דפים למתמטיקה אלементרית

לנוער המתלמד

בעריכת י. בר-הלל וי. נויסן

ינואר 1943 חוברת ה' טבת תש"ג

פרופ. א.ה. פרנקל

על המבנה המתימטי של הלוח העברי

I.

הבעיה הראשונה והעקרית אשר נגש לפתרה היא: לקבוע כמה ימים וחלקי ימים עברו מתחלת החשבון של הלוח העברי (בריאת העולם) עד סוף שנה מסוימת A. ביתר דיוק: כמה ימים עברו מ"מולד תוהו", כלומר ממולד תשרי המתאים ל- A=1 עד מולד תשרי של השנה (A+1). לשם כך עלינו לדעת מעט מאד מן הלוח העברי, דהיינו: 1) ארכו של חודש הלבנה ("הסינודי") לפי חשבוננו שהוא $29\frac{13753}{25920}$ יום

(את המספר הזה נסמן להבא, לשם קצור באות היונית μ - קרי: מו' -).
2) פילוג השנים הפשוטות (בנות 12 חודש) והמעוברות (בנות 13 חודש); ידיעתו תאפשר לנו לקבוע את מספר הימים שעברו.

באשר לנקודה השניה, הרי ידוע שבכל "מחזור קטן" של 19 שנה, המתחיל בראשי השנים 1+19n (n מספר טבעי או 0), שבע השנים בנות המספרים הסדורים 19,17,14,11,8,6,3 הנן מעוברות, ושאר 12 השנים פשוטות. ארכו של מחזור שלם שוה אפוא ל-

$$19.365\frac{24311}{98496}=235\mu=(19.12+7)\mu \text{ יום}$$

(בממוצע בשנת-חמה עברית יש $365\frac{24311}{98496}$ ימים). ואולם לשם נצול מתימטי יהיה נוח יותר להביע את פילוג השנים הפשוטות והמעוברות ע"י הכלל הבא:

בצאתנו מסוף השנה השמינית במחזור קטן כלשהו ובצעדנו אחורנית 18 פעם, שמונה שנים בכל צעד, תכיל כל מערכת כזו של שמונה שנים חמש שנים פשוטות ושלש שנים מעוברות (ואילו בפעם התשע עשרה - לשון אחר: בצעדנו קדימה שמונה שנים מסוף השנה השמינית שבמחזור - נקבל בתוך המערכת של שמונה שנים שש שנים פשוטות ורק שתי שנים מעוברות; הבקיאים בתורת השברים המשולבים יבינו בנקל את התופעה הזאת.)

הבה נתאר את המספר הטבעי A בצורה

$$A=8-8a+19C \qquad (1)$$

בתנאי שיהיה a או 0 מספר טבעי קטן מ 19 (מספר המערכות הנ"ל של שמונה שנים), ו C מספר טבעי כלשהו. הרי לפנינו משואה "דיופנטית" בעלת הנעלמים a ו C; שיש לה פתרון אחד ויחיד נראה בהרחיבנו אותה ב 7, שהרי נקבל

$$7A=56-56a+7.19C=19(3-3a+7C)-1+a$$

או

$$7A+1=19(3-3a+7C)+a \qquad (2)$$

על-סמך אי-השויון $0\leq a\leq 18$ יהיה אפוא a השארית (הלא-שלילית הקטנה ביותר) המתקבלת כאשר נחלק 7A+1 ב 19, ומתוך כך קובעת המשואה (1) את הערך של C באופן חד-ערכי.

המשואה (2) גוררת אחריה:

$$3-3a+7C=\frac{7A+1-a}{19} \qquad (3)$$

ועתה קל לפתר את הבעיה אשר שמנוה לנגד עינינו. שהרי אם נתאר את המספר A של השנה הנתונה בצורה (1), נכללות בתוך 19C שנים - כלומר, ב C מחזורים - 7C שנים מעוברות, ובתוך (8-8a) השנים הנוספות עליהן (3-3a) שנים מעוברות (כי שמונה השנים הראשונות של כל מחזור מכילות 5 שנים פשוטות ו 3 מעוברות). סך הכל קבלנו (3-3a+7C) שנים מעוברות. לכן, על-סמך (3), מכילות A השנים את מספר הימים

$$(12A+3-3a+7C)\mu = \left(\frac{1-a+235A}{19}\right)\mu \qquad (4)$$

אם a מסמן, כאמור לעיל, את השארית של החלוק של 7A+1 ב 19. -

נחשב, בתור תרגיל, את מספר חדשי-הלבנה בני n יום שיעברו מ"מולד תוהו" עד מולד תשרי התש"ד. A ישוה אפוא ל 5703, ו a לשארית החלוק של (7.5703+1) ב 19, כלומר ל 3. (למה שוה C?). מספר החדשים שיעברו יהיה אפוא לפי (4)

$$\left(\frac{5703}{19} = 300 + \frac{3}{19}\right) \quad \frac{1-3+235\cdot 5703}{19} = 235.300+\frac{235.3-3+1}{19} = 70537$$

ובאמת מכילים 300 המחזורים עד סוף שנת התש"ש 235.300 שהם 70500 חודש; ושלש השנים הבאות ע ד התשי"ג, ועד בכלל, מכילות (2.12+13), שהם 37 חודש, הואיל ובין שלש שנים אלו נמצאות שתי פשוטות ואחת מעוברת.

ה ח ש ב ו ן ה ז ה מ א פ ש ר ל נ ו , ל מ ש ל , ל ה פ ו ך כ ל ת א ר י ך ע ב ר י ל ת א ר י ך ה נ ו צ ר י ה מ ת א י ם ; לשם פשטות נבין את התאריך הנוצרי לפי הלוח היוליאני (על שם יוליוס קיסר), הקובע את ארכה של שנת החמה ל 365¼ יום. נתאר עתה A בצורה

$$A = 4s+b$$

בתנאי ש b יקבל אחד הערכים 3,2,1,0 (שאריות החלוק ב 4). הואיל וקיים $s = \frac{A-b}{4}$, מכילות A השנים היוליאניות את מספר הימים

$$365\,A + \frac{A-b}{4} = 365\tfrac{1}{4}\,A - \frac{b}{4}.$$

השתמשנו כאן בעובדה שלפי החשבון היוליאני מתאימה שנה "מעוברת" יוליאנית, בת 366 יום, לשנה הרביעית של הלוח העברי, כלומר ל A=4. לכן עודפות A השנים העבריות על השנים היוליאניות המתאימות במספר הימים

$$\left(\frac{1}{19}-\frac{a}{19}+12\frac{7}{19}A\right)\mu - \left(365\tfrac{1}{4}\,A - \frac{b}{4}\right) = \frac{\mu}{19} - \frac{\mu}{19}a + \frac{1}{4}b + \left(12\frac{7}{19}\mu - 365\tfrac{1}{4}\right)A.$$

הערכים הקבועים המופיעים כאן הנם

$$\frac{\mu}{19} = 1\,\frac{272953}{492480}$$

$$12\,\frac{7}{19}\mu - 365\,\frac{1}{4} = -\,\frac{313}{98496}$$

הפרש זה מציין בכמה מדייק הלוח העברי יותר מן הלוח היוליאני בקביעת ארכה של שנת חמה. (דע כי 492480=24.1080.19)

<u>תרגיל</u>: (למתקדמים): עשה את החשבון המתאים (קשה יותר!), אם תחת הלוח היוליאני יושם הלוח הקבוע המושלימי, והפך את ההפרש ל ש ב י ם מושלימיות שלמות.

לשם כך עליך לדעת כי לפי הלוח המושלימי

(א) אורך החודש (הסינודי) הוא 29 יום, 12 שעה, 44 דקה ועל כן קטן מן החודש העברי ב 24.1080¼ יום;

(ב) מכילה שנה מושלימית 12 חודש והיא או "פשוטה" בת 354 יום או "שלמה" בת 355 יום.

(ג) נמצאות בכל "מחזור" בעל 30 שנה 11 שנים שלמות, והן השנים 2,5,7,10,13,15,18,21,24,26,29, והשאר פשוטות. האורך הממוצע של שנה מושלימית שוה אפוא ל 11/30 354 יום.

כדאי לצאת לא ממולד תוהו אלא ממולד תשרי של השנה העברית המתחילה בשנה 1 (שהיא גם השנה הראשונה של "מחזור") של חשבון המושלימים, היא השנה 4383 לבריאת העולם; ביתר דיוק: ביום ה 58 לאותה שנה, $8\frac{618}{1080}$ שעות אחרי תחלת היום.

