גליון להתמטיקה אלגברית

לנוער המתלמד

אוקטובר 1943 | חוברת ח' | תשרי תשיד

שמואל אפפלבוים, חנה שטרן

תורת החבורות.

בהתפתחות המתמטיקה של מאת השנים האחרונות תופסת מקום חשוב תורה אחת, שקוראים לה בשם תורת-החבורות. חשיבות התורה הזאת היא בעקר בכך, שהיא כוללת הרבה תחומים, אשר בעצם תכנם הם שונים, והמאחד אותם הוא רק זה, שכולם מקימים מספר מסוים של תנאים. על-ידי-כך הוכנס סדר ובהירות לענפים רבים של המתמטיקה. התורה הזאת מאפשרת להוכיח משפטים כלליים (בגון קיום פתרון למשואות, כפי שנראה עוד להלן), המתקימים בבת אחת בכל התחומים, הנכללים במושג החבורה.

ברצוננו להביא כאן לפניכם את יסודות התורה הזאת.

I

בכל למוד המתמטיקה אנו עוסקים בעצמים מתוך אספים שונים. האספים נבדלים ביניהם על-ידי תכונות עצמיהם. למשל: בחשבון הרגיל עוסקים באוסף המספרים החיוביים או באוסף השברים וכו'. בהנדסה מטפלים באספים של נקודות, ישרים, משולשים וכו'. באלגברה דנים באספים, שהעצמים שלהם הם פולינומים (רבי-אבר), או באספים של פונקציות כל שהן. לאוסף כזה של עצמים קוראים במתמטיקה בשם ק ב ו צ ה , לעצמים השיכים לקבוצה קוראים בשם א י ב ר י ם . מכל קבוצה דרוש רק שיהיה ידוע, אילו הם האיברים השיכים לקבוצה, כלומר: מהן התכונות, שעצם מסוים צריך לקים, כדי שיהיה איבר של הקבוצה. לפי זה נוכל לדבר: בחשבון - על קבוצת המספרים החיוביים או על קבוצת המספרים השלמים וכדומה; בהנדסה, נעסוק למשל, בקבוצות של זויות ובקבוצות של משולשים, ושוב באלגברה נדבר על קבוצות של פולינומים או קבוצות של פונקציות.

בבדקנו את הקבוצות הנ"ל מוצאים אנו, כי ברבות מהן קימות פעולות בין האיברים, כלומר שעל-ידי צרוף של שנים או יותר מאברי הקבוצה אנו מקבלים עצם חדש. צרופים כגון אלה הם החבור, החסור, הכפל והחלוק, העלאה לחזקה, הוצאת שורש וכו'. יכולים להיות גם צרופים, שלכאורה הם מוזרים ובכל זאת הם בעלי חשיבות רבה. לדוגמה נביא לפניכם כאן צרוף כגון זה:

דוגמה א. תהי הקבוצה שבה אנו רוצים להכניס את הפעולה החדשה, קבוצת כל המספרים אי-השליליים (ז"א, כל מספר שיש לו התכונה שהוא גדול או שוה לאפס יהיה איבר של הקבוצה ושום מספר שאין לו התכונה הזאת לא ישתיך לקבוצה). נכניס עכשו בין האיברים של הקבוצה הזאת את הצרוף הבא: מכל שני איברים של הקבוצה (ז"א, שני מספרים אי-שליליים) ניצור את הממוצע החשבוני שלהם. באופן כזה אנו מקבלים על-ידי צרוף כל שני איברים של הקבוצה עצם חדש. אתם רואים אפוא, שחוץ מן הפעולות הידועות לכם, אפשר להכניס גם פעולות אחרות לתוך קבוצות נתונות, שגם בהן מצרפים שני איברים ומקבלים עצם חדש.

