלפי ההגדרה המקובלת היום אין 1 נחשב למספר ראשוני! רבים לא התחשבו בזאת - ונכשלו. - מיחידות הפתרון נובע גם שממדי התבה צריכים להיות שונים.

פתרו: (עם הוכחה:) כרמי, שניאורסון
(ללא הוכחה:) גולדשלק, דימנט-עטייה, נגרי.

(4) צייר את גרף הפונקציה: $y = \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{16-x^2}$
תשובה: לגרף יש צורת לב.
פתרו: כרמי, גולדשלק, נגרי, קפלן

(7) שתי דוברות יוצאות באותו הזמן זו לקראת זו משתי הגדות של נהר. הן נוסעות במהירות קבועה ונהגיען אל הגדה השניה חוזרות ללא הפסד זמן. הן נפגשות בפעם הראשונה 70 מ' מן הגדה האחת ובפעם השניה במרחק של 40 מ' מן הגדה הנגדית. מצא את רוחב הנהר.
תשובה: רוחב הנהר 170 מטר.
פתרו: גולדשלק, דה-שליט, כרמי, מלינוביץ, משלר, נגרי, קפלן, שניאורסון.

(8) מצא בעזרת המשפט $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ את סכום הרבועים של n המספרים הראשונים הטבעיים.
פתרונו של כרמי: $S_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$
נכתוב סכום זה בצורה אחרת:

$$\sum k^2 = \sum (k+k^2-k) = \sum [k+k(k-1)] = \sum_1^n k+\sum_1^n 2\binom{k}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)+2\sum_1^n\binom{k}{2}$$

נמצא את ערכו של מחצית המחובר השני, כלומר, את סכומו של השור

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} +\ldots+ \binom{1}{2}$$

לפי המשפט הנ"ל, אפשר לכתב בשביל האבר ה k-י $\binom{k}{2} = \binom{k+1}{3} - \binom{k}{3}$
ונקבל את השור

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} + \binom{n}{3} - \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{3} +\ldots - \binom{n+1}{3}$$

זו"א

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)+2\binom{n+1}{3} = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{2(n+1)n(n-1)}{1.2.3} = \frac{1}{6}n(n+1)(3+2n-2)$$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

פתרו: כרמי.

(9) זהה את הערכים המספריים של האותיות בתרגיל החלוק:

```
   cddefg:ab=hifj
א  cch
     ee
ב    ab
     hdf
ג    dec
     hag
ד    hhj
      c
```

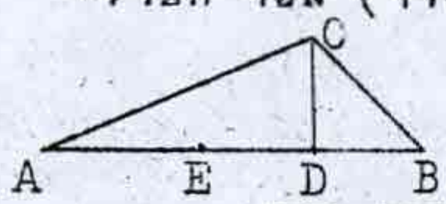
תשובתו של משלר:
מב' נובע: i=1, כי ab.i=ab. מא' 10+d-h=e (I). מג' d+1=h (II). ומשתי משואות אלה e=9. מד' a=h+1 (III), ומב' e-a=9-a=h ובשים לב ל (III) 9=2h+1 ו h=4 (IV).

מ (II) ומ (IV) d=3 (V). מא' c+1=d, c=2. מ (III) ומ(IV) (a=5). מג' (a=5, c=2) f=7. מב' ומ (V) 9-b=d=3, b=6. בשביל g ו j נשארו הערכים 0,8. מד' g<j, ולכן g=0, j=8.

a=5 , b=6 , c=2 , d=3 , e=9 , f=7 , g=0 , h=4 , i=1 , j=8 .

פתרו: (עם הוכחה): משלר, ינובסקי, גולדשלק, דה-שליט.
(ללא הוכחה): אלטר, ברזל, דימנט-עטייה, כרמי, מלינוביץ, רחל מרכוט, נגרי, ז. קפלן, רבקה קפלן.

(10) מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות (במישור) אשר הבדלי רבועי מרחקיהן משתי נקודות נתונות שוה לגודל נתון.