המשך בחוברת ו', עמ' 5

כתובת המערכת:

דפים למתמטיקה ולפיסיקה
רחוב אוסישקין 50
י ר ו ש ל י ם

י. ש. לנגה

למציאת גדול-הגורמים של שני מספרים

בבי"הס למדו אתכם למצוא את גדול-הגורמים (הגורם המשותף הגדול ביותר) של שני מספרים ע"י פרוק המספרים הללו לגורמים ראשוניים. מכפלת הגורמים המשותפים הוא המספר המבוקש. למשל, כדי למצוא את גדול-הגורמים של 216 ו 90, מפרקים

$$216 = 2.2.2.3.3.3$$
$$90 = 2 \quad .3.3 \quad .5$$

וגדול-הגורמים הוא אפוא $2 \quad .3.3$, דהיינו 18.

שיטה זו אינה נוחה ביותר, אם המדובר במספרים גדולים כגון 3598 ו 1351, אשר לא קל לפרקם לגורמים. כבר אבקלידס השתמש בשיטה מעשית יותר. אם יש מספר אשר 3598 ו 1351 מתחלקים בו, הרי גם ההפרש $3598-k.1351$ (k - מספר טבעי) יתחלק בו. נבחר ב k כך שהפרש זה יהיה קטן ביותר, k=2, ונקבל: $3598-2.1351=896$. גדול-הגורמים של 3598 ו 1351 יצטרך לחלק אפוא גם את 896 (בלי שארית). מאידך גיסא יחלק גדול-הגורמים של 1351 ו 896 גם את 3598, כי

$$3598=2.1351+896 \qquad (1)$$

לכן נוכל להסתפק למצוא את גדול-הגורמים של המספרים 1351 ו 896, שהם קטנים יותר מן המספרים שיצאנו מהם. לפי שיטה זו נוכל להסתיך:

$$1351= 1.896+455$$
$$896= 1.455+441$$
$$455= 1.441+ 14$$
$$441=31. \ 14+ \ 7$$
$$14= 2. \ 7+ \ 0$$

מאחר שהפעם לא נשארה עוד שארית, מתחלק 14 ב 7, ולכן מתחלקים בו גם 441, 455 וכו', והוא הוא גדול-הגורמים הדרוש.

ת ר ג י ל א. מצא את גדול הגורמים של 2059 ו 1849.

היות והשאריות בכל חשבון מן הצורה המתוארת הולכות וקטנות, ברור שהוא מוכרח להסתיים כעבור מספר סופי של צעדים - בדוגמתנו היה צורך ב 6 צעדים.

נכליל את בעיתנו ונחפש את גדול הגורמים של שני מספרים a_0, a_1 ($a_0 > a_1$) אילו שהם. לשם כך נרשם:

$$\begin{aligned} a_0 &= k_1 a_1 + a_2 \\ a_1 &= k_2 a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= k_n a_n + 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

$$(a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n)$$

וכעת מתעוררות שתי שאלות הקשורות אחת בחברתה:

(א) האפשר לקבוע מראש, אחרי כמה צעדים, לכל היותר, יסתיים חשבון זה כאשר a_0 ו a_1 נתונים?

(ב) אילו הם הערכים הקטנים ביותר של a_0 ושל a_1 השעונים, לשם קביעת גדול-גורמיהם לפי (2), מספר מסוים של צעדים, נגיד k?

המספרים הקטנים ביותר המצריכים צעד אחד הם 2 ו 1; כי

$$2=2.1+0 \qquad (3)$$

אם נרצה, שהמספרים a_0 ו a_1 יהיו קטנים ביותר ומספר הצעדים יהיה 2, תצטרך (3) להיות השורה האחרונה של החשבון והקודמת לה תהיה

$$3=1.2+1 \qquad (4)$$

אם נרצה, שהמספרים a_0 ו a_1 יהיו קטנים ביותר ומספר הצעדים הדרושים יהיה 3, תהיה שוב (3) השורה האחרונה, זו שלפניה תהיה (4), והקודמת לה תהיה

$$5=1.3+2$$

5 ו 3 הם אפוא המספרים הקטנים ביותר המצריכים 3 צעדים.

כדי שהמספרים a_0 ו a_1 יישארו קטנים ביותר, אף אם נגדיל את המספר ההכרחי של צעדים, נצטרך לדאוג שבחשבון (2) יסוו כל ה k-ים ל 1 (פלבד האחרון שישוה ל 2). בכל מקרה אחר נקבל מספרים גדולים יותר.

נבנה לנו מספרים כאלה בדרך ההפוכה לחשבון (2):

$$2=2.1+0$$
$$3=1.2+1$$
$$5=1.3+2$$
$$8=1.5+3 \quad \text{וכו'},$$

ונכנה את 1 ב b_1, 2 ב b_2, 3 ב b_3, 5 ב b_4 וכו', מיד נווכח שבסדרת ה b-ים קיים הכלל

$$b_n=b_{n-1}+b_{n-2},$$

אשר-לפיו נוכל לחשב את כל איברי הסדרה, והרי לכם 20 הראשונים:

1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233 , 377 , 610 , 987 , 1597 , 2584 , 4181 , 6765 , 10946

אם יהיה נתון לנו: $a_0=b_{k+1}$, $a_1=b_k$, נגיע, לפי (2), ב k צעדים דרך כל ה b-ים הקטנים יותר לתוצאה הדרושה. b_{k+1} ו b_k יהיו אפוא המספרים הקטנים ביותר אשר קביעת גדול-גורמיהם לפי (2) תגמר רק לעבר k צעדים.

אם $a_1=b_k$ ו $a_0<b_{k+1}$, יגמר החשבון ב k-1 צעדים לכל היותר, ואם $a_1<b_k$, ידרשו k-2 צעדים לכל היותר.

כך תצריך מציאת גדול-הגורמים של שני מספרים, אשר הקטן ביניהם הוא בן 4 ספרות, 19 צעדים לכל היותר; כאשר הקטן הוא בן 5 ספרות - 24 צעדים לכל היותר וכו'.

אם אין לכם סבלנות לחשב את כל ה b-ים בדיוק, הרי תוכלו לחשבם באומדנא. התחשבו בזה:

$$\frac{b_2}{b_1}=2\ ;\ \frac{b_3}{b_2}=1,5\ ;\ \frac{b_4}{b_3}=1,68...;\ \frac{b_5}{b_4}=1,6\ ;\ \frac{b_6}{b_5}=1,625\ ;\ \frac{b_7}{b_6}=1,615...$$

ה b-ים מהוים אפוא כמעט טור הנדסי, על כל פנים החל מן האיבר הרביעי שבסדרה. אם כלל זה יתאמת, הרי נוכל לקבוע באומדנא:

$$b_k \approx b_4 . 1,62^{k-4} \qquad (5)$$

תרגיל ב. חשב את b_{20} לפי (5) בעזרת לוגריתמים והשוה עם הערך המובא לעיל.

אולי תנסה להוכיח שאמנם קיים $\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{b_{k-1}}$ קל-יותר יהיה

תרגיל ג. הוכח: אם קיים $\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{b_{k-1}}$, הריהו שוה ל $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ (המספר-של חתוך הזהב!).

אבל גם בלי חשבון אינפיניטסימלי תוכלו לגלות תכונות יפות של סדרת ה b-ים הידועה במתימטיקה כסדרת פיבונצ'י (Fibonacci).

הרי $b_k=b_{k-1}+b_{k-2}$
וכן גם $b_{k-1}=b_{k-2}+b_{k-3}$
לכן $b_k=2b_{k-2}+1.b_{k-3}$
או $b_k=b_2 b_{k-2}+b_1 b_{k-3}$
אולם $b_{k-2}=b_{k-3}+b_{k-4}$
לכן $b_k=(b_2+b_1)b_{k-3}+b_2 b_{k-4}$
ומכאן $b_k=b_3 b_{k-3}+b_2 b_{k-4}$

תרגיל ד. הוכח שקיים תמיד $b_k=b_p b_{k-p}+b_{p-1} b_{k-p-1}$.

תרגיל ה. הוכח: אם k הוא מספר זוגי, אז b_k הוא הסכום של שני רבועים (5=1+4 ; 13=4+9 וכו'); ואם k הוא בלתי-זוגי, אז b_k הוא ההפרש של שני רבועים.