אתם זוכרים בודאי, שבהתחלת למוד האלגברה הכנסתם את חשבון האותיות, כדי שאפשר יהיה לדבר על מספר סתם מבלי לפרש פלוני או אלמוני. באותו אופן נקבע ביניינו עכשיו סימן כללי לפעולות. אם נרצה לסמן צרוף כל שהוא של שני איברים a ו b מבלי לפרש אם פעולה זו היא חבור או חלוק או איזו פעולה אחרת נכתוב a&b (קרי: a מצורף לb). ובכן במקרה של חבור a&b פרושו a+b (להבא נשתמש במקום המלה "פרושו" בסימן (=). ובכן נכתוב a&b (=)a+b. במקרה של כפל יהיה a&b (=)a.b. במקרה של פעולה לפי הדוגמה א יהיה a&b(=)(a+b)/2.

אם נסתכל עכשיו בקבוצות השונות ובפעולות השונות שבין איבריהן, נראה דבר חשוב מאד. לא תמיד נקבל - כתוצאה מצרוף של איברים בתוך הקבוצה - שוב איבר של הקבוצה, ז"א איבר, שיש לו התכונות שדרשנו מן העצמים כדי

שישתיכו לקבוצה. להפך, הרבה פעמים יקרה, שכתוצאה מפעולה מסוימת בין שני איברים מן הקבוצה נקבל עצם, שאין לו התכונות הדרושות. נסביר זאת על-ידי כמה דוגמאות:

דוגמה ב. נסתכל בקבוצת המספרים אי-השליליים. במקרה זה, אם הצרוף יהיה פעולת החבור, נקבל תמיד כתוצאה מן הצרוף עצם, שהוא שוב איבר של הקבוצה. אבל אם הפעולה תהיה פעולת החסור הרי אז במקרה ש a&b (a ו b שניהם אי-שליליים) נקבל כתוצאה מ a&b(=)a-b מספר שלילי, ובכן לא איבר של הקבוצה.

דוגמה ג. הקבוצה שנסתכל בה תהיה קבוצת כל המספרים השלמים (חיוביים, שליליים או אפס). במקרה זה נקבל תמיד כתוצאה, גם על-ידי פעולת החבור וגם על-ידי פעולת החסור, עצם שיש לו התכונות של הקבוצה, ובכן עצם שהוא איבר של הקבוצה. אולם בשעה שהפעולה תהיה חלוק - שוב לא תמיד תהיה התוצאה איבר של הקבוצה הזאת.

דוגמה ד. תכלול קבוצתנו את כל הזויות החדות (הקטנות מ 90°), ויהי הצרוף שהכנסנו ביניהם פעולת החבור. הרי אז כתוצאה מן הצרוף של שני איברים בקבוצה לא נקבל תמיד איבר הסיך לקבוצה (למשל, $\alpha=80^\circ$, $\beta=30^\circ$, אזי: $\alpha\&\beta(=)\alpha+\beta=80^\circ+30^\circ=110^\circ>90^\circ$).

דוגמה ה. אבל אם הקבוצה תכלול את כל הזויות, הרי תמיד כתוצאה מפעולת החבור בין שני איברים נקבל שוב איבר מן הקבוצה (זכרו: תתכנה זויות גדולות מ 360°).

כעת נוכל לציין את התכונה הראשונה הנדרשת מקבוצה, כדי שתהיה חבורה, והיא: שתמיד יהיה העצם המתקבל כתוצאה מצרוף של שני איברים בקבוצה, שוב איבר של אותה קבוצה. אולם עלינו להדגיש, שיתכן כי קבוצה תקים את הדריסה הנ"ל ביחס לפעולה אחת ולא תקים אותה ביחס לפעולה אחרת. לדוגמה: המספרים השלמים מקימים את התנאי הנ"ל ביחס לפעולת החבור והחסור, אולם ביחס לחלוק אינם מקימים אותו. ולכן נזכור: אם ידובר על קבוצה שהיא חבורה, הרי כונתנו שהיא חבורה ביחס לפעולה מסוימת.

