

# לחתן תאנז'ילקי קה

לנוזר המתלמד

חנוך תש"ג

חוברת ד'

נובמבר 1942

בר-הלל

## פתרונות גראדי לשאלות הלקה

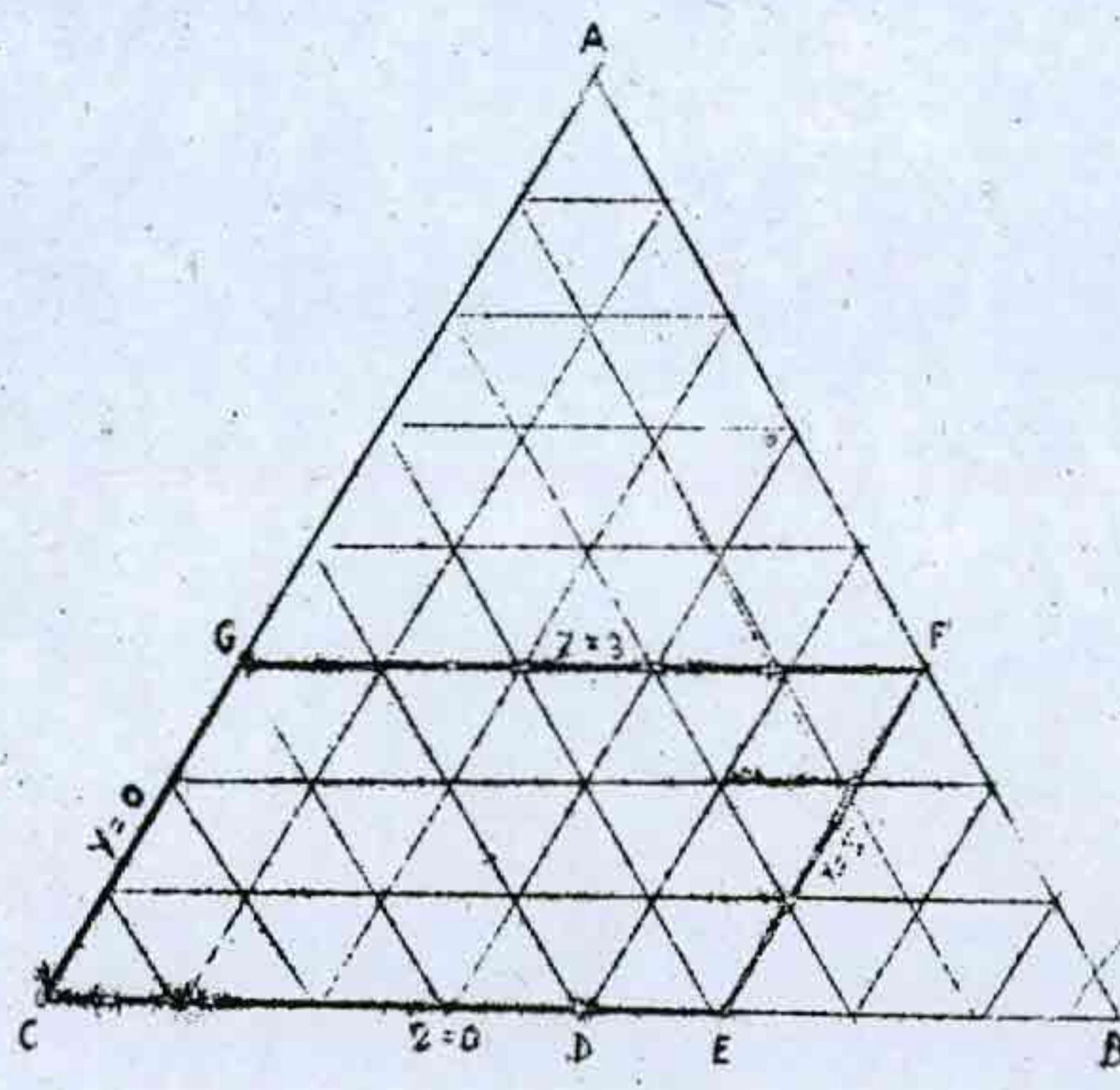
ילמדו זוג שלשה כדיט המכילים 8, 5 ו 3 ליטרים. הכל גדול מלהי בלבד. ברצין המרוזג לחלק את היין לשתי בPOSITORYות שוות בעזרת הכלים הללו בלבד. כיצד יעשה זאת?

מי יוכל לא נושא בילדותו שאלת זו ע"י חבר גדול שרוצה להראות את אכפתו? וכי לא בלה רבעי שעת בחתרת ובחתרת שאלות דומות לה? ובכל זאת טופקן גם עליה בעתקם לחפש אחריו דרך ש.ת.ת. להתרת סוג שאלות זה, שזו שאלות ביוטר על אבות-אבותינו לפני 200 שנה.

אזרחי שחלטבו אפוא למצא דרך שיטתית, נשארה לנו רק עוד שאלה "קשה" זו: מהי הדרך שבהן יוכן לבוא לעזרתכם ולהציגו לכם פוגות אל ידיכנו היתיק - ח.ת.או.ר.ה.ג.ר.ט.י.

אולם לטעג זה כמה הבנות קלות. אילו פעולות יכול המרוזג לעשות? ברור כי בידו לאשוויך אותה מטהו אלה: להדריך אחד הכלים עד תומו או למלא אחד הכלים עד תוםו; יתבונן בתוכן שבפערו מה שטרם ייריק וגם ימלא. מכיוון שהכלים מכילים מסוף עד סוף של ליטרים ובכל פערו מושיטה או גורעת מסוף ש.ל.ס. של ליטרים, מסתבר שככל כדו במא תמיד מסוף ש.ל.ס. של ליטרים, אם יש בו אקלל סתום. מטו בין בקוח שמדובר הוא בחומר זריז אשר לא יאבד בהעברות הללו אף שפה זו המשקה המשמש לבב אנוש, אך שטמד יימצא בכל הכלים ביחד 8 ליטרים.

בניהם אפוא כי בצד הגדלן ימצא אזרחי פערו מסוימת x ל', הצד הבינוני y ל', הצד הקטן z ל'. (x,y,z מטריות טבעיות; 8<x<0; 5<y<0; 5<z<0; 8=x+y+z).



המזרחי עוזר שסבב חרכחים של כל בקדמתו הימאות בפנים מושלש שות-צלעות או על שטחו מצלעותיו הוא קבוע ושותה לאחד נגבתו? אם לאו, הובייחו תקופה זו תאפשר הפניות הזרה, כי תיכף נתחמש זו. בינהו בicut שלוש שות-צלעות בעל גובה של 8 יחידות, ובזמן את קדרון ב-A,B,C. את הרחיקות של בקדמת הנמצאות בפנים המושלש או על שטחו מצלעותיו נקרא בשם "השעוזרים" שלה, וביתר יוק נקרא לרשתה מ-AB בשם "שעוזר יושן", לרשתה מ-AC בשם "שעוזר טני", ולרשתה מ-BC בשם "שעוזר שליש".

וכעת עקר החכמה: כל מצן אפרחי של שלושת הכלים יירוץ עיי, נקודת בפנים המשולש או על שפטו, המצב המקורי (x=8, y=0, z=0).

זה גודל  
וים דרך  
ה 5 מיili.  
ין שתי  
פטר להכירו  
ר-כך  
אגראיה  
חסתייה?

ינום.  
II 303;  
בכל אחד  
ב) בכל אחד  
ומספריהם  
) המספריים  
טמספריים  
) יס גם  
 במסולס  
הו

זת התסובה.  
זט במס'ICA  
רכבת  
הדבר?  
ול.מ.ק.יפר  
ביבב).

את המספר  
.מצא את

ר),  
לגדול  
 $b^2 + a^2$   
מדזוביץ)  
ולח חלסה  
ו, וחותcia  
אין זה  
ו. במקרא  
אות  
כזע.