תרגיל ו. הוכח: $b_{3n-1}=b_n^3+b_{n-1}^3-b_{n-2}^3$

מן המשפט שהוכחתו נדרשה בתרגיל ג יוצא שאפשר לקבל בעזרת סדרת ה b-ים מספרים טבעיים שסכתם שוה למנת חתוך הזהב בכל דיוק שהוא. (מובן, שאין מספרים טבעיים שסכתם שוה בדיוק ליחס חתוך הזהב, כמו שתוכלו להווכח בנקל.) אבל לשם כך אין צרך לצאת מסדרה זו דוקא. קחו לכם מספרים רצויים, למשל $c_1=7$, $c_2=1000$, ובנו לכם סדרת מספרים לפי אותה השיטה:

$$c_3=c_2+c_1=1007$$
$$c_4=c_3+c_2=2007$$
$$c_5=c_4+c_3=3014 \quad \text{וכו'}.$$

תרגיל ז. הוכח: $\lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{c_{k-1}}$ קיים ושוה אף הוא ל $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

תרגיל ח. מצא את c_{10} בעזרת c_1, c_2 וסדרת ה b-ים בלבד, מבלי לחשב את איברי הבינים c_3, c_4 וכו'.

ד"ר אהרן קצ'לסקי

טיול בעולם של שני ממדים

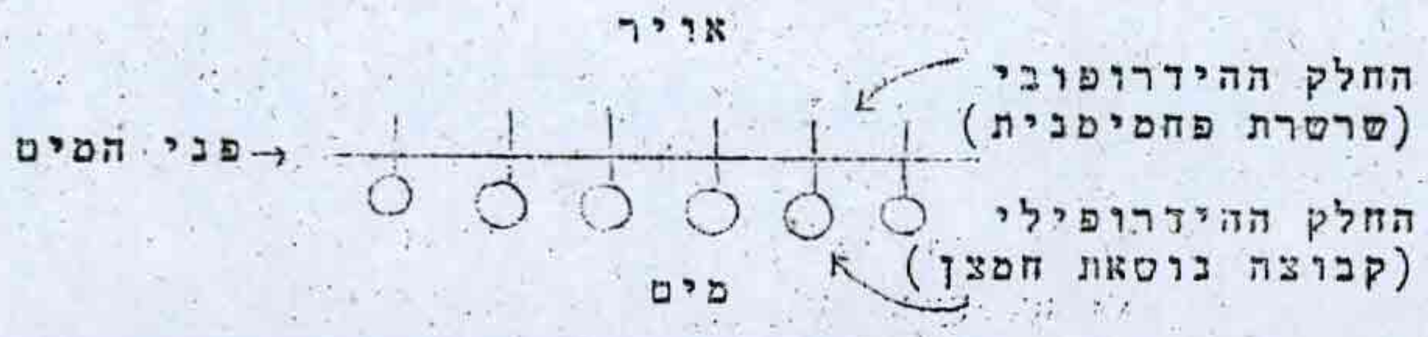
פרק ג' - ההידרופיליות וההידרופוביות.

טיולנו בעולם השטוח של פני המים הובילנו לתוך הממלכה המסתורית של המולקולות, לשכבות החד-מולקולריות. עתה בהמשיכנו את דרכנו נזכר בבעיה בה נתקלנו בסוף הפרק הקודם. ראינו כי גם הסתבלויותיהם של יורדי הים וגם מחקריהם של אנשי המדע הובילו למסקנה הסתומה כי אך שמנים צמחיים או שמנים מן החי מסוגלים להוות שכבות חד-מולקולריות; שמנים מינרליים המתקבלים בזקוקו של שמן האדמה אינם מתפשטים על פני המים. במה שמון ההבדל בין שני מיני השמנים, הדומים כל כך בהופעתם החיצונית?

כדי להגיע לחקר דבר נצא בעקבותיו של החוקר הישיש דבו (H.Devaux) ונלמד מפיו כיצד לתרץ קושיות חמורות במדע ע"י נסיונות פשוטים ביותר. נקח שתי חתיכות שומן - האחת חתיכת שמן מן החי, נאמר חתיכה של חומצה סטיארינית, והשניה חתיכה של ואזלין כבד, השייך לשמנים המינרליים. נשבול את שתי החתיכות במים ונוציאן. בזמן ההוצאה מתוך המים תתחלקנה שפות הנוזל על הדפנות ותרדנה על נקלה - השומנים יצאו יבשים מתוך המים. אולם נחזור על נסיוננו הפשוט אחר שפול מוקדם של שתי חתיכותינו. נטיל את חתיכות השומן לשני כלים מלאי מים ונעמיד את המים להרתחה. לכשיותך השמן ויכסה בשכבת נוזל את פני המים נסיר את הסירים מהאש ונניחם להתקררות אטית. השמן הצמחי והמינרלי יחזרו ויתמצקו ונוכל להסירם על נקלה מפני המים. עתה ננסה שוב להטביל את שתי החתיכות במים כאשר עשינו בהתחלה; מיד מתגלה הבדל מופלא בין הואזלין והחומצה הסטיארינית: הואזלין אינו נרטב ע"י המים ויוצא יבש בשני עבריו ממש כמו שנהג לפני השפול במים החמים, אולם החומצה הסטיארינית מגלה הבדל ברור בין פניה העליונים שהיו מופנים בזמן ההתמצקות לאויר ובין פניה התחתונים שנתמצקו על הגבול שבין החומצה והמים. הפנים העליונים של החומצה הסטיארינית אינם נרטבים, כואזלין ממש, אך הפנים התחתונים נ ר ט ב י ם ב מ י ם, אין המים מחליקים על גביהם וחלקם נשאר קשור לפני השמן.

מתעורר הרושם כי החומצה הסטיארינית מכילה, בנגוד לואזלין, קבוצות מושכות מים - קבוצות ה י ד ר ו פ י ל י ו ת - שנחבאו בתוך החומר. כאשר התכנו את החומצה הסטיארינית ונתנו למולקולות יתר חופש תנועה (במצב הנוזל יש למולקולה אפשרות נדידה, אפשרות שאינה קימת במצב המוצק) בקעו הקבוצות ההידרופיליות דרך לעצמן ונתישבו קרוב לפני המים, על הגבול שבין החומצה הסטיארינית והמים. בסיוננו הפשוט מעורר למחשבה כי בקבוצות הידרופיליות אלה שמון ההבדל היסודי בין שמני הסיכה המינרליים ובין השמנים מן החי - אלה ואלה מכילים מרכיב קבוע שנדחה מהמים - ה י ד ר ו פ ו ב י - שאינו מאפשר לשני מיני השמנים להתמוטט; אולם השמנים מן החי מכילים, נוסף לחלק ההידרופובי הגדול, חלק הידרופילי קטן, המושכם למים. אם גם אין החלק ההידרופילי של השמנים הצמחיים מספיק כדי להביא את החומר לידי התמוססות, הריהו מביאם למגע מכסימלי עם פני המים, מגע הנוצר בשכבות החד-מולקולריות.

אם נסמן עתה, כמקובל, את החלק ההידרופובי בקו ואת החלק ההידרו-פילי בעגול, תכתב המולקולה של השמן הצמחי בצורה זו  והשכבה החד מולקולרית תדמה לציור הבא



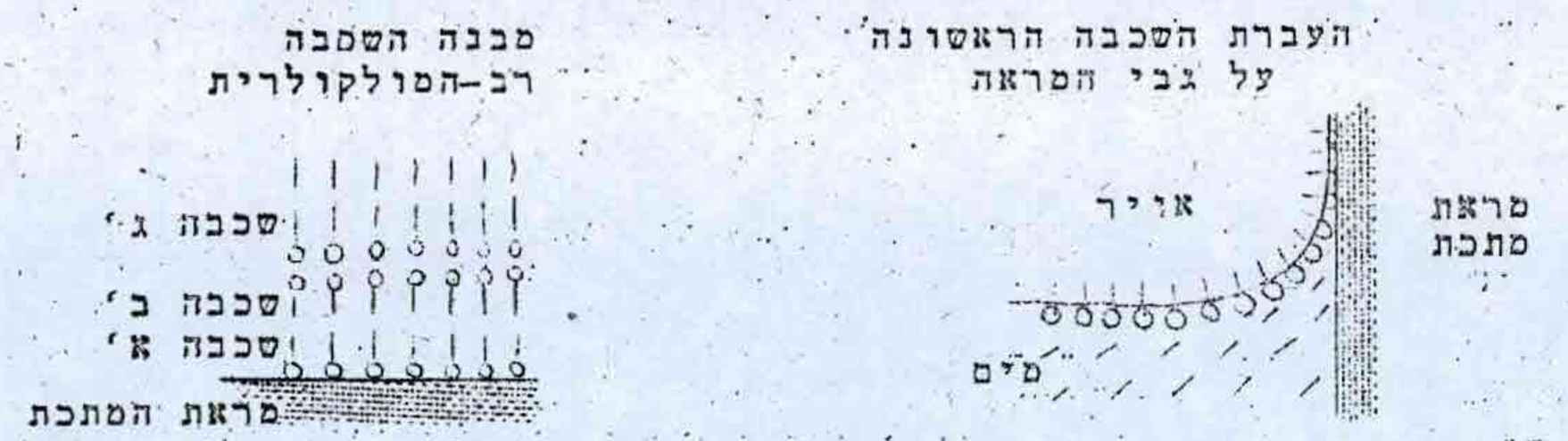
הבדיקה החימית הוסיפה נתונים אף היא כדי להבין את ההבדל בין שני מיני השמנים. נתברר כי השמנים המינרליים מרכבים משני יסודות בלבד - מפחמן וממימן - והריהם מבחינה חימית שרשרות פחמימניות. מאידך מכילים השמנים הצמחיים והשמנים מן החי יסוד נוסף לפחמן ולמימן - את החמצן. קרוב מאד לודאי כי החמצן המופיע בתוך המולקולה הוא הנוסא של ההידרופי-

ליות, של המשיכה למים, בשעה שהשרשרת הפחמימנית היא הנדחית מן המים. החמצן שבמולקולות האורגניות קשור בצורת הידרוקסיל OH - באלכוהולים; בצורת קרבוקסיל בחומצות COOH - ובצורת אסטר בשמנים COO - .