II

לפני שנמשיך, עלינו לציין עוד עובדה חשובה. בכל הפעולות האפשריות בכלל אנו מבדילים בין שני סוגים יסודיים: 1) כאלה שקים ביניהן החוק החלופי (הקומוטטיבי), ז"א שבתוצאה של צרוף שני אברים a ו b אין הבדל איזה משני האיברים נקח כראשון כי a&b=b&a. 2) כאלה שהחוק החלופי איננו קים בהן והתוצאות תהיינה שונות, אם נצרף את a ל b או את b ל a, ז"א a&b≠b&a. פעולות שבהן תמיד a&b=b&a בשביל כל שני איברים של הקבוצה, נקראות קומוטטיביות או חלופיות. כל הדוגמאות שנביא להלן תהיינה של חבורות חלופיות, אך המשפטים כחם יפה גם לחבורות לא-חלופיות, שדוגמאות להן תופענה בפעם אחרת.

אחרי שקבענו זאת נגש לברר את יתר התכונות של החבורה. עד עכשיו עסקנו רק בדוגמאות, שבהן צרפנו שני איברים מתוך הקבוצה. אבל לפעמים נחוץ לצרף יותר. והנה כבר במקרה של שלשה איברים a, b ו c יתכנו שני צרופים: 1. שאנו מצרפים קודם את a ו b ואל התוצאה של הצרוף אנו מצרפים את c, בסימון: (a&b)&c או 2. שאנו מצרפים קודם את b ו c ואל תוצאת הצרוף הזה נצרף את a, בסימון: a&(b&c).

והנה נראה כי אמנם בהרבה מאד פעולות מקבלים בשני הדרכים אותה התוצאה, אבל תתכנה גם פעולות שבהן נקבל תוצאות שונות. למשל: בדוגמאות ב, ג, ד, ה אנו מקבלים אותן התוצאות, ז"א (a&b)&c=a&(b&c); אבל בדוגמה א נקבל תוצאות שונות בשתי הדרכים, כי: יהי a=1, b=5, c=9. הרי אז:

$$\frac{1+\frac{5+9}{2}}{2}=4 \qquad \text{אבל} \qquad \frac{\frac{1+5}{2}+9}{2}=6$$

ובכן קבלנו תוצאות שונות.

והנה התכונה השניה הדרושה, כדי שהקבוצה תהיה חבורה לפי פעולה מסוימת, היא שיהיה תמיד (a&b)&c=a&(b&c) ז"א שבצרוף לפי כל אחד משני הדרכים שהזכרנו תהיה התוצאה תמיד אותה. לחוק הזה קוראים בשם החוק הקבוצי (האסוציאטיבי).

III

התכונה שצינו קודם (של החוק הקבוצי) היא תכונה של הצרוף שאנו מוציאים לפועל בקבוצה. ישנם צרופים המקימים את החוק, וישנם כאלה, שאינם מקימים אותו. ביחס לחבורה קימות עוד שתי דריסות שהן מכונות לאיברי הקבוצה עצמה.

ן שני
ל-ידי

ישנן קבוצות, שבהן קיים לגבי פעולה מסוימת איבר מצטין. הצטיינותו היא בזאת, שאם נצרף אותו אל איבר אחר כל שהוא a של הקבוצה, נקבל תמיד בתוצאה שוב את האיבר a. מובן שהתכונה הזאת איננה כללית. לדוגמה:

הצרוף
של
שניהם

דוגמה ו. אם נסתכל בקבוצת כל המספרים השלמים אי-השליליים והפעולה שנכניס בקבוצה הזאת תהיה פעולת החבור, ז"א a&b(=)a+b, הרי אז יהיה ה "0" איבר מצטין כזה, כי תמיד a&0(=)a+0=a, יהי a איבר אשר יהיה.

דוגמה ז. אבל אם נכניס לקבוצה רק את המספרים הטבעיים (ז"א השלמים החיוביים) והצרוף יהיה שוב פעם החבור, הרי אז אמנם תתקימנה שתי התכונות הראשונות הדרושות מחבורה, אבל איבר מצטין כזה לא ימצא בקבוצה, כי תמיד יהיה a&b(=)a+b>a ו a&b(=)a+b>b לגבי כל a ולגבי כל b.

פעולת
עצם
היה

בדוגמה א נוכל למצוא לכל איבר נתון a, איבר מסוים b, כך שיהיה a&b=a (פשוט, נקח b=a). אבל ברור שלא נמצא איבר כללי כזה b שביחס אליו יהיה תמיד a&b=a, לגבי כל a של הקבוצה.