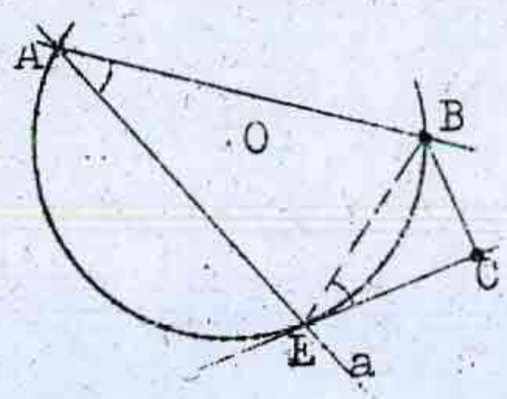
פתרון: נטמן את הנקודות הנתונות ב A ו B ואת הגודל הנתון ב d^2. תהיה C נקודה על המקום הגיאומטרי המבוקש, אזי יתקיים: $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=d^2$. תהא D עקב האנך המורד מ C על $\overline{AB}$. אזי קיים: $\overline{AD}^2-\overline{BD}^2=(\overline{AC}^2-\overline{CD}^2)-(\overline{BC}^2-\overline{CD}^2)=d^2$

או

$$(\overline{AD}+\overline{BD})(\overline{AD}-\overline{BD}) = d^2$$

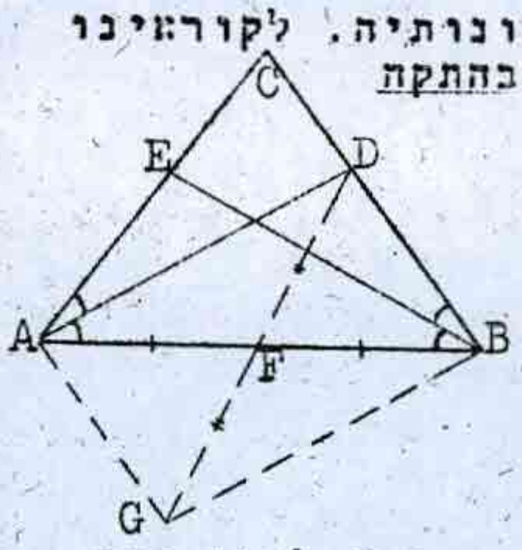
הקטע $\overline{AD}-\overline{BD}$ הוא איפוא המתכנתי השלישי ל $\overline{AB}$ ו d. לכן, אם נקצה על $\overline{AB}$ מ A קטע $\overline{AE}$ השוה ל $\frac{d^2}{AB}$ ונחצה את $\overline{EB}$, תהיה נקודת האמצע שלו הנקודה D. המקום הגיאומטרי עצמו יהיה האנך על AB ב D.
פתרו: כרמי, עטייה-דימנט, דה-שליט.

(11) נתונות שלש נקודות A,B,C שאינן במצאות על קו ישר אחד ונתון ישר a דרך A. בנה מעגל שיעבור דרך A ו B ויחתוך את a בנקודה E באופן ש CE ישיק למעגל הזה.



פתרונם של עטייה-דימנט:
לפי משפט הזוית בין משיק ומיתר צריך להתקיים: $B\hat{E}C \cong B\hat{A}E$. על כן במצאת E על קשתות הראיה מעל $\overline{BC}$ בזוית השוה לזוית הנוצרת ע"י הישרים a ו AB.
פתרו: כרמי, עטייה-דימנט.

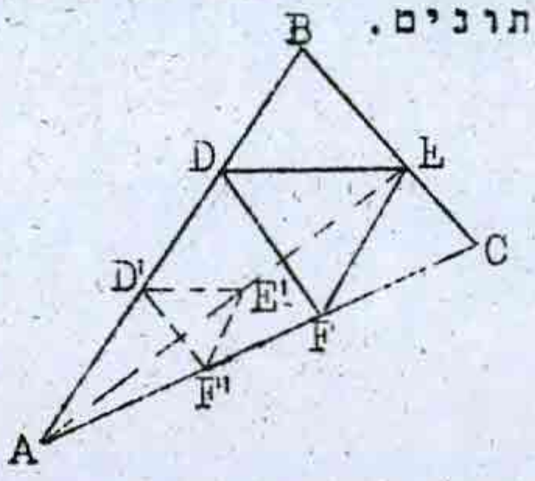
(12) הוכח: אם שני חוצים (ביסקטריסות) במשולש חופפים, המשולש הוא שוה-שוקים.
בעיה זו היא מן המפורסמות ביותר ורב מאד מטפר פתרונותיה. לקוראינו ידועה בעיקר הוכחה אחת, המתנהלת בדרך השלילה ובשימוש בהתקה מקבילה. הננו נותנים לכם התחלה של דרך שניה הדומה לקודמת, אולם משתמשת בסימטריה.



