דפים להתעניינות מלפיקה

לנוער המתלמד

בעריכת י. בר-הלל וי. נויסן

מרס 1943 | חוברת ו' | אדר תש"ג

נוימן

על המספרים האי-רציונליים

§1. מספרים רציונליים ואי-רציונליים.

רבים מכם קראו בודאי את מאמרו של ד"ר לויצקי בחוברת א' של "הידפים" על "הפיכת שברים פשוטים לשברים עשרוניים", ועוד תזכרו את המסקנות הבאות:

אפשר לתאר כל שבר פשוט (או, במלים אחרות, כל מספר רציונלי, ובשם זה אנו קוראים את המנה של שני מספרים שלמים) כעשרוני מסויים או כעשרוני לא-מסויים מחזורי; ולהיפך, אפשר לתאר, כידוע, כל עשרוני סופי ולא-מסויים מחזורי כשבר פשוט. לדוגמא: $\frac{1}{8}=0,125$; $\frac{1}{7}=0,\dot{1}4285\dot{7}$; $\frac{1}{12}=0,0\dot{6}\dot{3}$

(שויונות אלה נקראים הן מימין לשמאל והן משמאל לימין).

ומה על העשרוניים הלא-מסויימים ולא-מחזוריים? מאחר שכל המספרים הרציונליים מתוארים, לפי הנ"ל, ע"י העשרוניים המסויימים והמחזוריים, הרי שהעשרוניים הלא-מחזוריים מיצגים קבוצה אחרת של מספרים המכונים בשם מספרים אי-רציונליים (פירוש המונח "ratio" בלטינית ובאנגלית הוא "מנה"; "אי-רציונלי" פירושו "שאינו מנה", דהיינו מנה של מספרים שלמים). הספר העשירי של "היסודות" לאבקלידס דן בגדלים אלה והוא נחשב בעיני רבים ליפה ביותר בין ספריו.

§2. דרכים לבניית מספרים אי-רציונליים.

דרך פשוטה לבנית קבוצה רחבה של מספרים אי-רציונליים מותוית ע"י

משפט I: השרש ה-k-י של כל מספר טבעי a הוא מספר שלם, כאשר a הוא החזקה ה-k-ית של מספר טבעי אחר b, $a=b^k$, ואי-רציונלי בכל מקרה אחר. $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[5]{32}$ הם שלמים, אולם $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{21}$ הם אי-רציונליים.

לשם ההוכחה נניח שאין המשפט נכון, וישנו מספר טבעי N אשר אינו חזקה k-ית של שום מספר טבעי אחר ואשר השרש ה-k-י שלו הוא רציונלי, כלומר שוה למנתם של שני מספרים שלמים: $\sqrt[k]{N}=\frac{m}{n}$ (השבר הוא בצורה מצומצמת). ע"י העלאה לחזקה ה-k-ית נקבל: $N=\frac{m^k}{n^k}$; ומכאן $m^k=Nn^k$. מן השויון האחרון נובע כי כל מחלקיו של n^k מחלקים את m^k ולכן גם את m (למה?). אולם m ו-n זרים, לפי הנחתנו. n שוה אפוא ל 1 ו $N=m^k$, מה שסותר את הנחתנו כי N אינו חזקה k-ית של מספר טבעי אחר.

משפט I נותן לנו מספרים אי-רציונליים "בסיטונות" כביכול. נלך עתה בדרך ההפוכה ונבנה כמה מספרים אי-רציונליים פרטיים. מספר ממשי יהיה אי-רציונלי, אם נוכיח כי העשרוני המתאר אותו הוא (א) לא-מסויים (ב) לא-מחזורי.

התבוננו באופן הבניה של העשרוניים הבאים: $z_1=0,010020003\ldots$, $z_2=0,1223334444\ldots$, ומיד תוכחו כי הם לא-מסויימים ולא-מחזוריים.

קצת יותר קשה תהיה הוכחה זו לגבי $z_3=0,01101010001\ldots$ הנוצר באופן הבא: הספרות שמקומן אחרי הפסיק מבוטא ע"י מספר ראשוני, כלומר הספרה השניה, השלישית, החמישית,... הן 1, כל יתר הספרות – 0.

(א) z_3 הוא לא מסוגים, כי יש אינסוף מספרים ראשוניים. משפט יסודי זה היה ידוע עוד ליונים ובספרו של אבקלידס ניתנת לו הוכחה פשוטה ויפה מאד.

(ב) במדי להוכיח ש z_3 אינו מחזורי, עלינו להוכיח כי המספרים הראשוניים, אינם מופיעים במחזור בסדרת המספרים הטבעיים. לשם כך נניח, בדרך השלילה, כי יש מחזור של מספרים ראשוניים באופן שלכל p ראשוני (המופיע במחזור) גם p+q (q אורך המחזור), גם p+2q וכו' ראשוניים. אולם אזי יהיה גם p+pq ראשוני, מה שלא ייתכן כי מספר זה מתחלק ב p. מן הסתירה שקבלנו נובע ש z_3 הוא לא-מחזורי ולכן אי-רציונלי. (כיצד תוכיח כי p אינו יכול לשוות ל 1?)

§3. קירוב מספרים אירציונליים ע"י מספרים רציונליים.

התבוננו ב $1\sqrt{3}$ לפי משפט I יהיה $\sqrt{3}$ אירציונלי. את העשרוני המתאר אותו נקבל ע"י הוצאת השרש הרגילה. בכל חשוב מעשי מחשבים את הספרות ה ר א ש ו נ ו ת של העשרוני הלא-סופיים בלבד. באופן זה נקבל, אחרי כל צעד, עשרונים "מקושטים" שהם ק י ר ו ב י ם רציונליים ל 3 וקטנים ממנו. אם נגדיל ב 1 את הספרה האחרונה של כל עשרוני מקושט כזה, נקבל קירובים רציונליים הגדולים מ $\sqrt{3}$. באופן זה נגיע לסדרה הבאה:

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \quad ; \quad 1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \quad ; \quad 1,732 < \sqrt{3} < 1,733$$

וכו'.

כל כמה שנחשב יותר ספרות, נתקרב יותר לערכו של $\sqrt{3}$. כל "שבר קירוב" כזה בצורתו הבלתי-מצומצמת, מכנהו הוא חזקה של 10 ואם הוא בעל n ספרות, יהיה ההבדל בינו ל $\sqrt{3}$ קטן מ $\frac{1}{10^n}$ (הוכח זאת!).

האם ישנם מספרים רציונליים שמכניהם הוא n כלשהו ולאו דוקא חזקה של 10 הנבדלים בפחות מאשר $\frac{1}{n}$ מכל מספר אירציונלי נתון? על שאלה זו משיב

מ ש פ ט II : יהא z מספר אירציונלי כלשהו ו n מספר טבעי כלשהו, אזי ישנו מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ באופן ש $\left|z - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

לשם הוכחת המשפט הפשוט הזה נחלק את הרוח שבין המספרים השלמים אשר z נמצא ביניהם ל n-חלקים שווים. כל נקודת-חלוקה מבוטאת ע"י מספר רציונלי $\frac{m}{n}$, בהיות z אירציונלי, יימצא בין שתי נקודות כאלה. המרחק בין שתי נקודות חלוקה רצופות הוא $\frac{1}{n}$, ולכן יהיה ההבדל בין כל אחת מהן לבין z קטן מ $\frac{1}{n}$.

למשל, יהא $z=\sqrt{3}$ ו $n=4$, אזי $\frac{7}{4}$ יהיה שבר קרוב המקיים את המשפט, כי $\left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right| < \frac{1}{4}$.

לכולנו ידוע הקירוב $\frac{22}{7}$ לערכו של π שניתן ע"י ארכימדס. $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{7}$, אולם למעשה קיים הרבה יותר, כי

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \left|\frac{314}{100} - \frac{22}{7}\right| = \frac{1}{350} < \frac{1}{7^2} \quad (\text{ואפילו } < \frac{1}{7^3})$$

גם לגבי הקירוב $\frac{7}{4}$ לערכו של $\sqrt{3}$ קיים

$$\left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right| < \left|\frac{173}{100} - \frac{7}{4}\right| = \frac{1}{50} < \frac{1}{4^2}.$$

דוגמאות אלה מעלות את השאלה: האם אפשר להתקרב לכל מספר אירציונלי שהוא ע"י שבר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך שדיוק הקרוב יעלה על $\frac{1}{n^2}$? על שאלה זו משיב משפט III שהוכחתו כבר אינה טריביאלית כל עקר.