ויהי
איברים

דוגמה ח. בקבוצת המספרים השלמים עם פעולת הכפל ימצא איבר מצטין כזה והוא ה1, כי תמיד a&1(=)a.1=a.

ה

אנו רואים אפוא, שאמנם ישנן הרבה קבוצות בעלות איבר מיוחד כזה, אבל ישנן גם רבות, שבהן אין איבר כזה בנמצא. והנה דרישה נוספת שקבוצה עם פעולה צריכה למלא כדי שתהא חבורה, היא, שיהיה קיים בה איבר מצטין כזה לגבי הפעולה הנתונה. לאיבר הזה קוראים בשם "איבר-יחידה". ובכן בדוגמה ב יהיה 0 איבר-יחידה, בדוגמה ח יהיה 1 איבר-יחידה. איבר-יחידה כזה - אם הוא קיים - מסמנים ברוב המקרים בסמן e. ובכן בקבוצה שיש בה איבר-יחידה e יהיה a&e=a לגבי כל a של הקבוצה.

בורה,
שוב
ריטה
ערים
לחלוק
נונתנו

תרגיל. הוכח, כי לא יתכן בחבורה יותר מאיבר-יחידה אחד.

IV

ועכשיו נגש לתכונה האחרונה הנדרשת מקבוצה כדי שתהיה חבורה. לתכונה הזאת יש מובן רק אם הקבוצה היא בעלת איבר-יחידה (זאת אומרת, רק אם הקבוצה מקימת את הדרישה הקודמת לגבי כל a). הדרישה היא שאם נקח בקבוצה איבר כל שהוא a יהיה קיים לו בתוך הקבוצה איבר שני b, כך ש a&b=e (e הוא איבר-היחידה של הקבוצה). במלים נוכל לבטא זאת כך: לכל איבר a של הקבוצה נוכל למצוא איבר שני b, כך שהצרוף של שני האיברים האלה יתן כתוצאה את איבר-היחידה. מובן שהדרישה הזאת איננה מתקימת תמיד, כמו שנראה זאת תיכף על ידי דוגמאות:

יות
ן
איזה
קיים
a&l.

בדוגמה ב (קבוצת המספרים אי-השליליים עם פעולת החבור) תהיינה קימות כל שלש התכונות הראשונות, אבל ברור כי התכונה הרביעית לא תתקים, כי איבר-היחידה e הוא האיבר "0" וברור שאם נקח למשל את המספר 1 אין איבר אי-שלילי כזה שצרופו עם 1 יתן 0, כי תמיד 1+b≥1>0, כאשר b מספר אי-שלילי כל שהוא.

נחוץ
:
זה

אבל אם נצרף לקבוצה את כל המספרים השליליים - זאת-אומרת שהקבוצה החדשה תכלול את כל המספרים השלמים - והפעולה תהיה שוב החבור, הרי אז נוכל לצרף לכל איבר a של הקבוצה איבר b כזה שיהיה a&b=e, כי פשוט נקח בתור b את a בסימן הפוך (כלומר -a , ואם a=0 יהיה b גם כן 0), ובמקרה זה a&b(=)a+b=a+(-a)=0=e.

ת ב,
ה א

באותו אופן קל לראות שבתוך קבוצת המספרים הטבעיים (השלמים החיוביים) עם פעולת הכפל בתור צרוף (e=1) אין לכל a, b מתאים כך שיהיה a&b=e, ורק אחרי צרוף המספרים הרציונליים (השברים הרגילים) נקבל לכל a איבר מתאים b והוא יהיה b=1/a, כי a&1/a(=)a.1/a=1=e.

לכל איבר b כזה המתאים ל a נתון, כך ש a&b=e קוראים בשם איבר הפוך. את b מסמנים ב a^{-1}. התכונה הזאת היא הדרישה הרביעית שקבוצה עם פעולה צריכה למלא, כדי שתהא חבורה.

תרגיל. הוכח, כי בחבורה יש לכל איבר רק איבר הפוך יחיד.