בציור, הנקודה G היא הנקודה הסימטרית ל D לגבי F.
פתרו: משלר, עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט, מלינוביץ, קליבנוב.
כרמי הגיש הוכחה אלגברית יותר היוצאת מן הנוסחאות של החוצים בעזרת הצלעות. הרעיון של ההוכחה הוא בזה שאחרי פעולות חשבוניות מטוימות ופירוק לגורמים יוצא שאחד הגורמים הללו, b-a, שוה ל 0, ועל כן a=b.

(13) נתונים שני מעגלים שמרכזיהם O ו 'O בחצי-מישור אחד לגבי ישר נתון a. קבע על a נקודה P כך שהזוית בין המשיקים למעגלים דרכה ובין a תחפפנה. כמה פתרונות?
בונים את המעגל הסימטרי לאחד המעגלים הנתונים לגבי הישר הנתון. המשיקים המשותפים לו ולמעגל השני הנתון הם הישרים המבוקשים. ההוכחה ברורה.
פתרו: כרמי, עטייה-דימנט; דה-שליט (מסובן!).

(14) בנה משולש כך שקדקדיו יימצאו בהתאמה על הצלעות של משולש נתון ישצלעותיו נקבלנה בהתאמה לשלשה ישרים לא-מקבילים נתונים.



מעבירים מקביל לאחד הישרים הנתונים החותך את $\overline{AB}$ ב 'D ואת $\overline{AC}$ ב 'F. דרך 'D מעבירים מקביל לישר השני ודרך 'F מקביל לישר השלישי. מקבילים אלה נחתכים ב 'E. 'AE חותך את $\overline{BC}$ ב E, היא אחת הקדקדים המבוקשים. ההמשך של הבניה ברור. הוכחה: המשולשים DEF ו 'D'E'F הם הומותטיים, כלומר דומים והקוים העוברים דרך קדקדים מתאימים נחתכים בנקודה אחת A.
פתרו: כרמי (מסובן במקצת!).

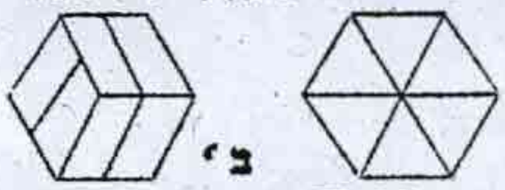
(15) הקף במעגל נתון משולש ישר-זוית באופן שניצביו יעברו דרך שתי נקודות נתונות.
הקדקד של הזוית הישרה נמצא על המעגל שהקטע הנתון הוא קטרו (על "מעגל-תלש" מעל לקטע זה). ההמשך ברור.
פתרו: כרמי, עטייה-דימנט, גולדשלק, דה-שליט, מלינוביץ, נגרי, קפלן.

ד. תשובות לשאלות שנשאלו ב"שיחת חולין מתמטית".

(16) משולש שסכום זויותיו גדול מ180°".

תשובה: שגיאתו של ראובן לא היתה בזאת שהסתמך על שרטוט בלתי-מדויק, כי אם בזאת - שהסתמך על שרטוט בכלל! אם AB עובר דרך נקודת המגע השניה של שני המעגלים או לאו, אינו נקבע ע"י שרטוט, כי אם ע"י הוכחה! ולגמרי לא קשה להוכיח ש AB עובר דרכה.

(17) שנה את מצבם של שלשה גפרורים בציור א' כך שתווצרנה שש מקביליות חופפות.



ב' א'

תשובה: ציור ב'.

(19) זהה את הערכים המספריים של האותיות בתבור שבצד והראה שלחבור 2 פתרונות הנבדלים זה מזה רק ע"י החלפת הערכים של O ו I.

NEWTON	847108	847138
+KLEIN	+95438	+95408
KEPLER	942546	942546

(20) מציאת רבוע מגי.

פתרו את השאלות 16-20: רחל מרכוס, משלר, גולדשלק, דה-שליט, ר.קפלן.
פתרו את 16: קליבנוב, ז. קפלן. את 17: דימנט-עטייה, אייזיקס, מלינוביץ, נגרי, ז. קפלן, ברזל. את 19: אלטר, ינובסקי, אייזיקס, ברכה ויינשטוק, מלינוביץ. את 20: אלטר, ינובסקי, דימנט-עטייה, אייזיקס, מלינוביץ, ברזל.