מ ש פ ט III : לגבי כל מספר אירציונלי שהוא z נמצאים אינסוף מספר רציונליים $\frac{m}{n}$ באופן ש

$$\left|z - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

לשם הוכחת המשפט נבחר לנו מספר טבעי כלשהו, N. נכפל z לפי הסדר ב $0, 1, 2, \ldots, N$ ונקבל את המספרים $0.z, 1.z, 2.z, \ldots, N.z$. נגבה מכל המספרים האלה את החלק השלם, אם גדולים הם מ 1, ונקבל $N+1$ מספרים הקטנים מ 1. אם נחלק כעת את הרוח בין 0 ל 1 ל N חלקים שווים, יצטרכו באחד הרוחים הללו להמצא 2 מספרים מן הסדרה הנ"ל (ברור? הזכר בשאלה[52] של חוברת ג'!)

יהיו שני המספרים הנמצאים ברוח אחד $\overline{k_1 z}$ ו $\overline{k_2 z}$ (הקו מסמן "בלי השלם") – שים לב ש k_1 ו k_2 אינם דוקא מספרים רצופים! –, ויהא $k=k_2-k_1$ $(k<N!)$, אזי

$$\left|\overline{k_2 z} - \overline{k_1 z}\right| = \left|\overline{kz}\right| < \frac{1}{N}$$

כי הרי שני המספרים נמצאים ב ת ו ך רוח שארכו $\frac{1}{N}$.

אם נסמן ב m את המספר השלם הגדול ביותר הקטן מ kz, נוכל לכתב את הנוסחה האחרונה גם בצורה הבאה:

$$\left|kz - m\right| < \frac{1}{N}$$

ואחרי חלוק ב k נקבל

$$\left|z - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{kN} < \frac{1}{k^2}$$

וכך מצאנו שבר $\frac{m}{k}$ שמכנהו k והנבדל מ z בפחות מ $\frac{1}{k^2}$.

כדי להשלים את ההוכחה, עלינו להראות כי יש א י נ ס ו ף שברי-קירוב המקיימים את תנאי המשפט. ב (1) הראינו כי ל כ ל N קיימים k ו m באופן ש $\left|z - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{kN}$ ולכן על אחת כמה וכמה $\left|z - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{N}$. עתה, אם מספר שברי-הקירוב מסוג (1) הוא סופי, אזי אחד מהם יתקרב ביותר ל z וההפרש בינו ולבין z יהיה מינימלי וישוה לגדל ק ב ו ע d, כך שנוכל לבחר N די גדול המקיים $d > \frac{1}{N}$.

מצד שני, בעוד שכל מספר טבעי בענה למשפט II, קל להוכח כי ל א כ ל מספר טבעי מקיים את משפט III. למשל כש $k=5$ ו $z=\sqrt{3}$, אין m כך ש $\left|\sqrt{3} - \frac{m}{5}\right| < \frac{1}{5^2}$.

האפשר להתקרב לכל z אירציונלי ע"י סבר רציונלי $\frac{m}{n}$ באופן שדיוק הקירוב יעלה על $\frac{1}{n^r}$ $(r>2)$, ז"א במעלה הגבוהה מ 2? שאלה זו מביאה לידי מחקר מענין שלא נוכל לפתחו במקום זה.

כעת פתרו נא את התרגיל הבא ונסו את כוחותיכם בבעיות:

ת ר ג י ל : מצא שלשה ערכים של n שלגביהם ישנם m-ים כך שיתקיים $\left|\sqrt{3}-\frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$ ושלשה אחרים אשר לגביהם אין m-ים כאלה.

ב ע י ה א' : הוכח כי השרשים הממשיים של המשואה $x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_{k-1},\dots,a_2,a_1,a_0$ מספרים שלמים, $k\geq 1$ וטבעי) הם שלמים או אירציונליים.

ב ע י ה ב' : הוכח כי הלוגריתמים של כל המספרים הרציונליים לגבי בסיס טבעי נתון הם אירציונליים (פרט, כמובן, למקרה שהמספר הרציונלי הוא חזקה רציונלית של הבסיס). - הדרכה: הנח כי הלוגריתמים הם רציונליים $\frac{m}{n}$.

ב ע י ה ג' : הוכח כי הלוגריתמים העשוריים של כל המספרים הטבעיים שאינם חזקות של 10 הם אירציונליים, בדרך פשוטה מאשר בבעיה ב' בנצלך את התכונות המיוחדות של הבסיס.

ב ע י ה ד' : הוכח כי אין רציונלי $\frac{m}{n}$ המתקרב אל $\sqrt{3}$ בפחות מ $\frac{1}{4n^2}$.

ב ע י ה ה' : (למתקדמים) הוכח כי e הוא אירציונלי. (הדרכה: הנח כי e שוה לרציונלי $\frac{m}{n}$).

. דוד

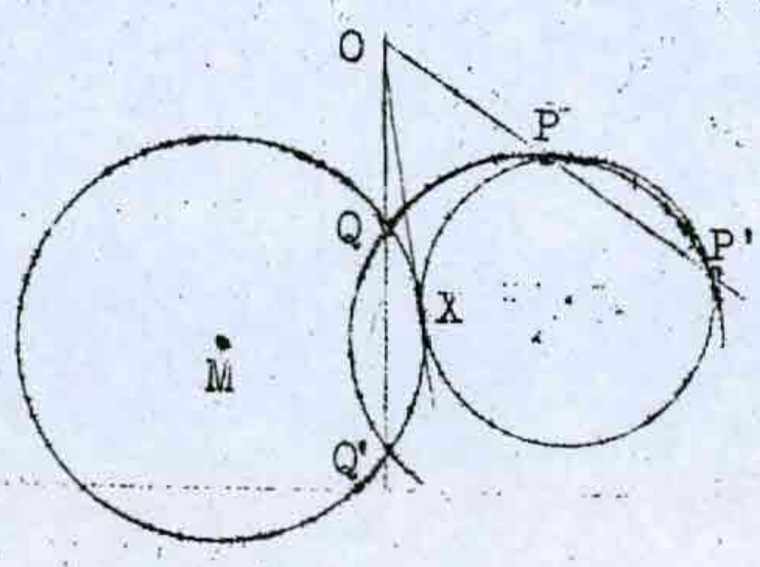
בעית אפולוניוס

בחוברת החמישית של "הדפים", עמ' 11, הוזכרה הבעיה הבאה אשר הציג אותה אפולוניוס ופתרה, והיא לבנות מעגל אשר ישיק לשלשה מעגלים נתונים. ברצוני להביא לפניכם את דרך ההוכחה אשר בה תלך אפולוניוס, דהיינו לפתר את הבעיה בעזרת בעיות קלות יותר הידועות לכם בחלקן מבית הספר.

אפולוניוס הניח תחלה שכל שלשת המעגלים הנתונים הם בעלי רדיוס אפס, "מעגלי-אפס" או - בלשון בני אדם - נקודות, אחר כך שנים מהם הם נקודות, אחר כך שרק אחד מהם הוא נקודה, ובסוף ששלשתם הם מעגלים "נורמליים". ("להשיק למעגל-אפס" פירושו כמובן "להכיל נקודה".)

על הבעיה הראשונה אין צורך להתעכב.

נעבר אפוא לשפל בבעיה השניה, לבנות מעגל שיכיל שתי נקודות נתונות וישיק למעגל נתון.



ציור 1.

תהא M מרכז המעגל הנתון ותהיינה P ו-P' הנקודות הנתונות. (ציור 1).