ן למתחר,  
-אביב, 9)  
ליימודים  
בשנה

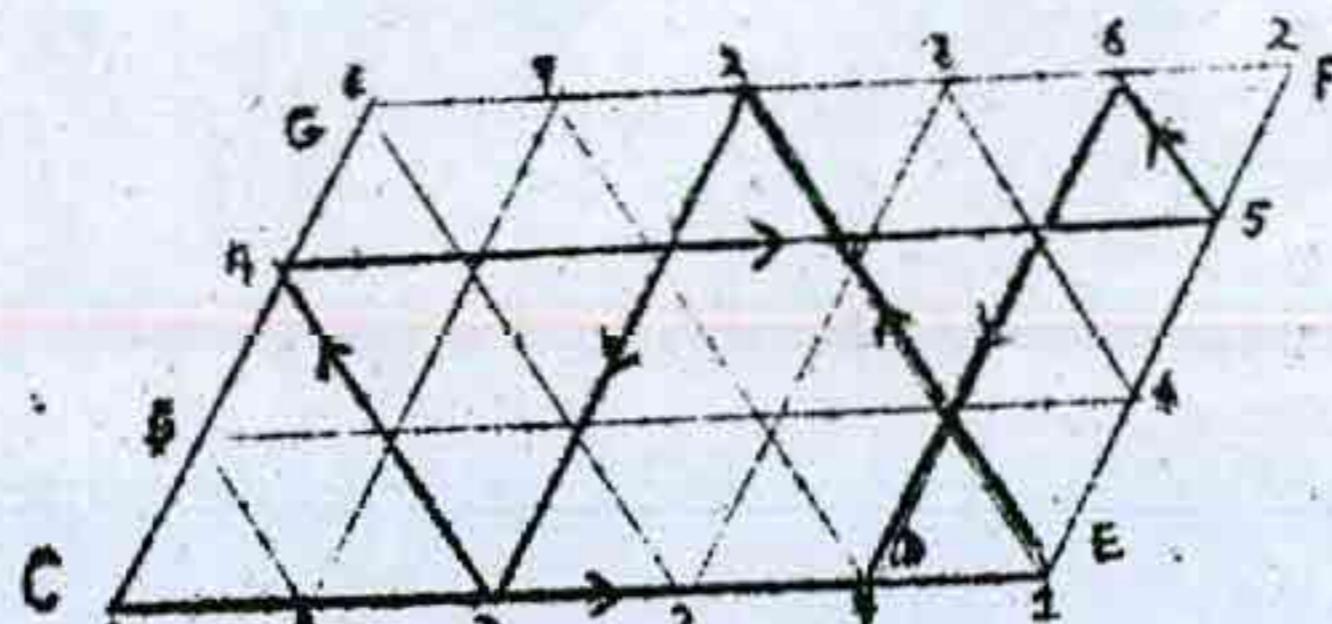
=====

ע"י הנקודה C, המקבץ ומכווקש ( $x=4, y=4, z=0$ ) ע"י הנקודה D שעוררת הרדיאן הוא 4, שערת השבי 4 ושוררת השלייש 0, ובדרך כלל המקבץ x,y,z ע"י הנקודה שעוררת הם x,y,z, ובסדר זה. (מובן שני שוררים בלבד קובעים את הנקודה, כשם שטחים של שני כדים בלבד קובעים את מזבון של הכד השלייש); ובשם שטחים הטעויות בצדדים הוא קביע מבהינה פיסיקלית, כך קבוע סכום הרחקים מבעינה הגדולה, לפי אפסוף הניל).

בהתאם לאי-הסויוגות הבוגרים מן הבוגרים, מוכחה בכל בקורסית של המרוצג משאירה את המקבץ באחד הצדדים ללא שוני, בו בזמן שהיא מביאה אחד הצדדים האמורים למצב גובל, ככל ריק לגוטרי או מלך לאנדרי. פועל זה בזאת כי גובל אפוא ע"י תביעה הביקורת המיצגת לאירן ישר מסדר עד שפטה חמקביה לאירן איזה אחת מצלעו - מה ה עד אחד ים קד י. ה. התעכבר-נה על ייצוג זה וסבירו לעצם הסבר היטב, כי כל מה שיבוא לא יהיה אלא מסקנה פשוטה מפנוי. --

נמשיך: כל נקודה (בעל שוררים שלמים, כי רק נקודות אלה מעניינות אורתגונו) על שפט המקבילות תקבל מספר בהתאם למספר הצעדים הקשן ביותר המשותה המאפשר להציגו אליה מ. ס. כדי לראות זאת יפה, נשרות לבו את המקבץ-

את המספר 0, E ו G את המספר 1, F את המספר 2, אך עוד שתי נקודות על שפט המקבילות תקבלנה אותו אortho מסטר, וכך נמשיך, עד אשר כל נקודה על שפט המקבילות תקבל את מספרה.



מתברר כי כל מצב אפשרי ניתן להשגה אחרי 7 פעולות לכל היותר, ובין המקבאים הדורשים את המספר המסתמלי של פעולות במצב דוקא המקבץ שלנו. מתברר כמו כן שישנה רק דרך אחד קאה ביותר להשגתו. הקי העבה בעל התכונה מתאר אותה. את התכונה המתכלי נוכן לסכום בטלה הבא:

ובעת בסו את כוחם בהתרת הבעה הבהא:

לטוזג שיטה כדים המכילים 10, 6, ו 5 ליתר. ככל אחד משני, הבודים הגדולים נמצאים 6 ל' יין וחקשן הוא ריק. המרוצג רוצה לחלק את ייננו כך שבאחד הצדדים יימצא 5 ל', בשני 4 ל' ובשלישי 3 ל'. האט אפשרי הדבר? האם כן, במקרה אפיכים? ואם יש אפנאים שווים, מה הדרך הקצרה ביותר?

	x	y	z
10, 6, ו 5	8	0	0
ר' 3	3	5	0
ח' 3	3	2	3
ס' 6	6	2	0
ל' 6	6	0	2
מ' 1	1	5	2
ל' 1	1	4	3
ל' 4	4	4	0

הבעה בעניהם ברצון להציגם של תלמידים אחדים להקדיש מקומם בידפים" לתוכנות המתמטיקה והפיסיקה והרינו פותחים בזאת את המדור החדש "ה' דעת?" - שאלות: תשובות בתוכנות המתמטיקה והפיסיקה.

### ה' דעת?

1. מי הם שלוש המתמטיאים הידועים הגדולים ביותר ומה מפעלם?
2. איזה מתמטיقا נקרא בשם "princeps mathematicorum" ("שר המתמטיים")?
3. באיזה ערך השטמו היהודים כתיקופת התנ"ך עברו?  
קשו, והיכן נזכר הדבר?
4. האם יש סורה ייחודה להרגל הידוע להשתמש בדרך כלל באות x כסמן לגודל?
5. באילו טליים השתמש היהודים לכתיות המתפרטים ובאיזה השפיע הדבר?
6. متى החלו להעתפס בטן סיכון עברו ה"אפס"?

התשובות - אוסף הבהא.

29 אחריו קאלסן  
על שניהם של ממדים

רָה  
ז, י,  
דְּקוּבָעִים  
לִישִׁי;  
כּוֹם

פרק ב' - שכברת חד - מרך לקורלדיות.

בפרק הקודם ראיינו כיצד פועלים בשטח כוחות דומיים לאלה המוכרים לנו יננו מנטיסירבנו בעולם בן שלשה ממדים. על פני הרים יכלנו להציג בוכנות עירונות, לטריבב טורבינות ולהשיט סירות קלות. אך אל נא בחשב כי בחוץ החומר המתפשט על עבוי פים מברושים הם וקל ערד. בהינתן להם פרחוב פערלה גדול מעין זה של פני הים, מיד יגלו כי יש ביכולתם לעשות מעשים גדולים ובلتאי מושערים. ירדי הים ירדים זה שביהם רבות, כי כאשר יראקים שמן צמחי או שמן של בעלי-חי (שימו לב - דוקא שמנית אלה ולא שמן חאדמת המשמש למכונת) על גלי הים בזמן סערה, מיד ישבו הגלים הזרוביים, וסביב הסquiaה יתחוויה שטח של מים שקטים. גם כיוון נהגים המайлים העובדים ליד רצועות הסלעים הטופוזדרות לארך החוף האוסטרלי להרגיע את המערבלות הימים עיי בח הטלאים השכבות דקות פן הדקות של שמן.

בנוסף המאה הקורדמת סכמו שבוי רבי-חולמים צרפתים את הבטיון של 30 אגירות שהשתמשו בשטן להשחתת הגלים ותגינו לתוכאות מפלצות פאדי. בתברר כי אביה הנושא בפה ידות של 20 ק"מ לשעה בזקמת לשני לייטר שטן לשעה כדי לבתות את הימטרת ברצועה שקטה שרוחבה 10 מטר. תוכאה זו בותנת אפשרות לחשב מה היה עובי השכבה הדקה של השטן, אשר הספיקה כדי לשכך את פעולת הסערה: שטח חמיין שכוסה ע"י השטן במשך שעה הורא מכפלת קדרך שעברת האגיה בזמן זהה ברכוחה, היינו  $20 \text{ ק"מ} \times 10 \text{ מ}' = 200 \text{ מ"ר}$  הידת ובכל מ"ר יש  $10^4 \text{ טמ"ר}$ , הרי שטח המים שכוסה ע"י השטן הוא  $2.10^9$ . (שני מיליון ארד) סטמ"ר. הבפ"ח של השטן הורא 2 ל', או  $2.10^3 \text{ סטמ"ק}$ . גובה השכבה יהיה אפוא  $2.10^9 \text{ סטמ"ר} / 2.10^3 \text{ סטמ"ק} = 10^6 \text{ ס"מ}$ , כלו מר אחד חלקו מיליאון של ס"מ אבן הפעולה שנעשתה ע"י השטן הייתה דו-טמדית טמ"ש של חומר אשר עביו מבוטל לאלווטין, מבחינה פיסיקלית, ביחס לארכו ולרחבו.