את השתרונות לבעיות 3, 5, 6, 18 נביא בחוברות הבאות.

בעיות

> השתרונות לבעיות - גם לאלה שהוצגו בתוך המאמרים - צריכים להגיע למערכת לא יאוחר מן ה-10 ביוני. ציינו בתשובותיכם את המספר הסדורי של הבעיה וחזרו על הנוסח המלא שלה. הבעיות הסומנות ע"י * מבוססות על חומר הנלמד בכתות ה'-ו' בלבד, ועל-כן תנתן לתלמידי הכתות האלה זכות-בכורה בפרסום שתרונותיהם. -
> תשובות ללא הוכחות בצדן - לא תובאנה בחשבון.

21. הוכח כי n^3-n מתחלק ב 6 (6=31) לכל n שלם.

22. * חשב את ערכו של $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ הכלל וחשב $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$ בשביל אילו ערכים של a נקבל מספר שלם?

23. * זהה את האותיות והראה שהפתרון הוא יחיד. (השוה בעיה 9)

√wooden	bed
ws	
dod	
des	awe
snen	
snen	awsd
- -	

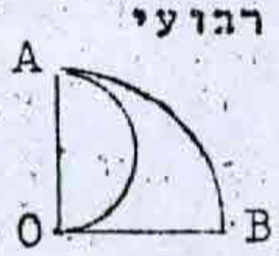
24. הוכח: (א) אם a^n-1 (n>1) הוא מספר ראשוני, אז a=2, ו n ראשוני.
(ב) אם a^n+1 (a≥2) הוא מספר ראשוני, אז a זוגי, ו $n=2^m$.

25. הוכח: בין כל המרובעים שצלעותיהם d,c,b,a נתונות, למרובע המוקף במעגל השטח הגדול ביותר.
(א. בדרך הגדסית; ב. בעזרת החשבון הדיפרנציאלי).

26. * בנה מרובע ABCD לפי $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, α, β, γ.

27. נתון מעגל וקוטר אחד שלו (בלי המרכז); כמו כן נתונה נקודה P. שיכולה להמצא בפנים המעגל, מחוץ לו, או עליו.
הורד מ P אנך על הקוטר ב ע ז ר ת ה ס ר ג ל ב ל ב ד.

28. [illegible] כל הנקודות במישור אשר סכום רבועי מרחקיהן משתי נקודות נתונות שוה לגודל נתון.

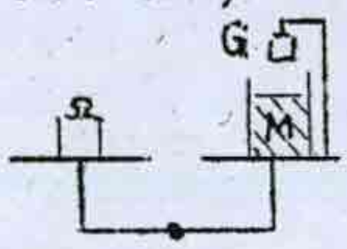


29. * בנה מעגל שישיק ל $\overline{OB}$, $\widehat{OA}$, ו $\widehat{AB}$ ($\widehat{OA}$ היא מחצית מעגל).

פ י ס י ק ה.

30. במאורר חשמלי קטנה עצמת הדרם במשך פעולתו מן העצמה ברגע הראשון. מדוע?

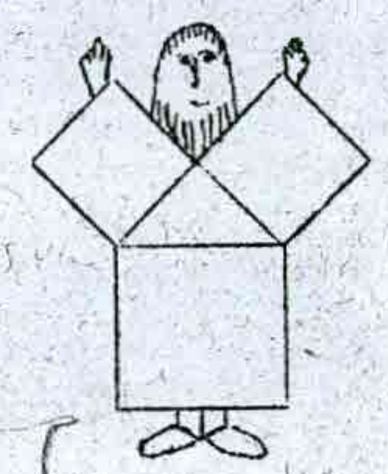
31. מדוע אי-אפשר להשתמש בגלגל רדיו בעלי תדירות גבוהה מאד (התדירות גדולה מ-60 מגה-סיקל) לשם שדור למרחקים?



32. * נניח כי שורר שווי-משקל. אם נטבול את הגוף G בנוזל M, יקטן משקלו לפי חוק ארכימדס. כיצד ישפיע דבר זה על המאזנים?

33. * מנין ידוע לנו כי ישנו נתרן בשמש?