דרך P ו-P' מעבירים מעגל-עזר ברדיוס כלשהו בתנאי שיחתך את המעגל הנתון בשתי נקודות Q ו-Q'. PP' ו-QQ' נחתכים ב-O. מ-O מעבירים משיק למעגל הנתון ואת נקודת המגע מסמנים ב-X. המעגל דרך P, P', X הוא המבוקש.

ההוכחה נובעת מכך שקיים

$\overline{OP}.\overline{OP'} = \overline{OQ}.\overline{OQ'}$ (1) (לפי משפט קטעי החותך)

$\overline{OQ}.\overline{OQ'} = \overline{OX}^2$ (2) (לפי משפט קטע המשיק)

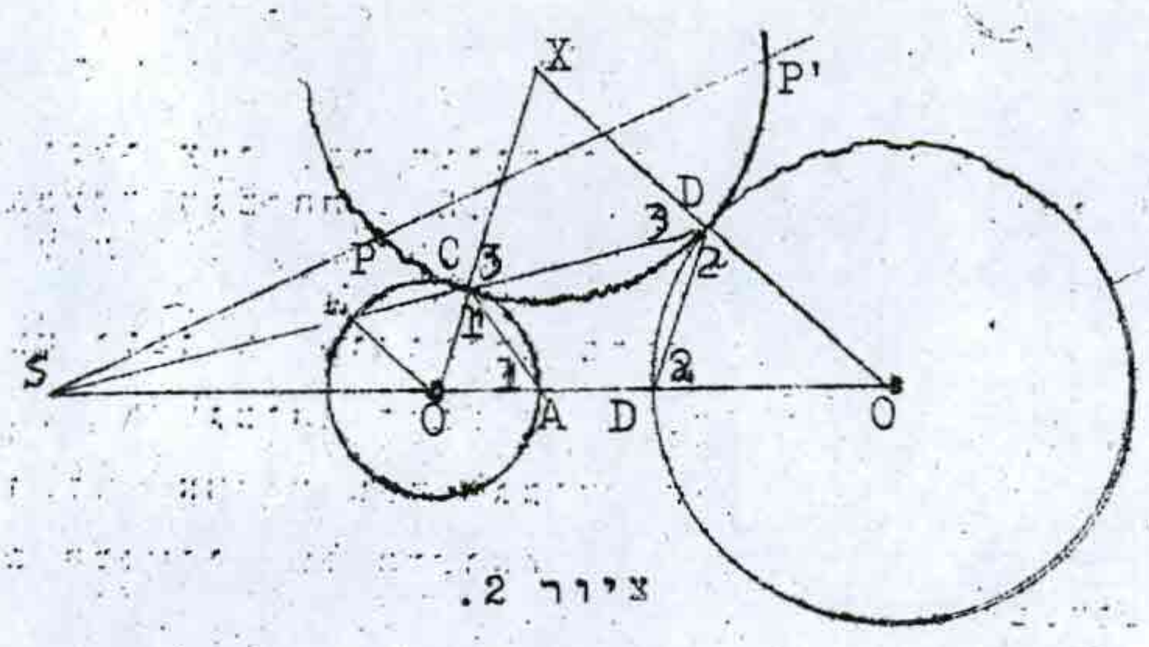
ולכן $\overline{OP}.\overline{OP'} = \overline{OX}^2$ (3).

אולם מ-(3) נובע שהמעגל דרך P, P', X משיק ל-OX ב-X ועל כן גם למעגל הנתון.

בתור בעית עזר אחרונה נשפל כעת בבנית מעגל המכיל נקודה נתונה ומשיק לשני מעגלים נתונים.

תהא אפוא P הנקודה הנתונה, O ו O' מרכזי המעגלים הנתונים. (ציור 2).

בניה - בדרך הנתוח - שבנינו את המעגל המבוקש ונסמן את מרכזו ב X. את נקודות המגע נסמן ב C וב D. את נקודת החתוך של קו המרכזים OO' עם המעגלים נסמן ב A וב B ועם CD ב S.



ציור 2.

קל להוכיח ש D,C,B,A נמצאים על מעגל אחד. כי הרי

$$1 + \hat{A} = 2d \qquad 2 + \hat{B} = 2d$$
$$2 + \hat{D} + 3 = 2d \qquad 1 + \hat{C} + 3 = 2d$$
$$1 + 2 + 3 + \hat{A} + \hat{D} = 4d \qquad 1 + 2 + 3 + \hat{B} + \hat{C} = 4d$$

ועל כן $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C}$.

לפי משפט קטעי החתך לגבי המעגל המכיל את D,C,B,A נקבל

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SC}\cdot\overline{SD},$$

ובסמננו את נקודת-החתוך השניה של SP עם המעגל המבוקש ב P', נקבל

$$\overline{SC}\cdot\overline{SD} = \overline{SP}\cdot\overline{SP'}$$

ומכאן

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SP}\cdot\overline{SP'}$$

או

$$\overline{SP}:\overline{SA} = \overline{SB}:\overline{SP'}$$

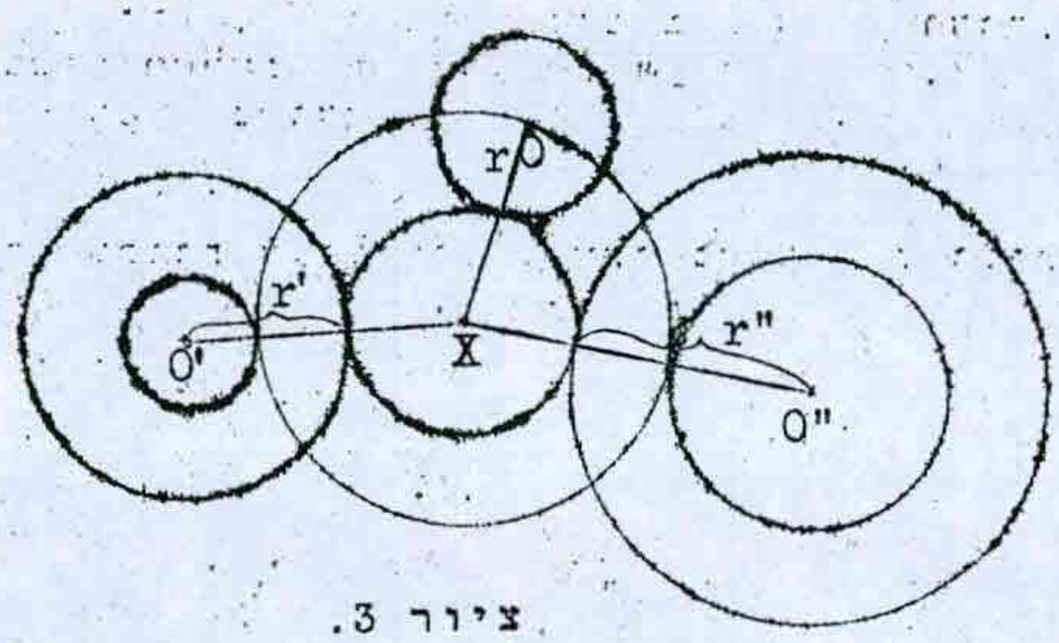
נסמן כעת את נקודת-החתוך השניה של SC עם המעגל O ב E. מיד רואים אז כי OE מקביל ל O'D (הוכח זאת!). מכאן

$$\overline{SO}:\overline{SO'} = \overline{OE}:\overline{O'D}$$

כלומר S מחלקת את $\overline{OO'}$ לפי יחס הרדיוסים, ועל כן אפשר לקבעה בנקל. הקטע SP' ייקבע בהתכנתי רביעי לקטעים SP, SA, SB, ובזאת תקבע גם הנקודה P'. המעגל המבוקש יצטרך להכיל את P ואת P' ולהשיק לאחד המעגלים הנתונים, ועל כן ייקבע לפי הבניה הקודמת. (כמה פתרונות?)

וכעת נוכל סוף-סוף לפתר את הבעית אפולוניוס עצמה.

יהיו אפוא O(r), O'(r'), O"(r") המעגלים הנתונים. (ציור 3) אם r הוא קטן-הרדיוסים, נבנה O'(r'-r) ו O"(r"-r), ולשני מעגלים אלה מעגל משיק אשר יכיל גם את O (לפי הבניה הקודמת). מרכזו של מעגל זה, X, יהא גם מרכז המעגל המבוקש (ברור?) - בעית אפולוניוס נפתרה. (כמה פתרונות?)