הרקינס (W. Harkins) הניח את היסוד לתורת המסיסות של החומרים האורגניים בהסתמכו על השקולים שהובאו לעיל. לדעתו יש לדמות את המולקולה האורגנית לפקק שקשרו לו חתיכת ברזל. הפקק, האנלוגי לקבוצה ההידרופובית, מושך את המולקולה החוצה מתוך המים; הברזל, האנלוגי לקבוצה ההידרופילית, מושך את המולקולה לתוך המים. מדת המסיסות נקבעת לפי היחס בין שתי הקבוצות. בחומצות הנמוכות ובאלכהלים הנמוכים מכרעת השפעתה של הקבוצה ההידרופילית ולפיכך הם נמסים יפה, בחומצות הגבוהות ובאלכהלים הגבוהים מכרעת השפעתה של השרשרת הפחמימנית, לפיכך מסיסותם במים קטנה מאד. -

הקבוצות ההידרופיליות נמשכות לא רק לפני מים כי אם גם לפני מוצקים, והשומנים מן החי מסוגלים ליצור שכבות חד מולקולריות על פני זכוכית ומתכות. שכבות דקות אלה משנות לחלוטין את התכונות של פני המוצק ונודעת להן חשיבות גדולה בעבודתם של שמני הסיכה המורחים את גלגלי המכונות. אולי תנסו לתאר בדמיונכם את הדרך בה פועל שמן מריחה טוב וכיצד הוא מקשין את החכוך בין גלגלי המכונה. אם תגיעו למסקנות שלחו את שקו-ליכם למערכתנו.

השכבות החד-מולקולריות על גבי מוצקים פותחות בפנינו דרך לצאת סוף-סוף מהעולם בן שני הממדים, לחזור לעולמנו הרגיל בן שלושה ממדים ולסיים בזה את טיולנו הארוך. את המעבר בין שני העולמות הגשימה באופן נסיוני החוקרת קתרינה בלודג'ט (Katharine B. Blodgett) במעבדתו של לנגמואיר באמריקה. הגב' בלודג'ט שמה לתוך קערה של מים מראת מתכת נקיה וכסתה את פני המים בשכבה חד-מולקולרית של חומצה סטיארינית. כאשר הוציאה את המראה מתוך המים באמצעותו של חוט משי דק, ראתה כי חלק מהשכבה נדבק ועלה על פני המתכת. בשובה ובהטבילה את המראה לתוך המים דרך שכבת החומצה הסטיארינית, נוספה ונדבקה עוד שכבה; וחוזר חלילה - מדי העלאה והורדה, מדי הוצאה דרך השכבה החד מולקולרית ומדי הטבלה, נוספה שכבה לשכבות הקודמות. כך הצליחה החוקרת להשקיע שלושת אלפים שכבות של חומצה סטיארינית אחת על גבי השניה וקבלה שכבה רב מולקולרית, תלת ממדית.



אסטבורי (W. Astbury) באנגליה הוכיח גם את השכבות הרב-מולקולריות לאמצעי מחקר חשוב. הוא השקיע לפי שיטת בלודג'ט קרוב לאלפים שכבות של חלבון על גבי זכוכית וקבל שכבה רב-מולקולרית שניתנה למדידה בעזרת בורג מיקרומטרי. עובי השכבה היה שתי אלפיות של מילימטר. עתה יכול היה למצוא על נקלה את העובי של השכבה החד-מולקולרית - את העובי של מולקולה אחת של חלבון. העובי הוא 2.10^{-7} mm : 2000 = 10^{-7} cm , עובי המתאים יפה לזה שחושב מתוך מדידות בקרני רנטגן. בסוף דרכנו הגענו, אפוא לכך שיש ביכלתנו לעמוד על ממדי המולקולות בעזרתו של הבורג המיקרומטרי.

הידעת?

7. מי המציא את החשבון האנפיניטסימלי?
8. היכן היה מרכז המתימטיקה במאה ה-17?
9. מהם החלקים היסודיים שמהם מורכב החומר לפי הפיסיקה של 1942?
10. מהן 4 הבעיות המפרסמות ביותר שהשאירה המתמטיקה היונית ללא פתרון?

<u>התשובות מחוברת הבאה.</u>

ו א ל ה שמות התלמידים שהגישו לבו פתרונות לבעיות שהוצגו בחוברת הרביעית לפי מוסדותיהם. המספרים אחרי השמות הם מספרי הבעיות שנפתרו.

י ר ו ש ל י ם .

הגמנסיה העברית:

ג.גולדרינג, ז': תרגיל (חלקית), 61,59,58,57 (חלקית), 64,א63,62
רחל מרכוס, ח': 70,64,61,59,58
מ.משלר, ו': תרגיל, 67,65,א63,62,59,58,57 (מסובך), 70,69,68

בית-הספר התיכון:

ע. ינובטקי, ז': 68,60,57
י.נלקן, ז': 60,59,58,57 (מסובך), 64,א63

בית"ד למורים "מזרחי":

ש.פוידמן, ג': 70,69,68,64,(מסובך) ב63,א63,62,59,58,57

ת ל - א ב י ב .

גמנסיה "בלפור":

ע. גולדשלק, ז': תרגיל, 60,59,58,57 (מסובך), 66,65,64,ב63,א63,62 (מסובך), 69,68,67
ד. גינצבורג, ו': 71,69,68,א63,59,58
ע. דה-שליט, ז': תרגיל, 60,59,58,57 (מסובך), 61 (חלקית), א63,ב63, 70,69,68,67,65,64
מ. ורשבטקי, ו': 69,68,64,ב63,א63,58,57
א. זויקלבסקי, ח': 60,59,58,57 (מסובך), 68,67,(מסובך)66,65,64,א63,61
י. שיטינוביץ, ז': 70,69,68,63,59,57
מ. ליטבק, ו': 58,57 (מסובך), 71,70,69,68,64,א63
א. מולצ'צקי, ז': 61,60,59,58,57(חלקית),62,א63,ב63(מסובך),70,69,65,64, 68,(מסובך)66,65,64,ב63,א63,62,(חלקית)61,59,58,57
מ. מלינוביץ, ז': 70,69
י. סקובקי, ו': 61,59,58,57 (חלקית), 71,70,68,65,64,א63,62
ח. סולוביצ'יק, ז': 61,59,58,57 (חלקית), 68,64 ,ב63,א63,62
מ. פילבסקי, ח': 60,59,58,57 (מסובך), 68,67 (מסובך), 66,65,64,א63
ג. קליבנוב, ז': 61,60,59,58,57 (חלקית), 69,68,67,64,'ב63,'א63
רבקה קפלן, ו': 70,69,68,א63,58,57 (חלקית)

גמנסיה "מוריה":

א. בכרך, ז': 70,69,68,64,א63,62,58,57
ב. גילאי, ז': 69,64,א63,62,59,58
ב. וינשטין, ז': 69,68,א63,62,59,58,57
ר. זנבר, ז': תרגיל (חלקית), 70,69,(מסובך) 66,א63,60,59,58,57
י. ליפט, ו': 60,58,57
א. קולבר, ז': תרגיל, 70,69,(מסובך)66,א63,59,58,57

בית-הספר "מונטפיורי":

ט. אקשטין, ו': 69,68,64,א63,62,59,58,57
י. ביגלמן, ו': 64,א63,59
מ. הלוי, ז': תרגיל,60,59,58,57(מסובך),61(חלקית),62,א63,ב63,66,67, 71,70,69,68
מ. מיזוף, ו': 69,68,64,א63,59,57
א. פלרמן, ו': 69,68,64,א63,62,59,58,57

בית-הספר התיכוני למסחר:

צפורה בלבן, ח': 70,69,68,65,64,א63,62,(מסובך)60,59,58,57
מ. זדק, ז': 70,69,68,65,א63,60,59,58,57
י. מדזוביץ, ח': 70,69,68,64,א63,62,59,58,57
א. מקובקי, ח': 69,68,(מסובך)66,65,64,א63,62,61,(מסובך)60,59,58,57, 71,70

גמנסיה "שלוה":

ש. ויינגרטן, ח': 70,69,68,67,66,65,64,ב63,א63,62,(מסובך)60,59,58,57
מ. קליין, ח': 70,69,68,67,66,65,64,ב63,א63,62,61,(מסובך)60,59,58,57, 71
י. שפיץ, ח': תרגיל,60,59,58,57(מסובך),61(חלקית),63,א63,ב63,64,65, 71,70,69,68,67

גמנסיה "הרצליה":

מ. בנעש, ז': 57 (מסובך), 59,58
ג. יקותיאלי, ז': 60,59,58,57 (מסובך)
ש. סקורוחוד, ז': 69,68,58

גמנסיה "בן-יהודה":

ש. קנלר, ח': תרגיל,58,57,60,59 (מסובך), 71,70,69,68,67,ב63,א63,62

ח י פ ה .