אוילט דוקא העובי היימבויטלי של שכבת השמן הוא שומר את רצון החוקיר  
של האמריקאי אירווינג לנגמאיר. חוקר זה שם לב לעובדה שאחד חלקו מיליוון  
של טאט הוא גודל כה קטן, עד כי הוא מתקרב כבר למדות של מולקוללה אחת.  
ואבן מדידות מדוייקות ומדויקות שבעשוי על ידו ועל ידי תלמידיו הראו כי  
העורבי של השכבות הדקות הוא עורבי של מולקוללה אחת, שכבות חזן חד-מולקול-  
ריות. אין זה אומר כמibase טפת טמן חבורפלת על פבי מים נזתבת שכבה  
חד-מולקולרית בלבד: בקערת המפרק אין טרות השמן האפור על פני המפרק חד-  
מולקולרית, עבינה מגיעה להרבה אלפיים של מולקולות, אורלים השטחים שבין טפה  
לטפה, הנראים כחיפויים משטן, מכוסים שכבה חד-מולקולרית.

הטיול בעולם של שני מינים נתן לנו אפרוא היישג מדעי חשוב ביותר, למדנו כיצד לטדר את האורך של מולקولات. אם אך גושים על שני טים שנקיינו היצב (בשיטה שתוארה בפרק הקודם) טפה בעלת בפח ידוע של שמן זית או שמן קיק ובמגדל את השטח הבתפס ע"י הטפה, בוכל לחשב על בקלה את עובי השכבה, עובי זה הוא לארכאה של מולקולה אחת של השמן. אולם אפשר עוד להגדיל ולעשות בנסיוניות פיסקליים רבים הצליחו לחשב את מספר המולקولات הבמאנות בגיןן חומר - בגרם-מולקולה של חומר במצאות  $10.10^6$  סולקولات -; המספר הוא גדול מאד אך ידוע בודאות, והוא מגיעה ל  $10^{21}$  (2150 טריליוון) מולקولات בגיןן זית. עתה, בידעבו את מסקל הטפה שבתבה את השכבה החדר-מולקולרית ואות השטח הבתפס ע"י השכבה, בוכל למצא ע"י חלוק פשוט את שטח החדר של כל סולקולה. השטח שבמקרה עבר מולקולה אחת הוא  $10^{15} \cdot 10^5$  טמ"ר, היינו 5 חלקים ביליארד של ס"מ מרובע, והקטר הוא  $10^{10} \cdot 10^8$  ס"מ או 8 חלקים מיליאון של ס"מ.

בדוח זו נחקרה שורה של חמריות המטוגלים לחת שכבות אד-מלקי -  
לריות על פני המדים ובכבעו המודים של הטולקولات. לרבות תפונת הטולקולה היא  
תפונת גלייל אסר גבאו גדול כמה וכמה פעמים מקשר בסיסו. גליילי הטולקولات  
ערמדים זה בצדו טל זה על פבי המים ומכסים אותן בשכבה צפרטה לפ' האיזור.  
(ראה צייר בעמ' 4).

וְדָה  
פָּעוֹלָה  
יִאָה אֶחָד  
רַיִב  
רְעֵת  
זְעֵד  
לְעֵר -  
זָה  
אֲשָׁרְתָה  
וְעַבְּרִיבָת  
וְתָר  
הַמְּקַבִּי -

גראבל

ה'ז

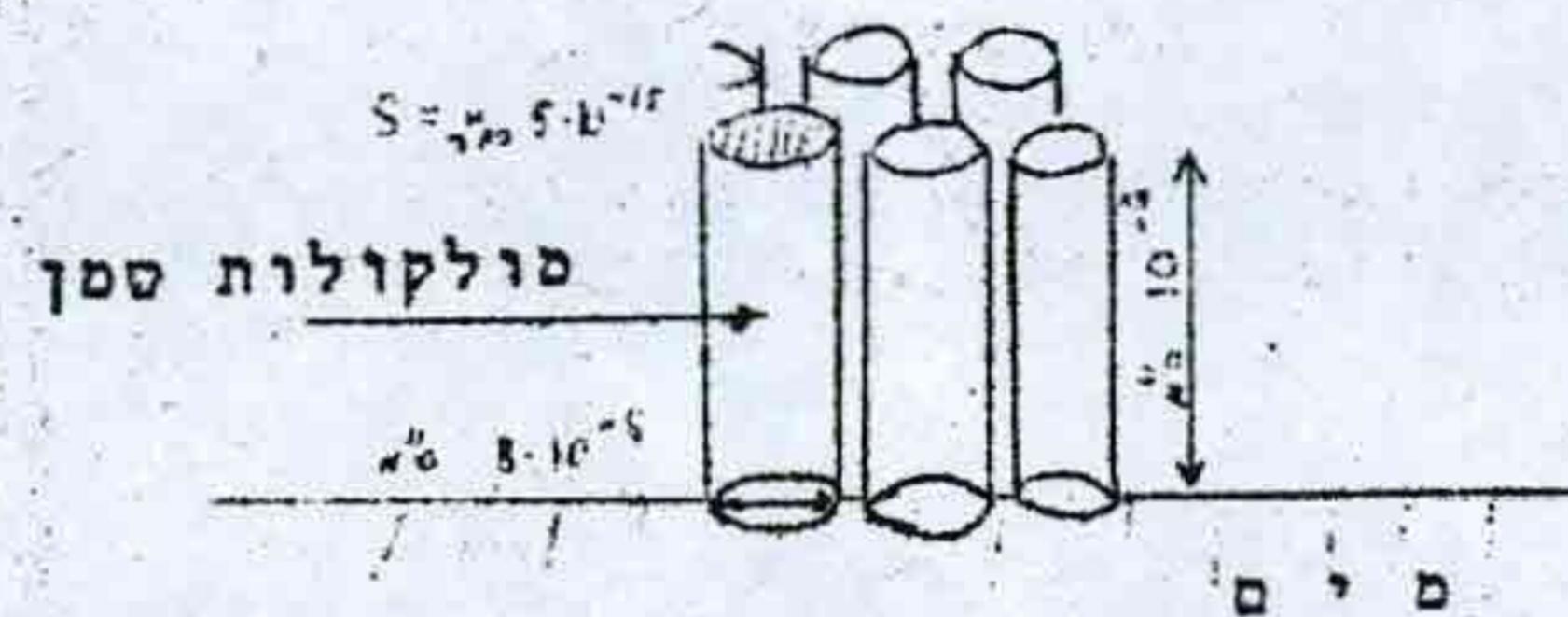
אל קאים?"

ג'ז'

המשל  
מצטיין

הנקרו  
העקב  
של ה-  
15 א-  
זה ע-  
עם כ-  
סל א-  
(15)  
XX ח-  
אורלים  
הן ט-  
אחת ט-  
שכברות  
חדר-סול-  
ולקו-  
רדיות  
ו-בוי  
הלו-  
המעז  
מכיל  
הוא  
לקוט

צורה  
(אוקו)  
(ציוו)  
ו-תור  
כללי  
בו  
התמכו-  
יש א-



בזה הסקנו את כל המסקנות מנסיונם הותיק של הספנינים, אך ערד שאלת שוכנות חד-סולקולריות ולאין שפני האדמה מתחפשים על פניהם? בחקירת הבייה הזאת ובתוצאתה בעסוק בפרק הבא.

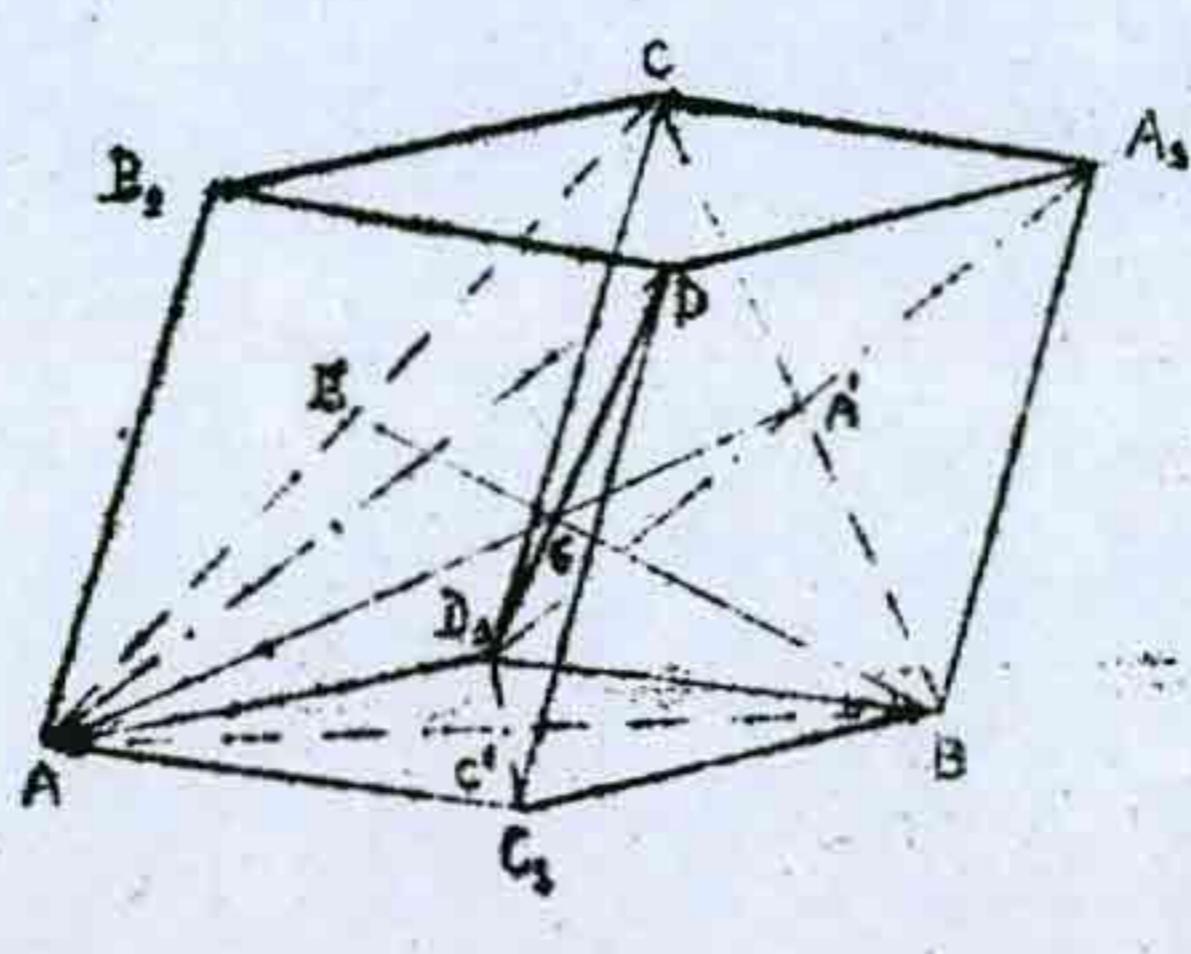
## ד"ר ג. נ. א. ז. ק. י.