ציור 3.

היום אפשר לגשת לבעיה זו מנקודת מבט אחרת ולפתרה בבת-אחת, ואולי תהיה לנו עוד ההזדמנות לדון על כך באחת החוברות הבאות.

הידעת ?

11. במה עוסקת תורת הקבוצות?
12. מי הוא בעל המימרא "את המספרים הטבעיים יצר הקב"ה, כל שאר המספרים הם יצירת בשר ודם" ומה פירושה?
13. מהי בעית גולדבך?
14. מה הם "היסודות הטרנסאורניים"?

פרופ. א.ה. פרנקל

על המבנה המתמטי של הלוח העברי

המשך מחוברת ה', עמ' 1-2

II

בחלק הראשון עסקנו בשני חשבונות: בחשבון הימים המוכלים ב A שנים עבריות, ובחשבון הימים אשר ב A השנים היוליאניות המתאימות. מצאנו בסביל ההפרש, אחרי הגדירנו את המספרים a ו b, את הערך

$$1\frac{272953}{492480} - 1\frac{272953}{492480}a + \frac{b}{4} - \frac{313}{98496}A$$

נרם כדי להשתמש בזה למעשה, עלינו, ראשית, לקבוע את נקודות-המוצא (בשני הלוחות), ושנית, להביא בחשבון את ה"ידחיות".

מולד תוהו נקבע ל"בהר"ד", כלומר חל ביום השני של השבוע, $5\frac{204}{1080}$ שעות (= $\frac{467}{2160}$ יום) אחרי תחלת היום (שחלה בלוח העברי ב 6 שעות בערב). היום השני ההוא מתאים לפי החשבון היוליאני (המדומה) ליום 7 באוקטובר שנת 3761 לפה"ס. נעשה את חשבוננו, כפי שעשה זאת ג א ו ס ≑), כנגד פסח במקום ראש-השנה; מכיון שיום ראשון של פסח (שנת A) קודם ליום ראשון של ראש-השנה (שנת A+1) ב 163 יום, יעמד במקום אוקטובר $7\frac{467}{2160}$ אפריל $27\frac{467}{2160}$ או מרס $58\frac{467}{2160}$ (סבת ה"סבוך" הזה תתברר מיד). על התאריך הזה נוסיף עוד ¼ יום כדי להוציא באופן אוטומטי את הדחיה "י'ח" או "מולד זקן" הדוחה ראש השנה למחרתו אם המולד חל בצהרים (שזמנם ב"ח שעות, לפי החשבון העברי) או מאוחר מזה. על פי הדברים האלה נקבל את הבטוי

$$60\frac{10069}{492480} - 1\frac{272953}{492480}a + \frac{1}{4}b - \frac{313}{98496}A,$$

והאילו

$$58\frac{467}{2160} + \frac{1}{4} + 1\frac{272953}{492480} = 60\frac{10069}{492480}$$

את הבטוי הזה נשים שוה ל M+m, בציינו את המספר הטבעי שבו ב M ואת השבר האמתי (שאפשר תמיד לצמצמו לפחות ב 19) ב m; אז ב ד ר ך כ ל ל י ח ו ל ר א ש ו ן ש ל פ ס ח ב י ו ם M ב מ ר ס, או (אם M > 31) ביום (M-31) באפריל.

ואולם נשארים המקרים היוצאים מן הכלל, הנקראים "ידחיות", והם:

1) "ילא אדו"ו ראש", לכן לא בד"ו פסח; כלומר אם יום א' של פסח חל לפי החשבון הנ"ל כאחד הימים שני, רביעי, ששי בשבת, ידחוהו למחרתו.

2) "גש"ט רי"ד בשנה פשוטה גרוש". זאת אומרת, אם A+1 תהיה שנה פשוטה, ומולד תשרי לשנת A+1 חל ביום שלישי ב $9\frac{204}{1080}$ שעות או מאוחר מזה, ידחו רי"ה - ומכיון שביום ד' אי אפשר לפי 1), ידחוהו ביומיים. לאמור: אם שנת A קודמת לשנה פשוטה, וא' של פסח חל לפי חשבוננו בראשון בשבת (זהו המקרה הנדיר, בפרט לעת-עתה, של ערב פסח שחל להיות בשבת), ידחוהו ליום ג', במקרה שקיים

$$m \geqslant \frac{9\frac{204}{1080} + 6}{29} = \frac{1367}{2160}$$

3) "בטו"ו תקפ"ט אחר עיבור עקוב מלשרוש". זאת אומרת, אם A שנה מעוברת ומולד תשרי לשנת A+1 חל ביום שני ב $15\frac{589}{1080}$ שעות או מאוחר מזה, ידחו רי"ה למחרתו (יום שלישי). לאמור: אם A שנה מעוברת, וראשון של פסח חל לפי חשבוננו בשבת, ידחוהו ליום ראשון במקרה (הנדיר) שקיים

$$m \geqslant \frac{15\frac{589}{1080} + 6}{24} = \frac{23269}{25920}$$

מהגדרתן זו של הדחיות נופק כי עלינו לקבוע עוד את י ו ם ה ש ב ו ע C שבו חל יום M במרס, כדי להכריע את תאריכו האמיתי של פסח או ראש השנה. (מובן שהצורך הזה בידיעת יום השבוע שבו חל המולד איננו תלוי בהפיכת תאריך מן הלוח העברי ללוח אחר, אלא נשאר גם בתוך הלוח העברי בעצמו.)

≑) פרטים עליו תמצא בחוברת ה', עמ' 11.

בהתאם למה שנאמר לעיל, חל ראשון של פסח לשנת A=0 ב M=58 למרס בשנת (c=0); כלומר, קיים כנגד A=0:

$$c \equiv M + 5 \ (\text{modulo } 7) \quad (\doteq$$

מאידך, A השנים היוליאניות מיום M במרס לשנת 0 עד יום M במרס לשנת A מכילות, כאמור בחלק הראשון,

$$365\,A + \frac{A-b}{4} \equiv 3A + 5b \ (\text{mod. } 7)$$

יום. (זכור שהמספר $\frac{A-b}{4}$ מונו שלם). <u>לכן יהיה ערכו של c בשנת A שארית החלוק של (M+3A+5b+5) ב 7.</u>

כדי לנסח בפשטות את הדחיות, נעמוד על כך כי מתחלת המאמר נובע בנקל: A היא שנה מעוברת אם a<7, שנה פשוטה אם a≥6. לכן תהיה A+1 שנה פשוטה אם שארית החלוק של (a+7·1) ב 19 גדולה מ 6, כלומר אם a<12, המסקנה הטופית תהיה אפוא:

ראשון של פסח לשנת A חל בדרך כלל ביום M במרס (או M-31 באפריל). יוצאים מן הכלל שלשת המקרים הבאים:

1) אם c שוה לאחד הערכים 2,4,6, יחול פסח ביום (M+1) במרס.

2) אם c=1, a<12, $m \geqslant \frac{1367}{2160}$, יחול פסח ביום (M+2) במרס.

3) אם c=0, a<7, $m \geqslant \frac{23269}{25920}$, יחול פסח ביום (M+1) במרס.

כל התאריכים האלה הם יוליאניים; כדי לקבל את התאריך הגריגוריאני, שהוא הלוח הנהוג עתה כמעט בכל הארצות הנוצריות, צריכים להוסיף גודל קבוע (ההפרש בין שני הלוחות), השוה ל 13 בשנים 1900 עד 2099 והשוה בדרך כלל ל $S - \left[\frac{S}{4}\right] - 2$ (**), אם S הוא המספר "המאיי" הנוצרי $\left[\frac{A-3760}{100}\right]$.

התיאור והחשבונות הנ"ל מבוססים על הנוסחה שנתן ג א ו ס בשנת 1802; וכן על שנוי בנוסחה זו אשר נתן מחבר המאמר הזה בשנת 1910, ועל ההוכחה לנוסחת גאוס שנתן ה מ ב ו ר ג ר בשנת 1896.