גמנסיה "יבנה": א.דויצ'ר, ו': 69,68,57
מ.בוטנוויזר, ו': 58,57(מסובך),61,59,(חלקית),71,70,69
גמנסיה "ביאליק": מ.זקהים, ז': 59,58,57(מסובך),61(חלקית),62,א63, 69,68
ביה"ס הימי שע"י התכניון: ר.אורנשטין וא.פרוסקואר, ו': 69

המשך הרשימה בעמ' 12.

פתרונות ל"בעירת".

(57) הוכח כי אם נחסר ממספר בעל שלש ספרות אשר ספרת מאותיו גדולה מספרת יחידותיו לפחות ב 2 את המספר בעל סדר ספרות הפוך ונוסיף להבדל את המספר בעל אותן הספרות הכתובות בסדר הפוך, נקבל תמיד 1089.

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c} \\ -\ \overline{c\,b\,a} \\ \hline \overline{(a-c-1)\ 9\ (10+c-a)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{(a-c-1)\ 9\ (10+c-a)} \\ +\ \overline{(10+c-a)\ 9\ (a-c-1)} \\ \hline 10\quad 8\quad 9 \end{array}$$

(58) הוכח כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, כאשר a ו b הם מספרים טבעיים.

א. הוכחה אלגברית:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\geqslant 0$$
$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

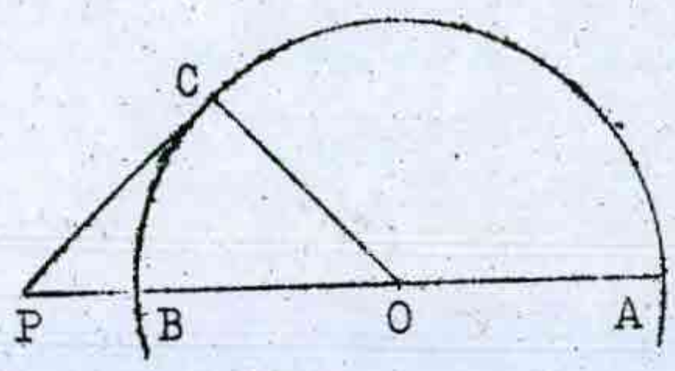
ב. הוכחה גיאומטרית: נניח ש $a>b$. נבנה קטע $\overline{PA}$ שארכו $\frac{a}{b}$ ועליו נקצה מ P קטע $\overline{PB}$ שארכו $\frac{b}{a}$. מעל $\overline{AB}$ נבנה את מעגל-תלס. אליו נעביר משיק מ P, אזי:

$$2\overline{PO}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

לפי משפט קטע-המשיק קיים: $\overline{PC}^2=\overline{PA}.\overline{PB}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$,

ולכן $\overline{PC}=1$. אולם $\overline{PO}$ הוא יתר במשלש POC, ועל כן קיים $\overline{PO}>1$,

$$2\overline{PO}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2 .$$



(שים לב כי $\overline{PO}$ הוא הממוצע החשבוני של $\overline{PA}$ ו $\overline{PB}$, וכי $\overline{PC}$ הוא הממוצע ההנדסי שלהם!) –

לפנינו מקרה פרטי של עקרון מתימטי מקיף יותר: אם מכפלת שני גדלים משתנים היא קבועה, יהיה סכומם מינימלי, כאשר ישוו זה לזה.

(59) הוכח כי $2^{4n+1}+3$ מתחלק ב 5, כאשר n הוא מספר טבעי.

$$2^{4n+1}+3=2^{4n}.2^1+3=2.(2^4)^n+3=2.16^n+3=2.\overline{\ldots 6}+3=\overline{\ldots 2}+3=\overline{\ldots 5}$$

(60) הוכח את הזהות

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\sin B\,\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C\,\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A\,\sin B}\right)$$

כאשר $A+B+C=180^\circ$.

$$\cot A+\cot B=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos A\sin B+\sin A\cos B}{\sin A\,\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\,\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}.$$

ההמשך ברור.

(61) הוכח כי אפשר לתאר כל מספר טבעי באופן יחיד כסכום של חזקות שונות של 2.

נבחין שני מקרים:

א. $N=2^n$. יחידות התיאור נובעת מן המשפט הידוע מתורת השורים הגיאומטריים האומר כי סכום כל החזקות השונות של 2 שמעריכיהן קטנים מ n שוה ל 2^n-1.

ב. $2^n<N<2^{n+1}$. מכאן: $N-2^n<2^n$. אם $N-2^n=2^k$ $(k<n)$, הרי $N=2^n+2^k$. אם לאו, אז $2^k<N-2^n<2^{k+1}$ וכו'. תהליך זה סוכרח להגמר אחרי מספר סופי של צעדים.

את יחידות התיאור נוכיח בדרך השלילה: נניח כי קיימים שני תיאורים לאחד המספרים הטבעיים N עשוי סכומים של חזקות שונות של 2:

$$(a_1>a_2>\ldots\ ;\ b_1>b_2>\ldots)\quad N=2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_n}+\ldots=2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_k}+$$

משונות התיאורים נובע כי לא כל ה a_n שוים ל b_n. יהא אפוא a_k המעריך הראשון השונה מן ה b_k המתאים, ונניח כי $a_k>b_k$. אולם במקרה זה גדול 2^{a_k} (לפי א.) מן הסכום של 2^{b_k} עם כל האיברים הבאים אחריו, מה שסותר את ההנחה. ברור כי לסתירה דומה נגיע בהנחה כי $a_k<b_k$.

הוכחה שניה ליחידות התיאור: כמה מספרים אפשר לתאר כסכומים של n החזקות הראשונות של 2, שהן $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$? לכל המספרים הללו יש הצורה

$$(1)\quad e_0.2^0+e_1.2^1+\ldots+e_{n-1}.2^{n-1}$$

כאשר ה e-ים הם או 0 או 1. מכיוון שיש n e-ים שכל אחד מהם יכול לקבל 2 ערכים, אפשר ליצור 2^n מכומים כאלה, אשר הגדול שבהם ישוה ל 2^n-1 (כאשר כל ה e-ים שוים ל 1) והקטן שבהם ישוה ל 0 (כאשר כל ה e-ים שוים ל 0). אולם בין 0 ל 2^n-1 יש בדיוק 2^n מספרים, ומכיוון שלכל אחד מהם ישנו תיאור לפי (1) ויש בדיוק 2^n מכומים, יוצא שכל תיאור הוא יחיד. —

את הבעיה הזאת אפשר להכליל ולהוכיח כי כל מספר טבעי N ניתן לתיאור בצורה

$$N = e_0 \cdot a^0 + e_1 \cdot a^1 + \dots + e_n \cdot a^n$$

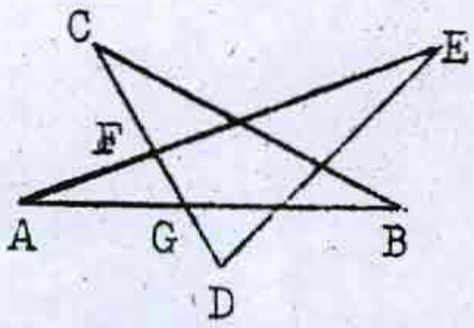
כאשר a הוא מספר טבעי כלשהו, וה e-ים מספרים טבעיים הקטנים מ a או 0, וכי תיאור כזה הוא יחיד.