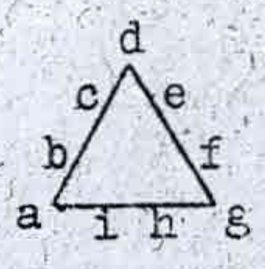
עניית חולין בעתבעטית



34. יואש, יורם, ויואב הלכו עם בטיחם תמר, שושנה ורחל לחנות "כל-בו". כל אחד משת הקונים שלם עבור כל חתך מספר גרשים כמספר החפצים שקנה. כל איש הוציא 63 גרשים יותר מאשתו. יואש קנה 23 חפצים יותר מתמר, ויורם 11 חפצים יותר משושנה. מי אשתו של מי?

35. חתוך קוביה ע"י מישור באופן שהחתך יהיה משושה מסוכלל.

36. במקום להדפיס את מכפלת החזקות $a^b c^a$, הדפיס פועל הדפוס בטעות abca. ובכל זאת לא טנה ע"י כך את ערך הבטוי. מצא את המספר והראה שהוא יחיד (בתנאי ש a,b,c שונים זה מזה).



37. סדר את הספרות 1,2,3,...,9 סביב מטולט (לפי הצורה), באופן שסכום רבועי המספרים שלאורך כל צלע יסוה לגודל קבוע נתון:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = d^2+e^2+f^2+g^2 = g^2+h^2+i^2+a^2 = S$$

38. חשב "אחת-שתים": (א) $\sqrt{999993 \cdot 999994 \cdot 999995 \cdot 999996 + 1}$

(ב) $\sqrt{999993 \cdot 999995 \cdot 999997 \cdot 999999 + 16}$

39. צמצום-בזק. בטעות האחרון הביא ראובן "הממציא" תגלית חדשה: "גליתי שטה קצרה יותר ומשעממת פחות לצמצום שברים", הכריז, בגס אל הלוח, כתב $\frac{49}{98}$ ו... צמצם ב 9 בצורה המטושה הבאה: $\frac{49}{98}$. הכתה פרצה בצחוק, אולם המורה טרצה להפילו בפח פנה אליו באדיבות מיוחדת: "אולי תואיל לצמצם לנו גם שבר אחר בשיטה הנפלאה שלך, למשל $\frac{16}{64}$?" ראובן לא התעצל, כתב את השבר על הלוח ומחק את השש במונה ובמכנה - את ההמשך הנכם יכולים לתאר לעצמכם!

מאז רודפת כל הכתה אחרי שברים נוטפים, שאפשר לצמצם בדרך זו. אולי תחפשו גם אתם?

דאר המערכת

(א) ד"ר לויצקי בקש מאתנו לתקן את שגיאות הדפוס שחלו במאמרו בחוברת הקודמת, ואלו הן:

1. בעמוד 2 צריך להשמיט את הסוגרים בסאלה א ולהוסיף את המלים הבאות: או שמא קיימים שברים פשוטים אשר לא ישוו לא לשבר מסוים ולא לשבר מחזורי.
2. בעמוד 3 בתרגיל ד צריך להיות "הסליטית" במקום "הסביה".
3. בעמוד 3 במשפט א חסרה המלה "מסוים" אחרי המלה "עשרוני".
4. בעמוד 4 בשורה הראשונה צריך להיות $\frac{3129}{10^4-1}$ במקום $\frac{3129}{10-1}$.

(ב) הציורים שבמאמר "קו-אוילר ומעגל-תשע-הנקודות" צוירו ע"י ברוך ברנהיים; הציורים בעמוד 5 - ע"י ע. ינובסקי (בית-הכרם, כתה ו').

(ג) נתקבלו במערכת עבודות מקוריות מאת י. שניאורסון (בית-הכרם ז') על "שיטה לבנית משולטים הרוניים", מאת ר. שרם (הראלי, חיפה, ח') על "בטוי $\sin\alpha$ ע"י מכפלה אינסופית", מאת ג. כרמי (בית-הכרם, ח') בקטר עם בעית הסקילה לטעת חירום שהוצגה בחוברת הקודמת. את העבודות האלה נפרסם בחוברת הבאה, האחרונה בסנת למודים זו. חוברת זו תוקדש בעיקרה למטרה זו.

(ד) כל הפונים למערכת מתבקשים לכתוב באופן ברור את שמם, את המועד אשר בו הם לומדים ואת הכתה. לא נוכל לטפל במכתבים שלא יכילו את הפרטים האלה.

כתובת המערכת: דפים למתמטיקה ולפיסיקה
מיונות-עובדים ב', 10
י ר ו ש ל י ם