<u>תרגילים:</u> א) מלחמת-העולם הראשונה פרצה בתשעה באב התרע"ד. לאיזה תאריך גריגוריאני מתאים זה?

ב) מהי האומדנה (ההסתברות; כלומר היחס בין מספר המקרים החיוביים ומספר כ ל המקרים האפשריים) לכך ש ע ר ב פ ס ח יחול בשבת (תופעה שיש בה לעת עתה הפסקה של 20 שנה, מתר"ץ עד תש"י)? ומהי האומדנה לכך שראשון של פסח יחול ביום ג', או ביום ה', או בשבת? (כל דבר לחוד.)

ג) אחרי עבור כמה שנים ישוב סדר קביעות השנים העבריות, דהיינו התאריכים בתוך השבוע, בדיוק לסדר הראשון? (לאמור, מהו המחזור השלם ללוח העברי?)

(*) נשתמש כאן, לשם פשטות, בסמון הרגיל של קונגרואנציה, ובסימנה ≡. הקונגרואנציה $a \equiv b (\text{mod. } m)$ רוצה לומר: (a-b) מתחלק ב m.

(**) [a] פירושו: המספר השלם הגדול ביותר הקטן מ a או שוה לו.

המשך בעמוד 4

כתובת המערכת:

הפיס למתמטיקה ולפיסיקה
רחוב אוסישקין 50
י ר ו ש ל י ם

ר א ל ה שמות התלמידים שהגישו לגו פתרונות לבעיות שהוצגו בחוברת החמישית לפי מושלותיהם. המספרים אחרי השמות הם מספרי הבעיות שנפתרו.

י ר ו ש ל י ם

הגימנסיה העברית

מ. משלר, ו': 72, 73, 78, 79, 80, 83, 84.

בית הספר התיכון

י. אליאסוב, ז': 77, 80
ע. ינובסקי, ז': 83, 84

בימ"ד למורים "מזרחי"

ס. פרידמן, ג': 72 (חלקית), 73, 75, 77, 78, 79, 80, 83
א. וינוגרד, ג': 78, 80, 83

ת ל - א ב י ב

גימנסיה "בלפור"

ע. גולדשלק, ז': 72, 73, 74 (חלקית), 75, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84
ע. דה-שליש, ז': 72, 73 (חלקית), 74 (חלקית), 75, 77, 78, 79, 80, 83, 84
י. טיטונוביץ, ז': 72, 77, 78, 79, 80, 83, 84
מ. מלינוביץ, ז': 72, 73 (חלקית), 74 (חלקית), 75, 77, 78, 80, 83, 84
י. בן-יהודה, ו': 73 (חלקית), 77, 78, 79, 80, 83, 84.
צ. גושטל, ו': 77, 78, 79, 80, 83, 84
ד. גינצבורג, ו': 73 (חלקית), 77, 78, 79, 80, 83, 84
מ. ורשבטקי, ו': 77, 78, 79, 80, 83, 84
מ. לימנק, ו': 73, 77, 78, 80, 83, 84
י. מקובקי, ו': 72, 73, 75, 76 (חלקית), 77, 78, 79, 80, 83, 84.
רבקה קפלן, ו': 77, 79, 80, 83, 84
ז. רוששילד, ו': 78, 80, 83, 84

גימנסיה "מזרחית"

א. בכרך, ז': 77, 78, 79, 80, 83
ב. זינגשטין, ז': 77, 78, 79, 80, 83
ו. זנגר, ז': 72 (מסובך), 73, 78, 79, 80, 83, 84
א. קולבר, ז': 72, 77, 78, 79, 80, 83, 84

גימנסיה "שלי"

ש. ויינגרטן, ח': 72, 73 (חלקית), 74 (חלקית), 75, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 81
מ. קליין, ח': 72, 73, 74 (חלקית), 75, 76, 77 (חלקית), 78, 79, 80, 83, 84, 81
י. שפיץ, ח': 72, 75, 76 (חלקית), 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84
ע. טפיר, ח': 81, 83

ביה"ס "מונטפיורי"

מ. הלוי, ז': 72, 73, 77, 78, 79, 80, 83, 84 (חלקית)
ש. אקשטין, ו': 79, 80
מ. מידוף, ו': 79, 80

ביה"ס התיכוני למסחר

צפורה בלבן, ח': 72, 73, 74 (חלקית), 75, 76, 77, 78, 79, 80, 84

ח י פ ה

ביה"ס הרל"אלי "לבנה"

מ. בושנויזר, ז': 73, 74 (חלקית), 77, 80, 83, 84
א. דויצר, ז': 77, 83, 84

ל י ב ע י ו ת י .

72. c,b,a הן שלש ספרות רצופות (לאו דוקא בסדר זה) בשיטת-ספירה מסויימת וקיים

$$\overline{cc}^{\,2} = \overline{aabb}$$

מצא את הספרות ואת בסיס הספירה. כמה פתרונות?

נניח כי הבסיס הוא x, $\overline{cc}$ שוה אז ל $c(x+1)$, ולכן $\overline{cc}^{\,2} = c^2(x+1)^2$.
לפי הנתון, מתחלק אפוא גם $\overline{aabb}$ ב $(x+1)^2$, ולכן $\overline{aOb}$ ב $(x+1)$.
אולם, אם ax^2+b מתחלק ב $(x+1)$, מתחלק בו גם $a+b$, כי

$$a+b = (ax^2+b) - a(x^2-1) \qquad (1)$$

וגם המחוסר וגם המחסר שבאגף ימין מתחלקים ב $(x+1)$. אולם $a,b,c < x$.
לכן

$$a + b = x + 1 \qquad (2)$$

לפי (1) נקבל כעת $ax^2+b = a(x+1)(x-1)+(x+1) = [a(x-1)+1](x+1)$

ועל-כן

$$c^2 = a(x-1)+1 \qquad (3)$$

או

$$(c+1)(c-1) = a(x-1)$$

אולם $c-1 < x-1$, לכן $c+1 > a$, ומכאן גם $c > a$. מששת הסדרים האפשריים של c,b,a באים בחשבון רק עוד שלשה: $c > a > b$, $c > b > a$, $b > c > a$; עיי הצבת הקשרים המתאימים ב (3) ובעזרת (2) מתקבלות משואות רבועיות עבור c, הנותנות סיה רק 2 פתרונות הבאים בחשבון:

(א) $33^2 = 2244$ לפי הבסיס 5 (ב) $66^2 = 5544$ לפי הבסיס 8.

73. הסבר את הכלל הבא: כדי לבדק אם לא נפלה טעות בחבורם של מספרים אחדים בני ספרות אחדות, מחסרים מן החתך (סכום המפרות) של הסכום את סכום חתכי המחוברים. אם ההבדל המתקבל אינו כפולה של 9, יש שגיאה, אחרת כדאי להתערב ביחס של 8 נגד 1, לפחות, שאין שגיאה.

לפי קליין: כל מספר קונגרואנטי לחתכו (mod. 9) (ראה עמ' 6 של חוברת זו). לכן סכומם של מספרים אחדים, וכן חתכו, קונגרואנטי לסכום חתכיהם (mod. 9). אם החתך של הסכום הנבדק אינו קונגרואנטי לסכום חתכי המחוברים, אזי הסכום עצמו אינו יכול להיות קונגרואנטי לו, ויש שגיאה בחשבון. אם החתך של הסכום הנבדק קונגרואנטי לסכום חתכי המחוברים, אזי גם הסכום עצמו קונגרואנטי לו, והשגיאה, אם ישנה, היא כפולה של 9. מכיוון שסכוי של שגיאה כזאת הוא 1/9 של כל השגיאות, הרי הסכוי של תשובה נכונה הוא לפחות 8/9.

על הכפל חל כלל דומה הנקרא "מאזני החשבון" (השוה "מבוא למתמטיקה", עמ' 39).

74. הוכח כי אפשר לתאר כל מספר באופן יחיד בסכום והבדל של חזקות שונות של 3.