אם נסכם בקצור את ארבע הדרישות, נוכל לבטאן:

נתונה קבוצה של איברים, שמוגדרת ביניהם פעולה חלופית. אזי תקרא הקבוצה חבורה, אם היא מקימת את ארבעת התנאים דלקמן:

1) על ידי צרוף שני איברים כל שהם מתוך הקבוצה אנו מקבלים שוב איבר מן הקבוצה.

2) קיים בתוך הקבוצה החוק הקבוצי, ז"א (a&b)&c=a&(b&c).

3) קיים איבר-יחידה, ז"א קיים איבר e כזה ש a&e=a לכל a שהוא איבר של הקבוצה.

נם

4) לכל איבר a של הקבוצה קיים איבר הפוך, ז"א לכל a קיים a^{-1}, כך ש $a\&a^{-1}=e$.

V

לפי האמור לעיל ברור שקבוצת המספרים השלמים היא חבורה ביחס לפעולת החבור. כמו-כן קבוצת המספרים הרציונליים החיוביים (זכור: המספרים השלמים והשברים הרגילים) היא חבורה ביחס לפעולת הכפל.

בכל הדוגמאות הנ"ל דנו בקבוצות שיש להן מספר אין-סופי של איברים. אבל הדבר הזה אינו הכרחי. נוכל להביא לפניכם דוגמה של קבוצה שיש לה רק מספר סופי של איברים (אפילו רק שני איברים) והיא חבורה ביחס לפעולה מסוימת.

<u>דוגמה ט.</u> תהי הקבוצה מרכבת מן האיברים 1, 1- והפעולה המוגדרת ביניהם תהיה פעולת הכפל הרגיל. במקרה זה קימות כל ארבע הדרישות דלעיל.

1) התוצאה של הכפל היא תמיד איבר של הקבוצה (תוכיחו בעצמכם).
2) בתוך הקבוצה קים החוק הקבוצי (נסה את כל האפשרויות!).
3) קים איבר-יחידה והוא 1.
4) לכל איבר קים איבר הפוך, כי ההפוך של 1 הוא 1 וההפוך של 1- הוא 1-.

<u>תרגיל:</u> תן דוגמה אחרת של חבורה עם מספר סופי של איברים (השתמשו במספרים מדומים).

אחרי שהכרנו את מושג החבורה נוכל לגשת להוכחת משפטים אחרים שכחם יש לכל קבוצה עם פעולה, שהיא חבורה ביחס לפעולה הזאת.

<u>משפט א.</u> $(a\&b)^{-1}=a^{-1}\&b^{-1}$, ז"א, האיבר ההפוך לאיבר המתקבל כתוצאה מצרוף שני איברים a ו b הוא תוצאת הצרוף של הפוכי a ו b.

<u>הוכחה.</u> $(a\&b)\&(a\&b)^{-1}=e$, אבל מצד שני

$$(a\&b)\&(a^{-1}\&b^{-1})=(a\&b)\&b^{-1}\&a^{-1}=a\&b\&b^{-1}\&a^{-1}=(a\&e)\&a^{-1}=a\&a^{-1}=e$$

ועי"ס המשפט שיש רק איבר הפוך יחיד נובע $(a\&b)^{-1}=a^{-1}\&b^{-1}$.

עי"ס המשפט הזה ברור כי בקבוצת המספרים השלמים יהיה $-(a+b)=-a+(-b)$ ובקבוצת המספרים הרציונליים יהיה $1/(a.b)=1/a.1/b$.

<u>משפט ב.</u> בכל חבורה יש פתרון יחיד למשואה $a\&x=b$.

<u>הוכחה.</u> א. נשים $x=a^{-1}\&b$ (ז"א, x יהיה הצרוף של האיבר ההפוך ל a עם b). על-ידי הצבה נקבל $a\&x=a\&(a^{-1}\&b)=(a\&a^{-1})\&b=e\&b=b$ (על סמך החוק הקבוצי). ב. הפתרון הזה הוא יחיד, כי אם קים $a\&m=b$ וגם $a\&n=b$, אזי $a\&m=a\&n$. נצרף לשני האגפים a^{-1} ואז נקבל $a^{-1}\&a\&m=a^{-1}\&a\&n$, ז"א $e\&m=e\&n$, ז"א $m=n$.