### השלמה טריאומטרית למאמרי "קר-אורילר ומעגל-תשע-הנקודות".

קשר עם המשפט "הריזולטנטה של שלשה כחות שוים MA, MB, MC הוא הגבאים D", הידוע בספרת המתמטית כ"משפט-סילוסטר", ואשר הוכיחו בדרכו בבעיה 47 של חוברת ג', אUID את העזרות הבאות, מהוות בין המשך למאמרי עלי-קו-אורילר ומעגל-תשע-הנקודות" שהופיע בחרוברת ג', והמטענים גם מחתם קשורן לטראומטריה.

(ג) אחרי שנשלמים את הציר השני בעמ', 6 של חוברת ג', ע"י קשר הרקוודה M עם N, C, B, A, תבלט לפניו עיבנו הטל של קויביה ANBMLDKC בפרש את MA, MB, MC בכוחות שוים, יהיה MN הכה השקול ל MA ול MB, ו- MD יהיה הכה השקול ל MC ול MG, מה שפוכיה את המשפט.

(ב) אם הכוחות לא ייחיו דזק או שווים, יבדך הקשר עם המעגלים ועם קו-אורילר; מתבלה אז צייר 1, המראה הטל כללי של קויביה (או תיבח או מקבילו) כחות A, D, C, D, B, D, G, היא D, G, נזכיר נמצאת על D, G (המשך הקטע D, G) – G הוא סרכז הכבד של המשלט ABC – מעבר ל G) ו-  $2D, G = GD$ .



לשם הוכחו העברנו מקבילים ל  $D, A$  דרך B ו- C, ל  $D, B$  דרך A ו- C, ל  $D, C$  דרך A ו- B. את נקודת-הח嗣ה המתקבלות טפנו ב  $C, B, A$ , בהתאם דרכו, A העברנו מקביל ל  $AD$ , ודרך B, מקביל ל  $BD$ . את נקודת-הח嗣ה טפנו ב D. הוכחה – כמו ב (א) – ש  $D, D$  הכה הכה השקול לשיטת הכוחות הבלתי-בנויים. אם בטנו שוב – כמו בסאמר – אז אמצע  $BC$  ב 'A' וכו', יהיה  $\frac{1}{2}2D, A = DA$ , ומכיון ש  $D, A$  מקביל ל  $AD$  וחותף עלייו, נקבל ש  $DA$  מקביל ל  $AD$  ושווה לחציו. הקפול המעביר את

מתמטיקאי יהודי מפורסם שח' במאה ה-19 באנגליה ובארצות הברית.

המשולש ABC למושלט  $A'B'C'$ , שהוא - כמו שהררנו במאמר - נפוץ ב 2/3 לגביו G, מציין אמור את D, ל D, מה שפטים את הטענה.

(ג) בשיטת המקבילות משפטת גם הטענה הבאה לפניו על מעגל-טעא - הנזקנות, היכולת להקרוה הוכחת-טגן-דוד. נצייר רביעית-צמתים ABCD, את העוקבים P, Q, R ואות ששת האמצעים של הקטעים הבוגרים עיי' הרביעיה.

15 אקטריים המקיימים את כל האמצעים זה עם זה מהווים משssa  $Z'X'Y'Y'Z$  (ציור 2)

עם כל אלכסוניו בעל שלשה זוויות עם אלגורות בגדיות מקבילות וחותפות.

$Z'X'Y'Y'Z$  הוא קטע-אמצעים במושלט ABC, ADC, וכו').

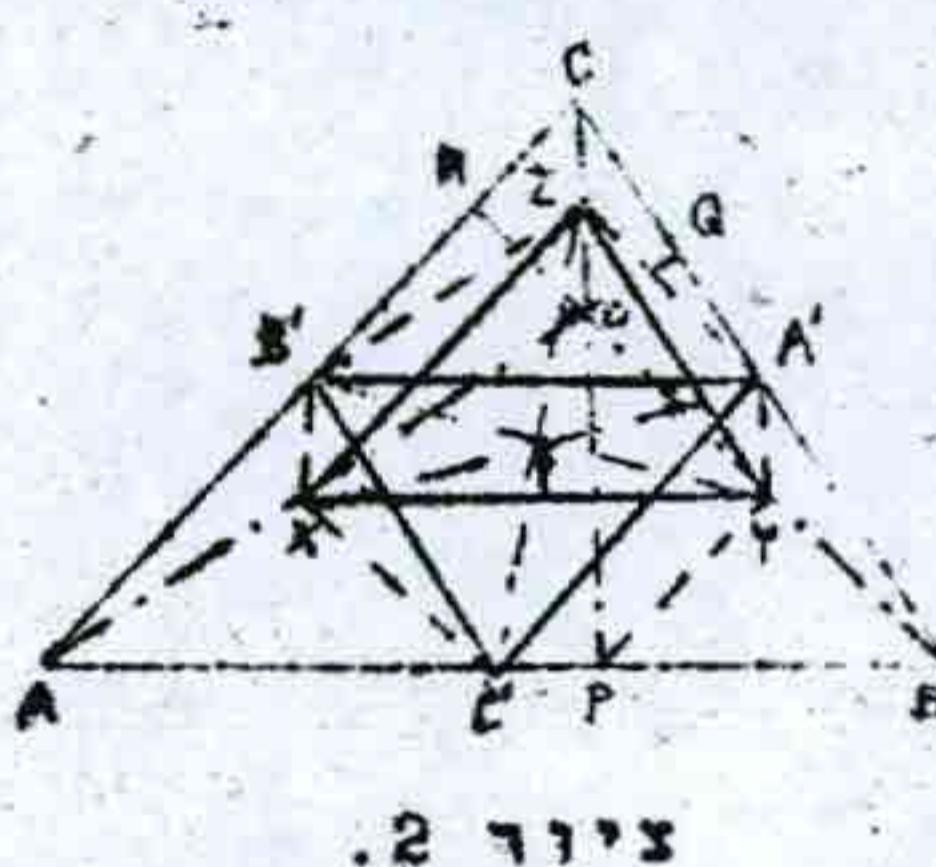
אולם מקבילות הנוצרות על ידיהן חן טלבנייט. ( $Z'A'C$  ח'יא ישחה, כי

שוקיה מקבילות ל AC ול BD בהתאם וכו'). אלכסונים של כל המלבנים

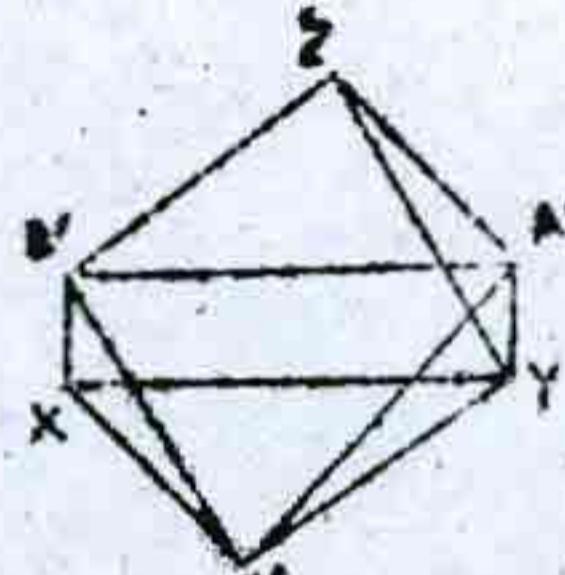
חלנו חותפות ובחזאים ב F, מרכז המעגל המתיקף את המשטה. מעגל זה מכיל את P, Q, R לטמי משפט תלס,

הוא משפט על הזווית ההיקפית מעיל לקוטר.