בעמ' 9 של חוברת ה' בזכר המשפט שאפשר לתאר כל מספר טבעי N בצורה

$$N = e_0a^0+e_1a^1+\ldots+e_n\cdot a^n \qquad (1)$$

כאשר a הוא מספר טבעי כלשהו, וה e-ים מספרים טבעיים הקטנים מ a או 0, והוכחת משפט זה לגבי המקרה המעניין אותנו, $a=3$, היא קלה. מכיון שכל איבר 2.3^k המופיע בתיאור ניתן להחלפה עיי $3^{k+1}-3^k$, קל להוכח שמאפשרותו ויחידותו של התיאור (1) נובעת האפשרות והיחידות של התיאור המבוקש.

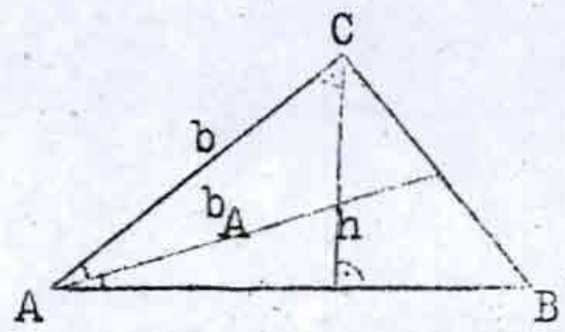
הוכחה שניה ליחידות: המספר הגדול ביותר הניתן לתיאור בעזרת n החזקות הראשונות של 3 הוא

$$3^0+3^1+\ldots+3^{n-1} \text{ השוה ל } \frac{3^n-1}{2}$$

לפי נוסחת הסכום של טור גיאומטרי. מאידך אפשר ליצור n חזקות אלה 3^n סכומים והבדלים, כי כל איבר יכול להופיע עם 3 מקדמים: 1+, 0, 1-. אחד הצרופים האלה נותן 0 (כאשר כל המקדמים הם 0), ומחצית הנותרים נותנת מספרים חיוביים, המחצית השניה מספרים שליליים. מכיון שלכל $\frac{3^n-1}{2}$ המספרים עד $\frac{3^n-1}{2}$ ישנו לפחות תיאור אחד, ויש בדיוק $\frac{3^n-1}{2}$ תיאורים עבורם, יש לכל אחד מהם ב ד י ו ק תיאור אחד!

75. במשולש ישר זווית נתון, הגובה על היתר. בת כמה מעלות צריכה להיות אחת הזוויות החדות, כדי שלחוצה שלה יהיה אורך מינימלי?

לפי צפורה נלבן:



$$b = \frac{h}{\sin A}\ ,\ b_A = \frac{b}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$b_A = \frac{h}{\sin A \cos\frac{A}{2}}$$

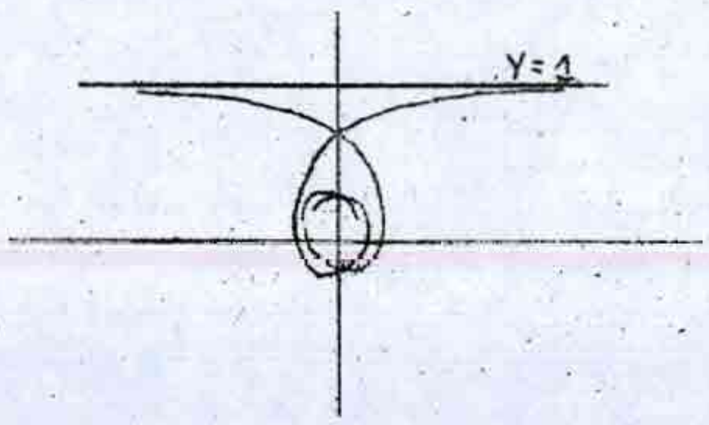
b_A יהיה מינימלי, כאשר $\sin A \cos\frac{A}{2}$ יהיה מכסימלי, כי h הוא קבוע.

$$\sin A = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$$

נציב x במקום $\frac{A}{2}$ ונגזור את $f(x) = \cos^2 x \sin x$.
f(x) יקבל מכסימום, כאשר $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; מכאן $\hat{A} = 70^\circ 32'$.

76. חקר את התנהגות הלוליון ההפרבולי $r = \frac{1}{\varphi}$, כאשר φ , בערכו המחלט, שואף ל 0, ואם יש לו אסימפטוטה(-ות), קבע את משוואתה(-ן).

הלוליון מורכב משני ענפים סימטריים אשר להם אסימפטוטה משותפת y=1, כי $y = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, השואף כידוע ל 1, כאשר φ שואף ל 0.

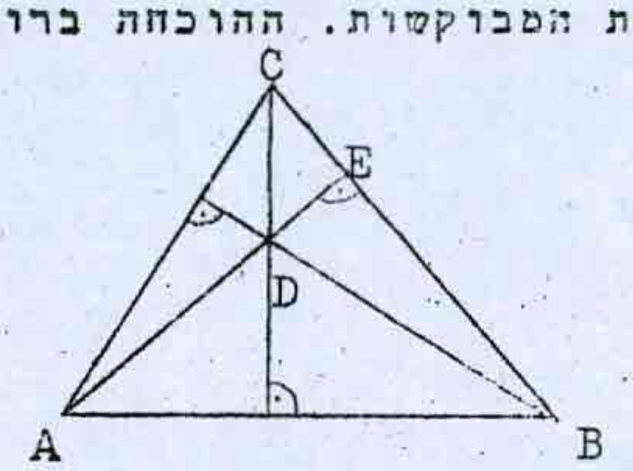


77. במישור מצויינות 2 נקודות. קבע, בעזרת המחוגה בלבד, עוד שתי נקודות הקובעות אתן רבוע אשר בו הנקודות הנתונות הן (א) קדקדים סמוכים (ב) קדקדים נגדיים.

לפי אליאסוב: תהיינה A, B הנקודות הנתונות.

(א) בונים E הסימטרית ל A לגבי B (בניה 4 במאמר "בניות הנדסיות..." בחוברת א'). חגים $B(\overline{AB})$. האמצע של $\overset{\frown}{AE}$ (בניה 6), C, והנקודה D, המשלימה את A,B,C למקבילית, הן הנקודות המבוקשות. ההוכחה ברורה.

(ב) את האמצע של $\overline{AB}$ (בניה 8) מסמנים ב E. חגים $E(\overline{EA})$. אמצעי שתי הקשתות הנוצרות $\overset{\frown}{AB}$, C ו D, הן הנקודות המבוקשות. ההוכחה ברורה.



78. הוכח: אם A,B,C,D היא רביעית צמתים, אז

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2+\overline{AD}^2 .$$

$$AB^2+CD^2 = (AE^2+EB^2) + (CE^2+DE^2) =$$

$$= (AE^2+CE^2) + (EB^2+DE^2) = AC^2+BD^2$$

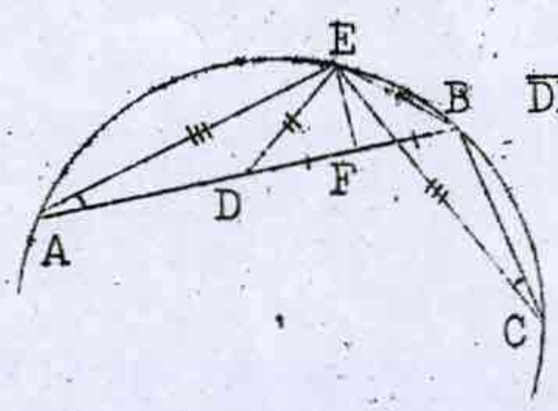
וכו'.

79. A,B,C נמצאות על מעגל אחד, כך ש $A\hat{B}C$ היא קהה ו $\overline{AB} > \overline{BC}$. E היא האמצע של $\overset{\frown}{AC}$, F עקב האנך המורד מ E על AB. הוכח: $\overline{AF} = \overline{FB}+\overline{BC}$.