יהא למשל N=591, a=7; אזי נקבל את התיאור היחיד

$$591 = \underline{1} \cdot 7^3 + \underline{5} \cdot 7^2 + \underline{0} \cdot 7^1 + \underline{3} \cdot 7^0$$

צורת המספר הזה בשיטת הספירה לגבי הבסיס 7 תהיה אפוא 1503, כשם שהיא 591 לפי שיטת הספירה העשורית. (על שיטות הספירה השונות ראה "מבוא למתימטיקה" מאת פרופ' פרנקל, עמוד 3 .)

בבעיה 72 של חוברת זו מופיעות שיטות-ספירה לא-עשוריות.



(62) מהו סכום הזויות במחומש כוכבי?

$$\hat{A} = \hat{A}$$

(כחיצונית למשלש GBC) $A\hat{G}F = \hat{B} + \hat{C}$

(כחיצונית למשלש FDE) $A\hat{F}G = \hat{D} + \hat{E}$

$$\hat{A} + A\hat{G}F + A\hat{F}G = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2d$$

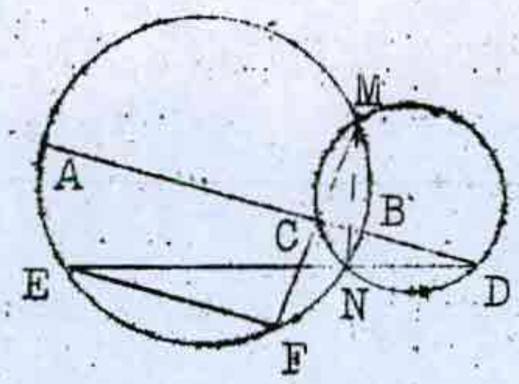
(63א) במעגל נתונים שני זוגות של מיתרים מקבילים. מצא את מרכזו בעזרת סרגל בלבד.

א. אם שני המיתרים שבאחד הזוגות חופפים, יהיה מרכז המעגל נקודת-החתוך של אלכסוני המלבן הנוצר.

ב. אם כל ארבעת המיתרים מקבילים זה לזה ואף שנים מהם אינם חופפים, אין פתרון.

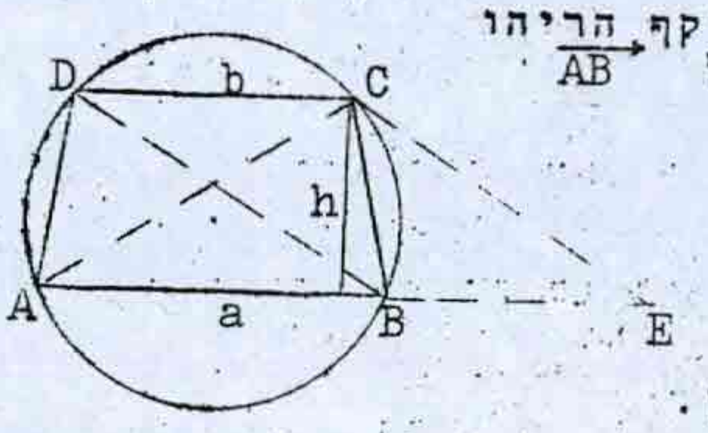
ג. בשאר המקרים יהיו היסרים המקשרים את נקודות-החתוך של אלכסוני הטרפזים הנוצרים עם נקודות-החתוך של המסכי שוקיהם אנכים אמצעיים של המיתרים, ועל כן תהיה נקודת-חתוכם מרכז המעגל המבוקש.

(63ב) נתונים שני מעגלים נחתכים, מצא את מרכזיהם בעזרת סרגל בלבד. (נוסח הבעיה בחוברת ג' היה מסובך).



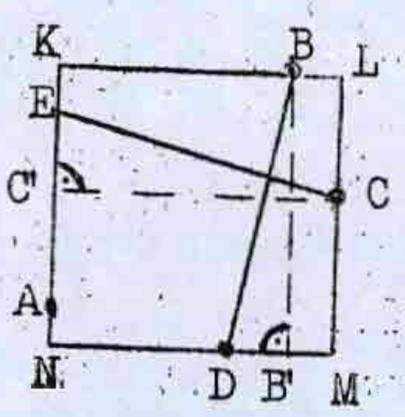
משרטטים ישר החותך את המעגל האחד ב A וב B, את חברו ב C וב D. את נקודות החתוך של המעגלים מסמנים ב M וב N. מקשרים C עם M; CM חותך את המעגל הראשון ב F. מקשרים D עם N; DN חותך את המעגל הראשון ב E. מקשרים E עם F. EF מקביל ל AD, כי $\hat{M} \cong \hat{D}$, $\hat{E} \cong \hat{M}$. ההמשך ברור.

(64) הקף במעגל נתון טרפז שממנו נתונים סכום בסיסיו וגבהו.



יהא ABCD הטרפז המבוקש. כטרפז מוקף הריהו שוה-שוקים, ועל כן אלכסוניו חופפים. על $\overrightarrow{AB}$ יש נקודה E, כך שקיים $\overline{BE}=b$, $\overline{AE}=a+b$. BECD הוא מקבילית, לכן קיים: $\overline{DB} \cong \overline{CE}$, ומכאן $\overline{CE} \cong \overline{CA}$. במשלש שוה-השוקים ACE נתון הבסיס והגבה עליו, ועל כן אפשר לבנותו. המעגל דרך A ו C החופף על המעגל הנתון יחתך את AE ב B. את הטרפז המתקבל מעבירים לתוך המעגל הנתון.

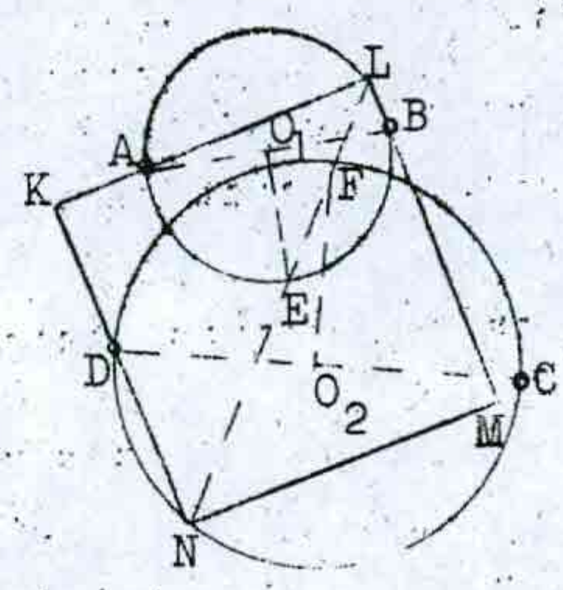
(65) בנה רבוע באופן ש 4 צלעותיו תעברנה דרך 4 נקודות נתונות שאף 3 מהן אינן על ישר אחד.



א. תהיינה A,B,C,D הנקודות הנתונות, כך ש A ו C נמצאות מצדדים שונים לגבי BD. מקשרים B עם D. מ C מורידים אנך על BD ומקצים עליו מ C קטע $\overline{CE}$ החופף על $\overline{BD}$. מקשרים את E עם A. דרך C מעבירים מקביל ל EA. דרך B ו D מעבירים אנכים על EA. את נקודות החתוך המתקבלות מסמנים ב N,M,L,K, היוצרות את הרבוע המבוקש.

הוכחת הבניה נובעת מן המשפט שכל שני קטעים מאונכים המקשרים כל אחד שתי נקודות על צלעות נגדיות ברבוע-חופפים. (התבונן במטולטים 'DBB ו 'ECC).

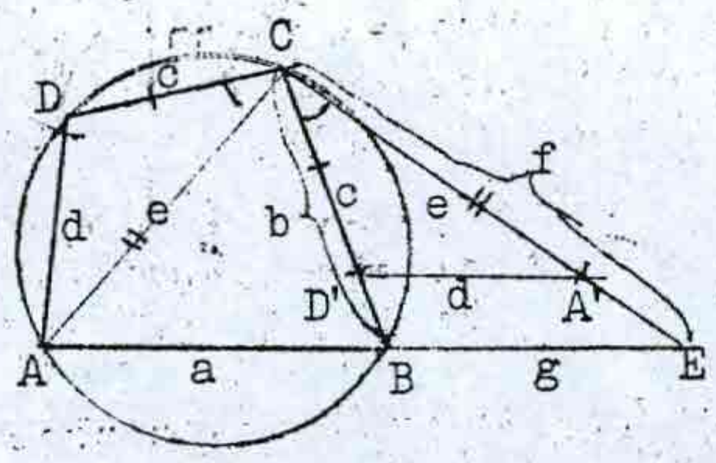
ב. מקשרים שתים מן הנקודות הנתונות הנמצאות מצד אחד לישר המכיל את שתי הנקודות האחרות, וכן את שתי הנקודות האחרות. מעל לקטעים הנוצרים $\overline{AB}$ ו $\overline{CD}$ חגים את מעגלי תלס. חוצים את הקשתות $\widehat{AB}$ ו $\widehat{CD}$ (המופנות זו אל זו) ומקשרים את אמצעיהן E ו F. EF חותך את המעגל O_1 ב L ואת המעגל O_2 ב N. מקשרים L עם A ו B, N עם C ו D. נקודות החתוך המתקבלות K ו M יוצרות עם L ו N את הרבוע המבוקש.