سؤالה  
עליה ח'



ציור 2.



ציור 3.

אך בציור זה אפשר לראות צורה פרהבית: תם ג'וֹן (אוקטדר), המזכיר גם לחוד (ציור 3). כאן קיבל ציור כללי יותר (ציור 4), אם נצא מריבועה הכללית (לא של צמתים). אפשר לראות בו א' ר' ב' ע' ג'וֹן (טטרדר) ABCD שבתוכו תמניוון-האמצעים  $Z'X'Y'Y'Z$ .

התמניוון מתקיים מן הארבעון עיי' קטייה בכל פינה, (אייזה חלק מנגנון הארבעון יש אמור לתמניוון? מה הייתה התשובה לשאלת המתאימה במישור?) הארבעון מצד

הוּא

צורת-

נדראה

למאמרי

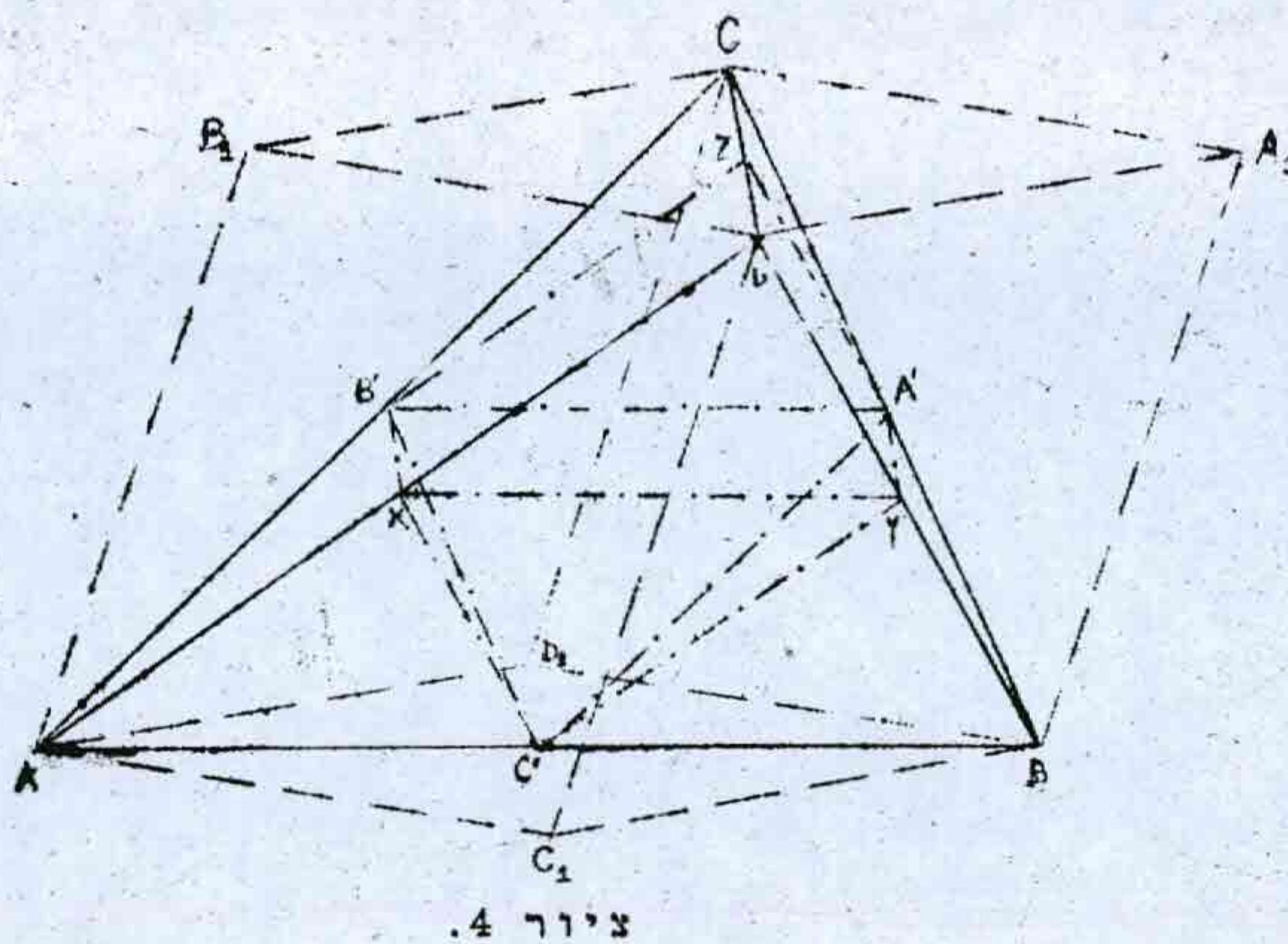
זחמן

ד'

א'MD

ו'

קו -  
ביבילון  
שלשה



ציור 4.

מתקיים מן המקבילון  $B, A, C, D, A, B, C, D, B, A, C, D, A, B$  עיי' קטייה הארבעה הפכיות  $A, B, C, D, A, B, C, D, B, A, C, D, A, B$  (באותו האופן יתקיים הארבעון השני, שקדדיו נזכרו ב (ב)).

לזאת הטענה: דפים נחתמו רקטיקה

≠ ליד' י. בר-הלל

רחוב אוטישין 50

ירושלים

ה ב ב ר

מצינימם בנסיבות השתפותם העריך של רביהם פקוריאי העתון בהתרת רג' הביעות. החלטנו לחותם יפ' עוד פרט שלישי. שני הפרסים הראשונים נקבעו לכיתות ולא לתלמידים. בודדים, כי המספר הרב של תלמידי הכתות הללו שהשתתפו בהצלה העיד על רמה גבוהה של הידיעות בתמטיקה בכתחה כולה.

ר א ל ה ה ז ר כ י מ :

פְּרָסֶ דָּאשְׂרוֹן - כתה ו' (כעת ז') בגמנסיה "בלפור", תל-אביב.  
פְּרָסֶ שְׁבִי - כתה ו' (כעת ז') בגמנסיה "מודריה", תל-אביב.  
פְּרָסֶ שְׁלִישִׁי - א. קימרובסקי, תלמיד כתה ז' (כעת ח') בבי"ת התיכון לפסחן, תל-אביב.

ד א נ ה

שמורת התלמידים שהגישו לנו פתרונות לביעות שחזגו בחוברת השלישית, לפי מוסדותיהם (ולפי הכתות שבחן היו בשנת-אלמודים הקודמת):

ירושלים.  
תל-אביב.  
הgamensia "בלפור": רחל פרוכוס, ז'. מ. פסלר, ח'.  
בית הספר התיכון: י. אליאסוב, ר'. ע. ינובסקי, ג'.  
גמנסיה "בלפור": ע. גולדשלק, ו'. ע. דה-שליט, ו'. א. מולצקי,  
ד'. ס. סלינוביץ, ו'. רבקה קפלן, ח'.  
גמנסיה "מודריה": א. בכרך, ו'. ב. גיליא, ז'. ה. זנגר, ו'.  
י. לנדרי, ז'.  
גמנסיה "הרצליה": ס. בנעט, ו'. ג. קותיאל, ו'.  
בי"ת התיכון לפסחן: א. קימרובסקי, ז'. א. פזובסקי, ז'.  
גמנסיה "שלוחה": ט. קלינין, ז'.  
גמנסיה "בן-יהודה": ש. קובלר, ז'.  
בי"ת "טונטהירדי": ט. חליוו, ו'.  
ח' פ.ה. בי"ת הריאלי: ר. שרמן, ח'.  
גבעת-ברן. בי"ת המחויז: ח. טרניצין, ו'.

לט

הפעט לא מכנו את ההורחות לביעות 42, 43, 42, 54, 55 שחצגו בחוברת הקודמת, מאמת אריכותן המינוחית והסתפקנו במתן התשובות בלבד. התלמידים הטורבניים בהורחות הפלאות יתקשו עם הפטוררים אשר בודאי יענו להם בראין. כמו-כן לא תבאונו הפעט את התשובות לתרגילים שניתנו במאמרם, כי בצוועם לא דרש כל מסמץ גrosso לעצם הכתת המתאמרים.

...

### פתור ברות ל"יבערת"

(40) מצא מספר בן ארבע ספרות שבו רבוע שלם, אם נתנו שתי ספרותיו הראשונות שניות ביביהן וכן גם שתי ספרותיו האחרזניות. לפ' הלו... למספר הדורות הצורה  $aabb$ . לפ' כלל-התallenיות ידוע מתחלק כל מספר כזה ב 11, ובאחדות-החלוקה ב 11 נקבל  $\frac{aabb}{11} = abba$ , אשר גם הוא מחלק ב 11, כי כל רבע שלם מביל כל גורם ראשוני מספר זוגי, של שיטים.  $\frac{abba}{11} = aabb$ . מכאן יראו ש  $11 \times 11 = 121$  (הצד המבריע!).  $\frac{121}{11} = 11$  הוא רבע שלם. טבין 64. לכן:  $11^2 = 121$ .  $121 \times 11 = 1331$ .