$\overset{\frown}{AE} > \overset{\frown}{BE}$, לכן $\overline{AE} > \overline{BE}$, לכן $\overline{AF} > \overline{BF}$. על AF ישנה נקודה D, כך שקיים: $\overline{FD} = \overline{FB}$; מכאן: $\overline{DE} \cong \overline{BE}$

$\overline{AE} \cong \overline{CE}$! $\Delta CBE \cong \Delta ADE$.

(לפי שתי צלעות והזווית שבין ה ק ט נ ה שבהן! מנין אפשר שהם באמת חופפים?). $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

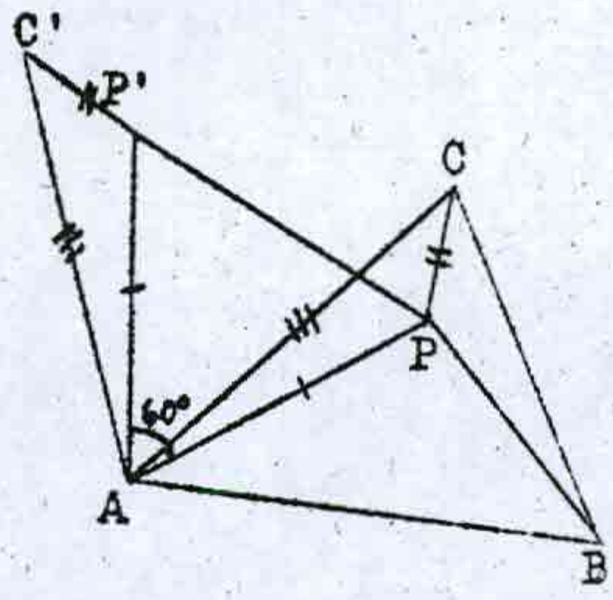


$$\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = \overline{FB} + \overline{BC}$$

.80 שטח הצלעות של משולש קובעים משלש חדש. אמצעי צלעותיו קובעים משלש שלישי, וכו'. אמידו נקודה מתכנסים המשלשים הללו?

לכל משלש ישנו מרכז-כבד משותף עם משלש האמצעים שלו (ראה "קו-אוילר..." בחוברת ב') מכיוון שמרכז-הכבד נמצא תמיד בפנים המשולש, מתכנסים אליו המשלשים הנדונים.

.81 מצא את הנקודה אשר סכום רחקיה מקדקדי משלש נתון הוא מינימלי. -(בעסק רק במקרה שאין זוית במשולש הגדולה מ 120°). יהא ABC המשלש הנתון, P נקודה כלשהי בפנים לו. נסובב את המשולש APC ב 60° בכוון הנגדי ל B. המשלש APP' הוא שוה-שוקים וזוית-הראש שלו היא בת 60°, על כן הוא שוה-צלעות, מכאן $\overline{AP} \cong \overline{PP'}$. מכיוון שגם $\overline{CP} \cong \overline{C'P'}$, יוצא שסכום רחקי P מקדקדי המשלש $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ שוה לסכום הקטעים $\overline{C'P'}+\overline{P'P}+\overline{PB}$ המהוים בדרך-כלל (וכן בציורנו) קו שבור. מכיוון שקצות הקו הזה הם קבועים (מצבה של C' אינו תלוי ב P!), יהיה ארכו מינימלי, אם P ו P' תמצאנה על BC'. מה שיקרה כאשר הזויות P'PB ו C'P'P תהיינה שטוחות, וזה מתנה כי APB ו AP'C' ולכן גם APC תהיינה זויות בנות 120° כל אחת.



הנקודה המבוקשת היא אפוא אותה נקודה שממנה רואים את צלעות המשלש בזויות שוות. (כיצד בונים אותה?) - פתרון זה הוא אחד היפים בהנדסה האלמנטרית כולה.

.83 למה שוה מכפלת כל הגטויים מן הצורה $(x-a)$, כאשר a עובר את כל האותיות של האלפא-ביתא הרומית?

המכפלה שוה ל 0, כי אחד הגורמים בה, $(x-x)$, שוה ל 0.
שים לב כי השאלה הזאת מסתמכת על ההחלפה הנפוצה בין מספר ובין מספרו!

.84 $\frac{UB}{BU}$ היא הצורה המצומצמת של השבר האמתי $\frac{WPA}{USA}$. זהה את ערכי הספרות והראה כי הפתרון הוא יחיד.

.85 ≑ משויון הספרות האחרונות של המונה והמכנה בצורה המרחבת נובע כי

.86 ≑ (א) $B=U+5$ ($B>U$ כי השבר הוא אמתי!) ו"המצמצם" הוא זוגי, או
(ב) "המצמצם" הוא 5, A הוא 5, B ו U מספרים אי-זוגיים.

.87 מבדיקת המקרים המתקבלים יוצא כי במקרה (א) אין פתרונות ובמקרה (ב) מתקבל הפתרון היחיד

.88 $\frac{185}{365} = \frac{37}{73}$.

ת ש ו ב ו ת ל " ת י ד ע ת " .

.89 ≑ 7. מי המציא את החשבון האנפיניטסימלי?

.90 על שאלה זו התנהל ויכוח ארוך וסוער. היום סבורים שבראשית המאה ה-17 התגבר הצורך לשיטות חדשות לשם טפול בבעיות שטחים, משיקים ומהי-

.91 ≑ רויות במדה כזאת, שבעת ובעונה אחת פותחו שיטות אלו במקומות שונים. אחרי הכנות מסויימות שניתנו ע"י קפלר, קוליארי, פרמה ופסקל (Pascal, Fermat, Cavallieri, Kepler) הכין המתמטיקון והפיסיקון האנגלי ניוטון

.92 (I. Newton) (שנת יום הולדתו ה-300 חוגגים השנה בכל העולם) לדפוס מחקר בשם "Methodus fluxionum et serierum infinitarum" עוד בשנת 1671,

.93 ≑ אולם ספר זה הופיע רק בשנת 1736. לעומת זאת התחיל הפילוסוף והמתמטיקון ליבניץ (G.W. Leibniz) להשתמש בסמלים החדשים שהמציא עבור החשבון

.94 האנפיניטסימלי בשנת 1675 ובדפוס החל משנת 1684. סמלים אלה נשארו עד היום. ריב גדול פרץ בין תומכי ניוטון לבין תומכי ליבניץ על שאלת הראשונות של ההמצאה, וריב אשר לא חמיד התנהל על טהרת המדעיות.

.8 היכן היה מרכז המתמטיקה במאה ה-17?

בראשית המאה ה-17 היה מרכז המתמטיקה באיטליה, מקום שם פעלו גליליי, טוריצ'לי, קוליארי ואחרים. באמצע מאה זו עבר מרכז-הכובד לצרפת אשר שם פעלו דקרט, פרמה, פסקל, דזרג (Desargues) אשר קידמו את המתמטיקה לכל עבפיה במדה עצומה.

דקרט (ראה חוברת ה', עמ' 11) המציא את ההנדסה האנליטית, פרמה הדיסקריבטיבית.
פיתח את תורת המספרים, פסקל את תורת הסבויים, דזרג את הגיאומטריה

10. מהן 4 הבעיות המפורסמות ביותר שהטאירה המתמטיקה היונית ללא פתרון?
הבעיות הן: (1) הפיכת העגול לרבוע שוה-שטח, "תרבוע העגול"
(2) חלוקת זוית כלשהי ל 3 זויות חופפות, "שלוש הזוית".
(3) קביעת מקצוע הקוביה בעלת נפח כפול מזה של קוביה נתונה, "הבעיה הדלית" (שם זה ניתן לה, כי בעיה זו בתעוררה בקשר עם הגדלת מזבחו של אפולון בדלוס (Delos) שהיתה לה צורת קוביה).
(4) חלוקת היקף המעגל ל 7 קשתות חופפות ובשמוש של סרגל ומחוגה בלבד.

כל הבעיות הללו מצאו את פתרונן הסופי לפני זמן קצר בערך, תוך 150 השנים האחרונות, בזאת ש ה ו כ ח שאין לבצע את הבעיות הללו בהגבלות הניתנות.

על שאלה 9 נפרסם בקרוב מאמר מקיף.