המשפט הזה אומר לנו בבת אחת למשל כי בקבוצת המספרים השלמים (שהיא חבורה ביחס לחבור קים פתרון יחיד למשואה $a+x=b$, וכן גם שבקבוצת המספרים הרציונליים (שהיא חבורה ביחס לכפל) קים פתרון יחיד למשואה $a.x=b$, ז"א, בלי כל הגבלה אפשר להוציא לפועל את החסור בקבוצת המספרים השלמים ואת החלוק בקבוצת המספרים הרציונליים.

הפעם נסתפק בדוגמאות מועטות אלה. במאמר הבא ברצוננו לנצל את תורת החבורות להוכחת משפטים עמוקים יותר (שבחלקם הכרתם אותם כבר ב"דפים" אלה - כגון משפט פרמה הקטן). בינתים תנסו לחפש בעצמכם דוגמאות ומשפטים ולשלחם לנו.

מובן כי תוכלו לפנות אלינו בכל שאלה שתתעורר בקשר למושגים החדשים שהופיעו במאמר זה.

-:-:-:-:-:-

ד ב י ו ז ' ר ק

משפטים ובעירות על הארבעון.

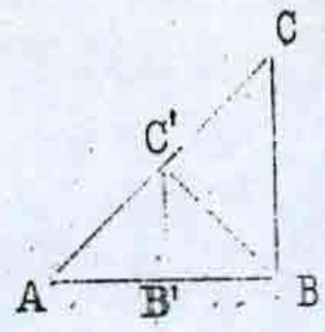
(המשך מחוברת ז).

במאמר הקודם הבאנו כמה תכונות של ארבעון, שבהן הוא דומה למשולש. נביא כאן אחדות, שבהן הוא שונה ממשולש.

במשולש - שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת. - ובארבעון?

<u>משפט ד.</u> ארבעת גבהי הארבעון <u>אינם נפגשים</u>, בדרך כלל, בנקודה אחת.

<u>דוגמה לארבעון בעל זוג גבהים בלתי נפגשים.</u> נצא (ציור ג) ממשולש ישר-זוית ABC בעל זוית ישרה B. נעביר בו את קטע-האמצעים $B'C'\|BC$ ונחבר את B עם 'C. נשאיר את ABC במישור הציור ונסובב את 'ABC סבוב כלשהו סביב AB. נקבל ארבעון 'ABCC. נעביר דרך BC ו 'B'C מישורים a ו 'a מאונכים לAB.



ציור ג.

מישורים אלה יהיו מקבילים ביניהם. יהי $\overline{BC}$ ישר-החתוך של המישור a עם המישור העובר דרך 'ABC, ו'$\overline{B'C'}$ ישר-החתוך של המישור 'a עם המישור העובר דרך ABC. נוריד מ'C אנך ל'$\overline{B'C'}$. אנך זה, בהיותו מאונך גם לAB, מאונך לABC, זאת-אומרת, הוא גובה הארבעון. כיוצא בו נוריד מ C אנך ל$\overline{BC}$. נקבל שוב גובה. אך שני הגבהים האלה נמצאים <u>במישורים מקבילים</u> a ו'a, לפיכך לא יפגשו לעולם.

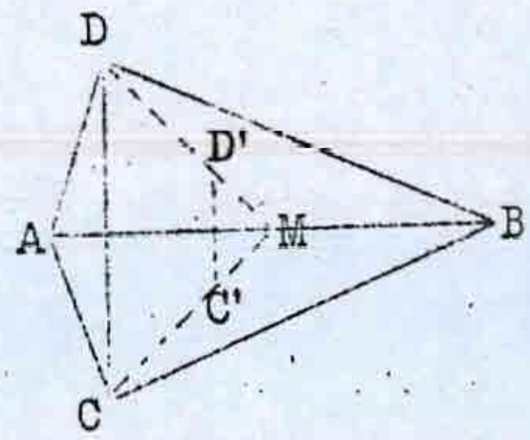
במשולש - שלושת האנכים האמצעיים (זאת-אומרת, האנכים דרך אמצעי הצלעות) נפגשים בנקודה אחת. אמצע הצלע הוא גם מרכז-כבדה. כתקביל שבעי לאנך אמצעי במשולש אפשר אפוא לראות בארבעון אנך לפאה דרך מרכז-הכבד של הפאה, ובכן, דרך נקודת-החתוך של שלש המדיאנות של הפאה. ונשאלת גם כאן השאלה: האם ארבעת "האנכים האמצעיים" בארבעון נפגשים בנקודה אחת?