החוכחה נובעת מן המשפט - המוכח בנקל - שמרובע בעל שתי זויות נגדיות ישרות הנחצות ע"י האלכסון המקשר את קדקדיהן - הוא רבוע.

(66) בנה מרובע לפי 4 הצלעות באופן שיהא מעגל המקיף אותו.

בניה כי ABCD הוא המרובע המבוקש, על $\overline{CB}$ יש נקודה 'D כך ש 'CD חופף על $\overline{CD}$. ישנה קרן שראשיתה C החותכת את $\overline{AB}$ ב E, כך שהזוית $B\hat{C}E$ חופפת על $D\hat{C}A$. על $\overline{CE}$ יש נקודה 'A כך ש 'CA חופף על $\overline{CA}$. (במלים אחרות: סובבנו את המשלש DCA סביב C עד ש CD חל על CB.)



נסמן עתה את $\overline{AB}$ ב a, $\overline{BC}$ ב b, $\overline{CD}$ (וכן 'CD) ב c, $\overline{DA}$ (וכן 'D'A) ב d, $\overline{CA}$ (וכן 'CA) ב e, $\overline{CE}$ ב f, $\overline{BE}$ ב g.

'D'A מקביל ל BE, כי $\hat{D}+A\hat{B}C=2d$ (מרובע מוקף) ו $C\hat{D}'A' \cong C\hat{D}A$. מכאן יוצא שהמשלשים CBE ו CD'A' דומים. לכן,

$$\frac{f}{e}=\frac{b}{c} \qquad \frac{g}{d}=\frac{b}{c}$$

את g אפשר לבנות כמתכנתי רביעי לשלשה קטעים נתונים ועל-כן גם את $\overline{AE}$ השוה ל a+g, יחס הרחקים של C מ E ומ A שוה ל f:e ועל כן ל b:c, ומכאן ש C נמצאת על מעגל-אפולוניוס השייך ל $\overline{AE}$ לפי b:c. המקום הגיאומטרי השני של C הוא המעגל סביב B ברדיוס b. המשך הנתוח ברור וכן ברורה הבניה.

(67) ראובן חשב בפזיזותו שהממוצע החשבוני של שתי השקילות יתן את המשקל הנכון, בו בזמן שהמשקל הנכון מתקבל ע"י לקיחת הממוצע ההנדסי, כי המאזנים מאזני-קורה היו, ואי-דיוקן נגרם כנראה ע"י כך שהקורה לא נתמכה באמצעיתה. בניה שיחס הזרועות היה p:q, המשקל האמתי של הסחורה היה M והמשקלות שקבל היו M_1 ו M_2. אזי:

$$P=\sqrt{M_1 \cdot M_2} \;.\; P^2 = M_1 \cdot M_2 \;.\; P = M_2 \cdot \frac{q}{p} \;.\; P = M_1 \cdot \frac{p}{q} \quad !$$

הדוד יגיד אפוא לפני בית-המשפט שנכשל בחוסר ידיעות מספיקות במתמטיקה ובפיסיקה וכן יבטיח שיתקן את מאזניו.

(תלמידים אחדים מצאו מוצא אחר: הועדה בעצמה נכשלה, מכיון ששקלה את הטוכר הנותר על מאזניו של החנוני ורק בצד אחד!)

(68) מן הרחקים הנתונים יוצא שהאהל עמד על הקטב הצפוני; מכאן שצבע הדב היה ל ב ן .

(69) מזמת התלמידים העצלים בתגלתה אחרי 30 ימי-למוד; 30 היא קטנת-הכפולות של 3, 5, 6.

(70) זהה את הספרות בחלוק הבא: xxxxxxxxx:xa=xxxxxax

```
xax
  xxx
  xxx
   xxx
   xax
    xxx
    xax
     xx
     xa
      xx
      xx
      --
```

לפי ט': $a.\overline{xa}=\overline{xa}$, מכאן ט a הוא 0, או 1 או 5 או 6. לו היה a שוה ל 0, אז ה x ב ט' היה אף הוא 0 ולכן שוה ל a. לו היה a 5 או 6, אז ה x של המחלק היה 1, כי המחלק כפול 5 או 6 נותן מספר בן שתי ספרות בלבד. אולם אז היה ה x הראשון של המנה שוה ל 7 או 8 או 9, אך בכל המקרים הללו יהיה ה a שב א' לכל היותר 4. על-כן קבלנו: a=1.

לפי א': $x.\overline{x1}=\overline{x1x}$. ה x של המחלק הוא אי-זוגי, כי מכפלתו עם מספר אחר נותנת מספר הגומר ב 1. אולם לפי י"א: $x.\overline{xa}=\overline{xx}$. ה x האחרון של המנה הוא לפחות 2, ועל כן ה x של המחלק לכל היותר 4, ולכן הוא שוה ל 3. המחלק הוא אפוא 31. ההמשך קל.

(71) הוכח בקול רם:

$$(1+f)^2 - (1-f)^2 + (f+s)^2 - (f-s)^2 + (1+s)^2 - (1-s)^2 = 4000$$

הוכחה: אגף שמאל של השויון שוה, אחרי פתיחת המסגרות, ל $4lf+4fs+4ls$, ובקול רם ל "ארבעת אל-אף (אלף) פלוס ארבעה אף-אס (אפ פלוס ארבעה אל-אס". אולם מכיוון ש $fs=0$, ו $lf=1000$, יוצא כי $s=0$ (!) ולכן גם $4ls=0$.

(תלמידים רבים התקשו להוכיח ש $ls=0$. אחד כתב בפשטות ש"השורה השלישית היא מיותרת", אחר הציע לקרא "אל-אס" ואת זה כנראה כ"נלס" (אפסים באידיש), שלישי הפך את הסדר וקרא "ארבעה אלף less ארבעה אפס"!)

תשובות ל"הידעת".

1. מי הם שלשת המתמטיקאים היונים הגדולים ביותר ומה מפעלם?

א. אבקלידס (Euclides) חי בערך בשנת 300 לפה"ס. את השכלתו קבל באתונה אצל תלמידי אפלטון ואבדוכסוס (Eudoxos). ספרו החשוב ביותר הו "היסודות", בהם בונה אבקלידס את הגיאומטריה - ובמדת-מה גם את האריתמ טיקה בלבוש גיאומטרי - על סמך מספר קטן של אכסיומות ודרישות. לשיטתו האכסיומטית-דידוקטיבית היתה השפעה עצומה על התפתחות המחשבה האנושית והיא שמשה זמן רב כמופת לדיוק מתמטי. "היסודות" שמשו באנגליה כספר למוד להנדסה עד לפני שנים מועטות.

ב. ארכימדס (Archimedes) נחשב כגדול המתמטיקאים של הזמן העתיק הוא חי בסירקוס אשר בסיציליה בשנים 287-212 לפה"ס. רעיונותיו הקדימו בהרבה את דורו, ו"שיטת-המצוי" שבעזרתה חישב את היקף המעגל מתקרבת במ רבה אל החשבון האינטגרלי שהומצא 2000 שנה אחריו. כוחו היה רב גם במיכ ניקה והידרוסטטיקה, להלכה ולמעשה. בעזרת המצאותיו החזיקה עיר מולדתו מעמד שנים רבות נגד התקפות הרומאים. ב"חשבון-החול" פיתח שיטה לסמון מספרים גדולים והתגבר במדת מה על הקשיים אשר אופן הסמון היוני גרר אחריו בתחום זה (ראה שאלה 5).

ג. אפולוניוס (Apollonios) חי בשנים 256-200 לפה"ס, תחלה באלכ סנדריה, אחיר בפרגמון. מפעלו העקרי הם ספריו על חתכי החרוט. שיטתו דומה לזאת הנהוגה כיום בהנדסה האנליטית. על שמו נקרא מעגל בעל חשיבות רבה בבניות בתורת-המתכונת (ראה בעיה 66 בחוברת זו). כן מפורסמת הבעיה שהציג אפולוניוס וגם פתרה, והיא לבנות מעגל המשיק לשלשה מעגלים נתוני

2. איזה מתמטיקאי נקרא בשם "princeps mathematicorum" ("שר המתמטיקאי

בשם זה נקרא הגרמני קרל פרידריך גאוס (C.F.Gauss), שחי בשנים 1855-1777. הוא נחשב בין גדולי המתמטיקאים בכל הדורות. פעולתו משתרעת על כל תחומי המתמטיקה. הוא נתן למספרים המרוכבים תיאור הנדסי ב"מישור של גאוס", קידם במדה עצומה את תורת-המספרים, הוכיח את המשפט היסודי של האלגברה, והגה את רעיון הגיאומטריות הלא-אבקלידיות.