בעיות

הפתרונות לבעיות - גם לאלה שהוצגו בתוך המאמרים - צריכים להגיע למערכת לא יאוחר מן ה-15 באפריל. ציינו בתשובותיכם את המספר הסדורי של הבעיה וחזרו על הנוסח המלא שלה. הבעיות המסומנות ע"י ≑ מבוססות על חומר הנלמד בכתות ה'-ו' בלבד, ועל-כן תנתן לתלמידי הכתות האלה זכות-בכורה בפרסום פתרונותיהם. -
תשובות ללא הוכחות בצדן - לא תובאנה בחשבון.

≑ 85. הוכח כי $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ אינו שוה לעולם למספר שלם.

≑ 86. מצא מספר שחזקתו השלישית היא מספר בעל 4 ספרות שסכומן שווה למספר המבוקש עצמו. כמה פתרונות?

87. מצא את זוגות המספרים המקיימים את השויון $x^y=y^x$ והוכח כי ביניהם יש רק זוג אחד של מספרים שלמים.

88. הוכח כי
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots+\binom{n}{n}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

≑ 89. במעגל נתונים שני רדיוסים. בנה סיתר שייחלק על-ידיהם לשלושה קטעים חופפים.

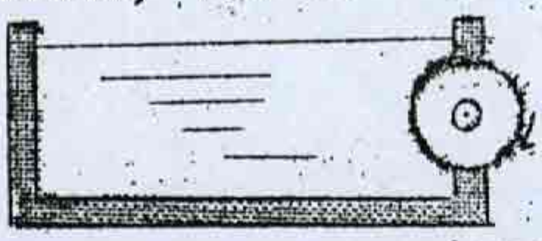
90. בנה משולש שוה-צלעות שקדקדיו יימצאו (א) על שלשה מקבילים נתונים (ב) על שלשה מעגלים מסותפי-מרכז נתונים.

≑ 91. הוכח כי הצלעות הנגדיות במשטח מוקף מעגל (או המשכיהן) נחתכות ב 3 הקודות הנמצאות על ישר אחד.

92. מבין כל המטולשים בעלי היקף נתון וזוית נתונה קבע את המטולש בעל השטח הגדול ביותר.

≑ 93. האפשר לשאב מים רותחים במשאבה רגילה?

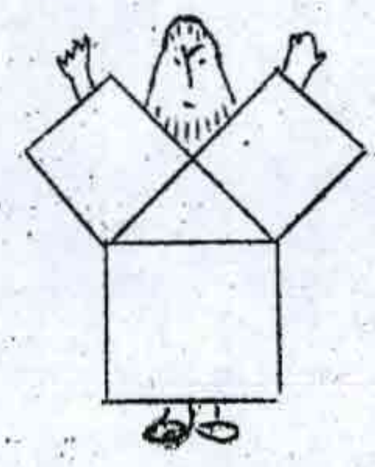
94. גליל כבד - חצין במים וחצין באויר - עלול לסובב על ציר (הנמצא במישור הדופן). הלחץ הארכימדי "מפחית" את "משקלו" של חצי-הגליל השקוע במים. מוכרחה אפוא להתקיים תנועת סבוב בכוון החץ - לאין קץ, ובזאת היינו יוצרים פרפטואום מובילה. הכן?



שיחת חולין מתמטית

95. "מה לך, ראובן, כי נפלו פניך?", פנה אל מיודענו "הממציא" המורה למתמטיקה בשעור האחרון. "לפני ימים הציע לי חבר מכתה מקבילה לפתר את המשואה הבאה

$$\frac{9}{x-4}+\frac{6}{x-9}=\frac{5}{x-8}+\frac{10}{x-5}$$



אמנם משואה ממעלה שלישית לפני, חשבתי בלבי, אולם לפני חדשים לימד אותי בן-דודי כיצד לפתר משואות ממעלה זו, נגשתי אפוא ישר לעבודה, הרחבתי במכנה העקרי בשני האגפים וקבלתי

$$\frac{9x-81+6x-24}{x^2-13x+36}=\frac{2x-25+10x-80}{x^2-13x+40}$$

כנסתי ומצאתי שהמונים שוים, אם כן גם המכנים שוים, כלומר - 136=40! עיני חשכו, אולם כאשר ראיתי את פניו הצוחקים של חברי, הבינותי שרצה להפילני בפח. בתרועת נצחון אמרתי לו שאין למשואה זו פתרון, היא משואה בלתי-אפשרית. ואז הציע לי בתמימות לנסות להציב 7 במקום x, עשיתי זאת - וקבלתי זהות! x=7 הוא פתרון! התחלתי שוב לעבר על החשבון שעשיתי - הכל בסדר. הרחבתי במכנה העקרי של שני האגפים - אולם פתרון לא קבלתי. ולי צריך לקרות דבר כזה", גמר כמעט בבכי.

מי יעזר לראובן לחזר לשיון-נפשו?

96. בשוב לבו עליו מיין בליל חג-המולד האחרון, ספר הקפטן ב., קצין בצבא הבריטי, את הספור הבא לפני הקצינים והסמלים של יחידתו:

"לפני 26 שנה, ואני אז טוראי באחד הגדודים האנגליים שלחמו על אדמת צרפת, במצעד שערכה פלוגתנו אל העיר ק., שאל אותי חברי, שצעד על-ידי, את השאלה הבאה:

'4 כושים וקוף אחד מצאו אשכל בננות, בשמחה רבה נשאוהו הכושים לסוכתם, הורידו את הבננות והחליטו ביניהם לחלקן רק למחרת, כי השעה היתה מאוחרת. בלילה נתעורר אחד הכושים ובהיותו רעב, ניגש לערמת הבננות, חילקה ל 4 ערמות שוות ומצא שנשארה בננה אחת. על כן נתן אותה לקוף, אכל את חלקו וחזר למשכבו. אחריו התעורר הכושי השני, וברעבונו נגש לבננות, ערם את שלש הערמות שמצא לערמה אחת, חלקה ל 4 ערמות, נתן את הבננה היחידה, שנותרה שוב, לקוף, אכל את חלקו ונרדם. וכן קרה גם לכושי השלישי ואחריו לרביעי. בבוקר קמו ארבעת הכושים, אספו את שלש הערמות הקטנות שמצאו לערמה אחת, חלקוה לארבעה חלקים שוים ושוב - נותרה בננה עבור הקוף. כמה בננות היו באשכל?'

בזמן המצעד לא הספיק חברי להסביר לי כיצד לפתר את השאלה הזאת, ולמחרתו נפל בקרב. את התשובה הנני יודע אמנם, אך לא את הדרך כיצד למצא אותה. אולי יעזר לי אחד מכם?" -

לקצין היה מזל הפעם... ביחידה זו ממרת אחד מעורכי ה"דפים" שהתגייס.

97. היכן יש יותר נקודות, על קטע או על קו ישר?

דאר המערכת

(א) החוברת הבאה, כחוברת האחרונה בשנת למודים זו, תהיה שוב מוקדשת בעקרה לעבודות תלמידים.

(ב) ב-1 במאי בערך תצא החוברת הראשונה בסדרת חוברות-העזר שהננו מתכוננים להדפיס - לעת עתה בסטנסיל - כתוספות ל"דפים". ה"סבוא לתורת המספרים" מאת א. רובינשטין יכיל כ-20 עמוד ומחיר כל חוברת יהיה 50 מא"י.

(ג) בגלל מעוט פותרי התרגילים שהוצגו במאמר "למציאת גדול הגורמים של שני מספרים" דחינו את פרסום הפתרונות לחוברת הבאה. מן הראוי לנצל את ההזדמנות הנוספת הזאת להתעמק במאמר זה!

יוני

דב

של צל
הוא נ
של מ
אפשר
מרכב
ארבע
בקלוח
אמנם
המקבי

(~),
(=),
הצד ה
המטות

אם הן
במראה
השם ה

דיוק:
מעתקו

מסולם
הראשו

בג=בד
לכן א
אך לא
אד=בג
הפנות

במשול
נקח פ
סני ה
יכולו
יהיה

מחברת
דד' ס
בעליל
הנטיה