פתרונות: בכרך, בנעט, גולדשלק, דה-שליט (חולנית), חליוו, זנגר, ינובסקי,  
יקוטיאל, קימרובסקי (פסובך), לנדרי (פסובך) מולצקי, מליגוביץ, פזובסקי,  
פסלר, קלינין, קובלר, שרמן.

(41) הוכח כי  $a > a'$ , כאשר  $a$  ו- $a'$  הם מספרים טבעיות הגדולים מ-1, ואשר לטענת אחד מהטgal מ-2 (נסוח מזוקן).

לפי יקימובסקי בדרך האנדיוקציה חלמה הבפולה:

(א) אנדוקציה לפי  $a$ : נניח כי  $a > a'$ , אז אם נחבר אל אי-שווון זה את אי-השוון  $a > a'$ , הקאים לפי תבאי השאלת, נקבל  $a(n+1) > a'$ .

(ב) אנדוקציה לפי  $a$ : נניח כי  $a > a'$ , אז אם נחבר אל אי-שווון זה את אי-השוון  $b > b'$ , הקאים לפי תבאי השאלת, נקבל  $(a+n) > (b+n)$ . אולם  $a+n > b+n$ , כי אף ימין מרכיב סנג' האיברים הראשוניים של הפטוח הבינומייאלי של אגף שמאל, על כן יצא מהנחהנו כי  $a(n+1) > b(n+1)$ . כעת קיים  $2^3 > 2^3$  וגם  $3.2^3 > 3^3$ , מה שמשלים את החוכחה.

פתרו: גולדשלק, דה-סליט, יקימובסקי, טולצ'ק, מלינוביץ, מקובקי, פטלר, סטרנין, קלין, רבקה קפלן (חלוקת) ביב.

נוו' בהתרת  
וראשונים  
תלמידי  
סל.

לפורה,  
ל-אביב.  
זריה,  
ל-אביב.  
(כעת ח')  
ביב.

וברת  
גלאודים

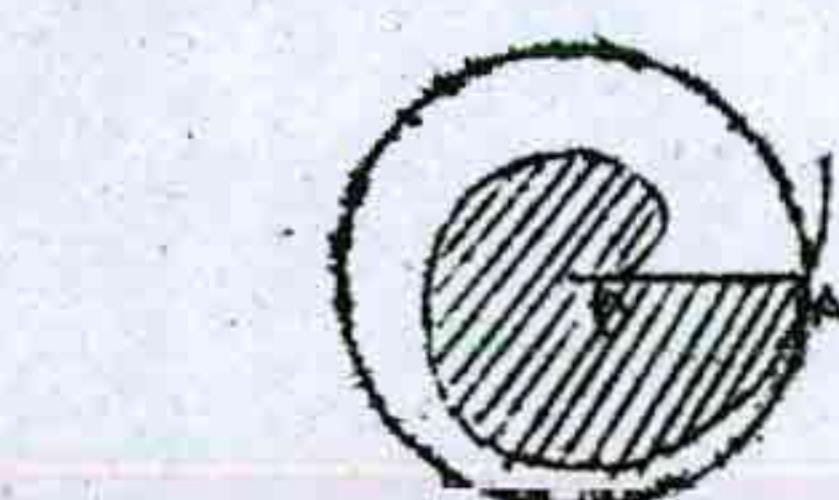
מולצ'ק,

ד'.

ד'.

ד'.

בחוברת  
ידים  
בראון.  
נועם



ג. הוכח כי השטח המוקוּן שווה לשטח השטח המגען שהרדויום שלו  $\overline{AO}=x$ .

ב. لما שווה השטח הנוסף בסבובו השני?

ג. لما שווה השטח הנוסף בסבובו השלישי  $(k+1)$ ?  
(חלק את המגען לא גזרות חופשות; העזר בפתרון לבעה 8).

(ב) השטח הנוסף בסבובו השני הוא  $\frac{7}{3}\pi r^2$ .

(ג) השטח הנוסף בסבובו השלישי הוא  $\frac{3k^2+3k+1}{3}\pi r^2$ .

פתרו: דה-סליט, יקוטיאל.

(44) הוכח את הטענות  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}$

לפי שרט: בזאת מן הטענות הידועה:  $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$  סכום השטור הנתון כפול ב  $\frac{1}{2}x \sin$  ובצד ימין יתבטלו כל האיברים פרט לשני, במקוּט  $a$  נציג  $kx$ , במקום  $b = -x^2/2$ , וכן:

$$\sin kx \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} [\cos(k+\frac{1}{2})x - \cos(k-\frac{1}{2})x]$$

אם נחבר מהזיהויות כאליה בשביל  $k=1, \dots, n$ , נקבל באגף שמאל את סכום השטור הנתון כפול ב  $\frac{1}{2}x \sin$  ובצד ימין יתבטלו כל האיברים פרט לשני, וללעוגי-הארזון. החלוק ב  $\frac{1}{2}x \sin$  יתן לנו את הנוסחה המבוקשת. שרט מעיר שגם בעזרת אנדוקציה שלטה וגם בעזרת נוסחת מואבר אפשר להוכיח למתירה.

פתרו: יקימובסקי, מקובקי, סטרנין, קלין, שרט.

(45) מצא את משוואת הישר המשיק לאלייפסה  $x^2 + y^2 + a^2 = 0$  בربיעי הראשון באותן שטח המשיק צבוי של ידו ועדי הциירים יהה מינימלי.

לפי קלין: יהיו  $x, y$  השעויים של נקודת-הפגע, אז

$x^2 + y^2 + a^2 = 0$  תהיה משוואת המשיק, ושוברי נקודות-חתוכבו עם הציריהם יהיו  $y = b/x$  ו- $0 = 0/b$ . שטח המטולש יהיה  $y = -x^2/a^2$ . כדי שבטי זה יהיה מינימלי, יצטרך סכמו להיוות מכסיטלי, וכן גם רבייע מואית, בלוור  $y = -x^2/a^2$  השווה ל  $(-x^2/a^2)^2 - b^2/a^2$ . את הפונקציה הזאת גוזרים ומשווים ל-0, בנהוג, ומתקבלים כטעורי נקודות-המכסימים שלה:  $(a/\sqrt{2}; 0)$ . משוואת המשיק תהיה אפוא:  $y = ab/\sqrt{2}x$ .

פתרו: נבעט (פסובך), יקימובסקי, מקובקי (חלוקת), סטרנין, קלין, שרט.

ספירותיו  
ע מתחלק  
תחלק  
. מבין  
ו, וזה  
קובסקי,  
מקובקי,

(46) במשורר בתבנית שלשה יטורים נחותכים וננקודה מחוצה להם. הוכח כי המגען העורבר דרך שלוש עקבי האנכיות המורדרים מנוקודה זו על הישרים חותך את הישרים במשולש נקודות אחריות, באופן שהאנכים בנקודות הללו על הישרים המתאימים. נחותכים שוב בנקודה אחת.

המק-מכאן הוכחה חדשה לטענה (שאגדה במאפסד הדאסון של חוברת ב', על "קז-או-ילר...") שמעגל-תשע-הנקודות העובי דרך נקודות האמצע של צלעות המושולש מכיל גם את עקי הגבהים שלו.

לפי גולדשלק: יהיו x,y,z היסרים הנתונים, N הנקודה הנדרשת בחרדנו C,B,A,F,E,D,S מוקודה הנתונים, O מרכז המעגל העובר דרך D, F,G,S שלם העקי האנכיים המורדים ממנה עליהם, BE מרכז המעגל העובר דרך F, E,D,G,S הנקודות האחרות שבוחן בחוץ המעגל עיי' היסרים.

(א) נסמן ב M את נקודת חתוך האנכיים על x ב D ועל y ב E. בוכיה כי O היא אמצע MN: האנכיים האמצעיים של המיתרים AD, BE, MN בחתכים ב O, אורלים הם גם קווי-אמצעיים בטרפזים ADMN, BEMN וחווצים את MN. האנץ על z ב F חותך את NO ב P, כך שטකיות:  $\overline{OP} \cong \overline{NO}$ . P מטלכדת אפוא עם M.

(ב) יהא M המרכז המקיף של המושולש ABC, F המרכז המקיף של מושולש האמצעיים C'B'A. תהא D הנקודה הסימטרית ל M לגבי F - מכאן ש D היא הצומתון -, אז עקי האנכיים המורדים ממנה על צלעות-המושולש - שתחם עקיי-הגבהים במושולש - נמצאים על המעגל F (לפי א).

פתרו: גולדשלק, זינגר, מולץ'ק, קלין (פרק א'), סרמן.