3. באיזה ערך השתמשו היהודים בתקופת התנ"ך עבור π (יחס היקף המעגל א קטרו, והיכן נזכר הדבר?

הם השתמשו בערך 3 עבור π - כנראה בעקבות הבבלים - , הדבר נובע ממלכים א', פרק ז', פסוק כ'ג.

4. האם יש סבה מיוחדת להרגל הידוע להשתמש בדרך כלל באות x כסמן לגודל משתנה או נעלם?

הפילוסוף והמתמטיקון הצרפתי דקרט (René Descartes או Cartesius) היה הראשון שהשתמש בעקביות באותיות האחרונות של האלפא-ביתא הלטינית לציון נעלמים, בספרו המפורסם "גיאומטריה" (Géometrie), שהופיע ב-1637 במהדורה הראשונה בקר את האות האחרונה z, אולם במהדורות הבאות עבר להשתמש בעקר באות x - מכיון שבצרפתית אות זו היא בין האותיות הנפוצות ביותר, בו בזמן שנתקל בקשיים בהשגת דפוסי האותיות האחרות.

5. באילו סמלים השתמשו היונים לכתיבת המספרים וכיצד השפיע הדבר?

היונים - כמו היהודים - השתמשו ב-24 האותיות של האלפא-ביתא שלה לסמול המספרים, ובזאת הגיעו עד 600; לסמול המספרים 700, 800, 900 השתמשו בשלש אותיות יצאו מן השמוש. לסמול מספרים גדולים יותר הוסיפו תגים לאותיות.

שיטת סמול זו בכבדותה ובהעדר סמן מיוחד ל"אפס" היתה אחת הסבות לכך שהאלגברה של היונים פיגרה בהרבה לעומת ההנדסה שלהם.

6. מתי החלו להשתמש בסמן מיוחד עבור ה"אפס"?

לאירופה הועבר השמוש בסמן מיוחד עבור ה"אפס" ע"י המתמטיקאים הערבים אשר קבלו אותו מצדם מן ההודים שהשתמשו בו עוד במאה הרביעית לספה"נ. אולם השבט האינדיאני של המאיה (Maya) השתמש בו כבר לפני 2000 שנה, והחקירות החדישות ביותר העלו שעוד הבבלים השתמשו בו לפני למעלה מ-3000 שנה, אם כי לא באופן שיטתי.

בעיות

הפתרונות לבעיות צריכים להגיע למערכת לא יאוחר מן ה-15 בפברואר. ציינו בתשובות את המספר הסדורי של הבעיה והגישו את הפתרונות לתרגילים שהוצגו במאמ- רים על דפים מיוחדים.

72. a, b, c הן שלש ספרות רצופות (לאו דוקא בסדר זה) בשיטת-ספירה מסויימת וקיים:
$$\overline{aabb} = \overline{cc}^{\,2}$$
מצא את הספרות ואת בסיס הספירה. כמה פתרונות?

*73. הסבר את הכלל הבא: כדי לבדק אם לא נפלה טעות בחבורם של מספרים אחדים בני ספרות אחדות, מחסרים מן החתך (סכום-הספרות) של הסכום את סכום חתכי המחוברים. אם ההבדל המתקבל אינו כפולה של 9, יש שגיאה, אחרת כדאי להתערב ביחס של 8 נגד 1, לפחות, שאין שגיאה. איזו צורה יקבל כלל זה לגבי פעולת הכפל?

74. הוכח כי אפשר לתאר כל מספר באופן יחיד כסכום והבדל של חזקות שונות של 3 (השוה בעיה 18 שבחוברת א' ובעיה 61 בחוברת ד').

75. במשלש ישר זוית נתון הגובה על היתר. בת כמה מעלות צריכה להיות אחת הזויות החדות, כדי שלחוצה שלה יהיה אורך מינימלי?

76. חקר את התנהגות הלולין ההפרבולי $x=\frac{1}{y}$, כאשר y, בערכו המחלט, שואף ל 0, ואם יש לו אסמפטוטה (-ות), קבע את משואתה.

*77. במישור מצויינות 2 נקודות. קבע, בעזרת המחוגה בלבד, עוד שתי נקודות הקובעות אתן רכוע אשר בו הנקודות הנתונות הן (א) קדקדים סמוכים (ב) קדקדים נגדיים (ראה את המאמר "בניות בעזרת מחוגה בלבד" בחוברת א' והפתרונות לבעיות שהוצגו בו בחוברת ב').

*78. אם A, B, C, D היא רביעית צמתים (כלומר כל נקודה היא הצומת של המשלש הנקבע ע"י שלש הנקודות האחרות - ראה את המאמר "קו-אוילר ומעגל תשע-הנקודות" בחוברת ב' והפתרונות לבעיות שהוצגו בו בחוברת ג'), אז:
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

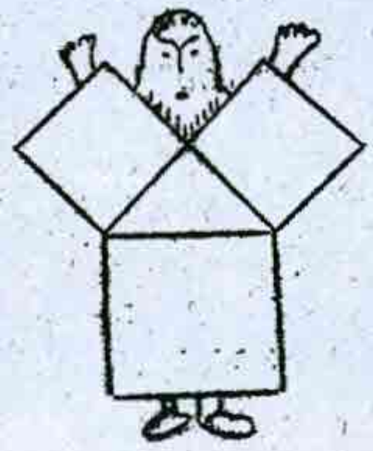
*79. A, B ו C נמצאות על מעגל אחד, כך ש $A\hat{B}C$ היא קהה ו $\overline{AB} > \overline{BC}$. E היא האמצע של $\overset{\frown}{AC}$, F עקב האנך המורד מ E על AB. הוכח: $\overline{AF} = \overline{FB} + \overline{BC}$

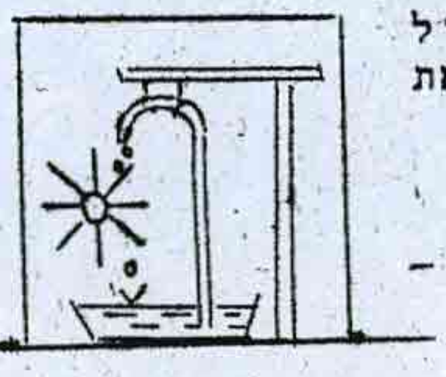
*80. אמצעי הצלעות של משלש קובעים משלש חדש. אמצעי צלעותיו קובעים משלש שלישי, וכו'. לאיזו נקודה מתכנסים המשלשים הללו?

81. מצא את הנקודה אשר סכום מרחקיה מקדקדי משלש נתון הוא מינימלי.

שיחת חולין מתמטית

82. <u>ראובן ממציא פרפטואום מובילה!</u> (נמסר לנו ע"י עוזרו הראשי ע.גולדשלק). לשעור האחרון לפיסיקה הכין ראובן הפתעה מיוחדת. "הגשמתי את חלום הממציאים! המצאתי פרפטו- אום מובילה!", הכריז ופרש לפני הכתה את הציור הבא שציר על גליון ניר גדול והמשיך: "לוקחים פתיל טוב וטובלים את קצהו האחד במים הנמצאים בכלי. את הקצה השני מכופפים כמו שהנכם רואים בציור. המים עולים בפתיל עד הקצה הכפוף, משם הם מטפטפים על גלגל ומני- עים אותו. את כל המערכה נסגור בכלי הרמטי כך שהמים לא יתנדפו". מי מכם יציל את כלל הזהב של המכניקה?





83. למה שוה מכפלת כל הבטויים מן הצורה $(x-a)$, כאשר a עובר את כל האותיות של האלפא-ביתא הרומית?

84. $\frac{UB}{BU}$ היא הצורה המצומצמת של השבר האמתי $\frac{WPA}{USA}$. זהה את ערכי הספרות והראה שהפתרון הוא יחיד.

גבעתים. בית-הספר התיכון: א.גרינולד, ו': 59,58,57

ברדדים. י.לנדוי: 69,68,א63,62,59,58,57
י.שטראוס: 69,68,67,א63,62,59,58,57
א.טפיר: 71,70,69,68,62,58,57

המשך רשימת המותרים