(47) הוכח כי קטע-אוילר MD מתקטר את M, מרכז המעגל המקיף יאת MC, MB, MA. צומת הגבהים של המושולש ABC הוא הרזולטבטה של שלשה כחות שוים MC, MB, MA. הפטרון במאפרו של דיר מוצקין בחוברת זו.

פתרו: גולדשלק, גילאי, דה-סליט, זינגר (מסרבך), יקיפובסקי, לבדי, מלינובייך, משדר, קלין, סרמן.

(48) הקפ' במעגל נתון מרובע שצלעותיו תחפפה על ארבעה קטעים נתוניים את הבעה הבנו מעמידים מחדש, מכירן שבגזרה נפלת שوطה מצערת.

(49) על מבורה חשמלית כתוב: V, 220, W 40. מה פרוש הכתובת חזאת? מה גודל התנגדויות של המבורה? כדי לבדוק את התוצאה בדרך הנסיוון, מזריטים דרך המבורה זרם שמקורו אקיומולטור בן V, 4, ומזריטים שעצת הזרם שווה 5 מיליאמפר. איזה ערך להנגדות לפי הנסיוון הזה? מניין בא הסתירה בין שתי התוצאות?

**בע**  
[ פירוש הכתובת הוא: לטבורה הספק של 40 גט ויש להסתמך להדלקתה בזרם בעל טח 220 ווולט. התנגדותה היא 1210 אוותם ( $220^2 / 40 = 1210$ ). לפי הנסיוון ניתן שתנגדותה 800 אוותם ( $4 / 0.005 = 800$ ). היסטיריה" בין התוצאות נובעת מן העובדה שההתנגדות של המבורה, ועל כן גם הספקה, עולה עם הטפרטורתה; וזאת של 220 ווולט מעלה את הטפרטורתה של המבורה הרבה. יותר מסטר זרם בן 4 ווולט. פתרו: אליאסוב (חלוקת), גולדשלק, ינובסקי (חלוקת), קלין, סרמן.]

(50) בתווים 2 כדורית, הטוים. בגודלם ובמסקלט. אחד מהם חלול. איך אפשר להכירו? (לפי בגעט):

בנוגדים לשני הבדורים לרדת בסיסו מופיע. הכדור החלול ינוגר, כי המסה שלו טרוכות בדרכו וועל כן יהיה לו כח התמדת גדול יותר.

פתרו: בגעט, סרמן (האחרים נתנו עאות ולא שותם עשות מעש יונת!).

(51) מותחים קפיץ פלדה דק ומחזקיים אותו במצב מתוח בעדרת חות. אחר-כך זורקים את הקפיץ המתוח לתוך חומרה שחרמת אותו. כך מכוסלת האברגיה הפוטנציאלית של הקפיץ ברגע לחק שטור האברגיה. איך תסביר את התיריה?

המסת קפיץ המתה תלואה ביצירת חום נוסף שיחא שקל ברגע האברגיה הפוטנציאלית שהוכנסה במתיחה הקפיץ.

(52) חיש על פני כדור הארץ שני בני אדם שמטפר שערכיהם שווה? בכך את התשובה.

כן, מכירון סטטוטר בני-האדם על כדור-הארץ הוא כשמי מיליארד, ומסטר השערות המכטיל טל בן-אדם כ 200.000. אם ברצה להתאים שתי קבוצות בעליות מסטר איברים שווה המזאה את כל האיברים של הקבוצה האגדולה, יימצא לפחות איבר אחד של הקבוצה הקטנה, אשר לו יותאם לפחות שני איברים מトーוק הקבוצה האגדולה.

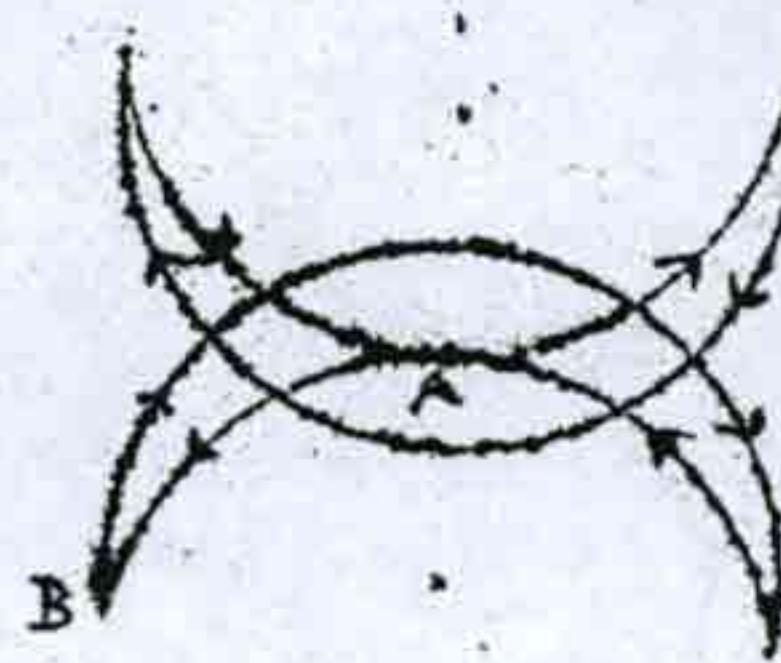
ב', על  
עotta

פתרונות: אליאסוב, בכרך, בנעט, גולדשלק, גילאי, דה-שליט, הלווי, זנגר,  
ינובסקי, יקיטובסקי, לנדרו, מולצ'זקי, מלינוביץ, מרכוס,

משלר, סטרנין, קלין, קנלר, רבקה קפלן.

C,B,A,  
F שלט

(53) מספרים על הנביה המושלימי מהמד, שהייתה מסדרת במשיכתה אחת  
בחולו של פגירנו את חתימתו, שהיתה פורכנת משני חרמשי הירח (ר' ציור  
מסמאל). האפשרי הדבר?



(שתי הביעות האחראוניות נמצאות בספרו של  
מ. קיפר "יצא וחשבו" סייצו לאור בהזאת  
"דביד בתל-אביב").

כן. למשל: מתחילה ב A, עוברים ל B  
ובכוון החץ עד A, עוברים ל C ובערך כוון החץ עד  
A. (בחזדמנויות אחרת بدون על בעיות כאלה באופן  
כללי).

פתרונות ומקורות: גולדשלק, דה-שליט, מקובקי,  
קלין, שרטם.

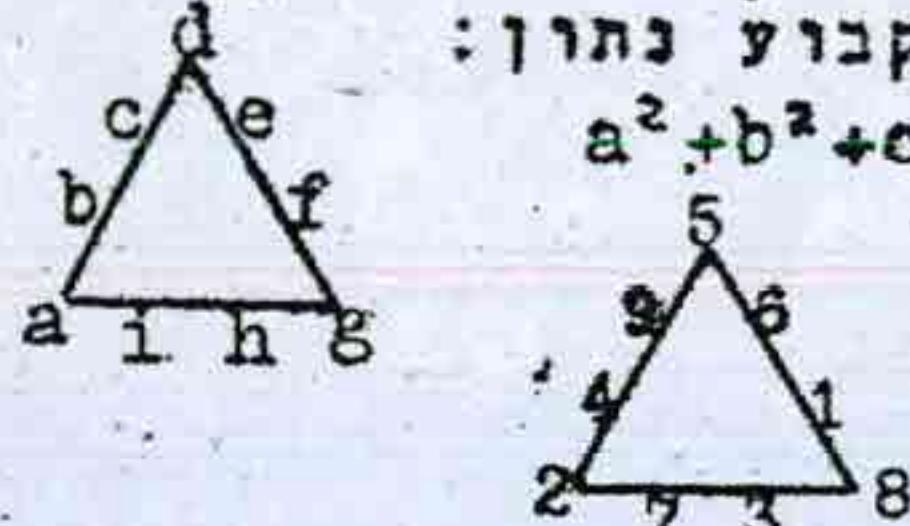
(54) במקומם להדפים את מכפלת החזקות  $a^5c^6$ , הדמיים שועל הדmons בטעות  
את המספר abc (מספר ולא מכפלה) ובכל זאת לא שבת פ"י לכך את ערך הבטווי.  
שזה את המספר והראה שהוא יחיד. (בתנאי ש a,b,c שונים זה מזה).

D, MB  
MC, MB

המספר הוא 2592 הטלה  $l^{2.9^5}$ .

פתרונות: יקובסקי (חלוקת), יקיטובסקי, מקובקי.

(55) סדר את הספרות 1,2,3,...,9 טכיב מסוילט (לפי הצורה), באופן  
סכום רבוני המספרים סלאורך כל צלע ישוה לגודל קבוע נתון:



$$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 = 126$$

מראה אחד הסדרורים האפשריים הוא:

פתרונות: בנעט, יקיטובסקי, מקובקי, משלר.

לנדרוי,  
נתרניים.

הזאת?  
רימיט  
5  
1. שטי

## בעיות

למאתינים בהתרת הביעות שתוצגהה באוסף החוברות שתוטענה במשך סנת  
למודים זו יינתנו פ. רס י.ס גם הפעם.

ה פ. רס ה. ר א. ש. ו. נ. : "פבו למתמטיקת" פאט פרופ', א.ה. פרנקל.

התרוגבות לביעות צרכיים להגיון למערכת לא יוארן פן ה-15  
בדצבר. ציינו בתשובותיכם את המספר הסדוורי של הביעות.  
המטרננות ע"י א. מבוססות על חזמר הבלתי בכתות ה'נו' בלבד, ועל-  
כן אגנתן לתלמידי הכתות הללו זכורת-בכורה בפרשנות תשובותיהם.  
תשובה לא הרוחות בערך - לא תרבהנה בחשברן.

בזרם  
נסירון  
עת פון  
; וזרם  
4 רולט.

זרם.  
אייך

פ'.  
57. הוכחה כי אם נחסר מספר בעל שלוש ספרות אשר ספרת מאותיו גדוילה מספרת  
יחידותינו לפחות ב-2 את המספר בעל סדר ספרות הפו' ובודוק אם להבדל את  
המספר בעל אותן הספרות הכתובות בטדר הפו', נקבל תמיד 1089.  
למשל:  $297+792=1089$        $673-376=297$

\*58. הוכחה כי  $2\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ , כאשר a ו b הם מספרים טבעיים.

\*59. הוכחה כי  $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2} \frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$ .

\*60. הוכחה כי  $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2} \frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$ .  $A+B+C=180^\circ$ .

\*61. הוכחה כי אפשר לתאר בכל מסגר שברי קאילי אחד ויחיד בסכום של חזקות שוכנות  
של 2.

אות  
אות  
ר. 2.

62. מהו סכום הדוויות במאומש כוכבי?

63. א. במעגל נתובים שני זוגות של מיתרים מקבילים. מצא את מרכזו בעזרת  
סרגל בלבד.

ב. באחד משני מעגלים נחתכים כתון מיתר. מצא את מרכזיהם בעזרת סרגל בלבד  
בבמה.

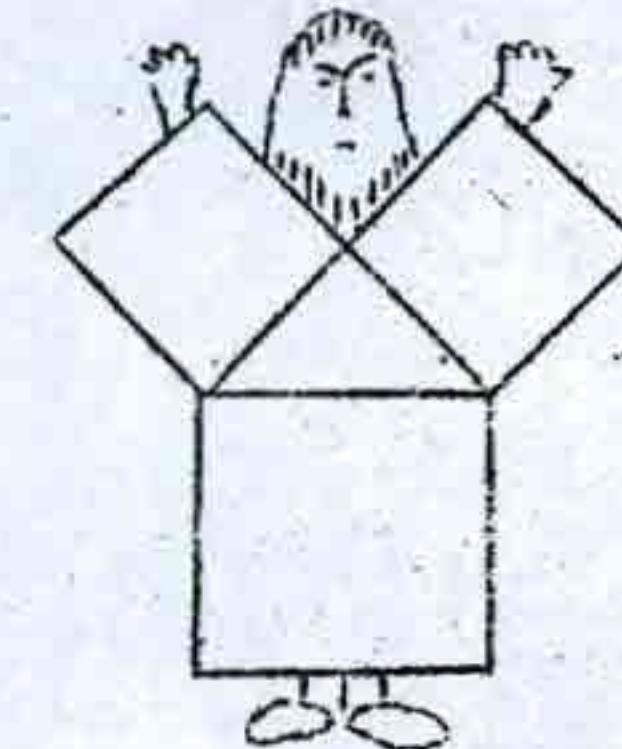
ר. 3. 64. הקב' במעגל כתון שרוף אשר מסנו בטורניט סכום בסיסיו וגביו.

ר. 65. בנה רבוע באופן ש 4 צלעותיו תעבירנה דרך 4 נקודות כתובות שאך 3 סהן  
אין על ישר אחד.

66. בנה מרובע לפ. 4 הצלעות באופן שיהא מעגל המקיים אותו.

# ש.יחות חולין מתמטית

67. העצה (לא לפ. שלום-עליכם): "טפע-נא גמנסיסטי", פנה אל מיזדענו, רואבן "המציא", דודו, בעל חנות-מכבלת, "ידוע לך שאיש תמים וישראל אנווי, ומעודדי הקפדי על כך שמאזני - מאזני-אדק יהיו. והבה בתקללו מאזני-חוקרה שלי, ובאשר אשים את הסוחרה על הכוח הימנאי ואת אבנני-המסקל על השמאלית, יצא משקל-הסחרה אחר אשר בהחליפי את הסדר. עוזה-נא, מה עלי, לעשות?" "פסוט מאד", ענה לו התכשיט אחורי רגע קל, "תחלת תשים את הסוחרה על הכוח הימנאי ותרשו את משקלה, אחר שתימנה על הכוח השמאלית ותרשו את משקלה ביטוף תקו את המזוץ, בלומר תחבר את המשקלות שקבלת ותחלק נ' 2". "שפטיך יישק", קרא החנווי, ולאות הכרת-תודה תחब לידיו של רואבן לוח-שוקולד גדול.



לאחר חדש החליט רואבן ששוב הגיע הזמן לבקר את דודן. הוא פלה לקובת הטלישית, צלצל, הדלת נפתחת - ומעצמתה של סטירה אדירה נפל במעט מכל המדרגות. "יגזין, מה זה עוללת לי! את פרנסתי קפחת ולבית-הטהר תבייבני! אטמול היין פקיד המחלקה המטפלת לאשפכה בחנותי ובקרו את חבובותי, והבז בתברר להם כי מ 200 ק"ג סוכר קיבלתי נמכרו 180 ק"ג ונשארו בשק - או' לאוthonה ארפה! - 24 ק"ג. בעוד 10 ימים עלי להופיע לפני בית-המשפט העירוני לספרות ולמסור את הדין על ארבעת הקילוגרמים המיותרים. אין זאת כי עצמן הארורה אביהתי לכך בזקנתך".

ראבן, יותר ממה שנדרה ע"י הסטירה, נדהם ממה ששמעו אוניו. הרץ נת עצתו נתן בתם-לבבו מי יעזר לו להציג את דודו מכנס ואוות מפת-נפש?

68. מה לדב ולמתמטיקה? ציד יצא מהלו יילך 4 ק"מ דרומה. שם נתגלה לו דב והוא ידעacha אחריו 3 ק"מ למוזחה, ירה בו, פשט את עורו וחזר אל אהלו מרחק של 4 ק"מ. מה - צבע הדב?

69. שלשה שהטעלו. שלשת התלמידים העצלים ביותר בכתה נדברו ביום הראשון של סנת-התלמידים החדשה להטעלו לפि שיטה כדי שתמורלה לא ירגיש בכך. העצל ביותר החליט לא להכין את שעוריו כל יום טליishi, השני כל يوم חמישי, והשלישי כל יום שישי. ואולם קרה שלשתם באו יום אחד בלי שיעוריהם ומזימתם בתגלתה. אחרי כמה ימי הלסוד קרת הדבר?

70. זהה את הספורות בחלוקת הבא:  

$$\begin{array}{r} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \\ \underline{\text{x}} \text{a} \text{x} \\ \text{x} \text{x} \\ \underline{\text{x}} \text{x} \\ \text{x} \text{x} \\ \underline{\text{x}} \text{a} \text{x} \\ \text{x} \text{x} \\ \underline{\text{x}} \text{x} \\ \text{x} \end{array} = \text{x} \text{a} = \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x} \text{x}$$
  
 במקומות כל 6 סימן אותו ספרה,  
 במקומות כל x ספרה שלשה,  
 טונה מזו שהושטה במקומות a.

71. הילאה פונטית (הווצה לגו ע"י ציר. מזקין).

$$\begin{array}{r} \text{הווצה} - \text{בקול רטן} - \text{כ}' \\ \text{xx} \\ \underline{\text{xa}} \\ \text{xx} \\ \underline{\text{xx}} \\ \text{--} \end{array} \quad \begin{aligned} & (1+f)^2 - (1-f)^2 \\ & +(f+s)^2 - (f-s)^2 \\ & +(1+s)^2 - (1-s)^2 \\ & = 4000 \end{aligned}$$

## ד.אר. המערכת

(א) בתקבלו במערכת עבדות מאת ג. גולדריבג על "הבדלים ח-יים של טורי החזיות ה-ח-יות של המספרים הטבעיים", מאת ג. יקוטיאלי על "פירמידה של מספרים", מאת א. יקימובסקי על "בוסחה לבדיקת הסימטריות של הגראפים של פובקיות", מאת רואבן כהן (תלמיד "הרצליה" לשעבר, כתע בעב) על "תרכז המעגל בדיק רצוי", מאת רחל מרכוס על "תשיטה הביבארית" מאת מ. קלין על "בנייה המצליח בועל 17 צלעות" ו"סמי התחלקות וסדריות".

(ב) תודרכו בתובה לתלמידים א. יקימובסקי, א. מקורקין, רחל מרכוס, מ. משלר ור. שרט אשר הגיעו לנו בעיות; היפות וhunginot שבחן יואגו בחורבות הבאות.