<u>משפט ה.</u> ארבעת האנכים האמצעיים בארבעון <u>אינם נפגשים</u>, בדרך כלל, בנקודה אחת.

לשם הוכחה, נקדים שני משפטי-עזר פשוטים.

<u>משפט-עזר ב.</u> הקטע, המחבר את מרכזי-הכובד של שתי פאות בארבעון, מקביל למקצוע המחבר את קדקדי הפאות האלה (לאמר, המקצוע, הנגדי למקצוע המשותף לשתי הפאות), ושוה לשלישו.

<u>הוכחה.</u> יהי (ציור ד) ABCD ארבעון, 'C מרכז-הכובד של הפאה ABC, 'D מרכז-הכובד של הפאה ABD, M אמצע AB. צריך להוכיח כי $C'D' \parallel CD$. נחבר את M עם C ו D. MC ו MD הן מדיאנות בפאות ABC ו ABD, בהתאמה. הן עוברות אפוא דרך מרכזי-הכובד 'C ו 'D של פאותיהן, ונחתכות בהם כך, שהקטע הקרוב לבסיס הוא שליש של כל המדיאנה, ובכן $MC'=MC/3$, $MD'=MD/3$. לפי משפט פלנימטרי ידוע יהיה אפוא במשולש MCD, $C'D' \parallel CD$, ו$C'D'=CD/3$, מה שהיה להוכיח.



ציור ד.

ממשפט-עזר ב נובע מיד:

<u>משפט-עזר ג.</u> אם מחברים בקטעים כל שנים ממרכזי הכובד של פאות הארבעון, מקבלים ארבעון דומה לנתון (וקטן פי שלשה ממנו), שקדקדיו נמצאים במרכזי-הכובד של פאות הארבעון הנתון, וכל פאה שלו מקבילה לאותה הפאה של הארבעון הנתון, שבמרכז-כבדה נמצא הקדקוד, הנגדי לפאה הנדונה של הארבעון החדש.

ועתה נשתמש להוכחת משפט ה בתכסיס דומה לזה, שבו משתמשים בפלנימטריה להוכחת המשפט ששלושת גבהי המשולש נפגשים בנקודה אחת (על-סמך המשפט ששלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת). ובכן, יהי נתון ארבעון, ונעביר את ארבעת האנכים האמצעיים לארבע פאותיו. נחבר בקטעים כל שנים מעקבי האנכים האמצעיים, זאת-אומרת, כל שנים ממרכזי-הכובד של פאות הארבעון. על-סמך משפט-עזר ג נקבל ארבעון דומה לנתון, שהאנכים האמצעיים בארבעון הנתון משמשים בו גבהים. ארבעון זה, כדומה לנתון, הוא כללי כמותו. אך כבר הוכח במשפט ד כי הגבהים בארבעון כללי אינם נפגשים. לפיכך לא יפגשו, בדרך כלל, גם האנכים האמצעיים בארבעון, מה שהיה להוכיח.

ב ע י ו ת .

הוכח, כי אם לארבעון יש צומת (ז"א, נקודת-פגישה משותפת לכל הגבהים) -

6. עקב של גובה הוא צומת הפאה.
7. כל שני מקצועות נגדיים מאונכים זה לזה.
8. סכומי הרבועים של כל שני מקצועות נגדיים, שוים זה לזה.

$\overline{6}$-$\overline{8}$. בשלש הבעיות האחרונות, הוכח את ההפוכים של המשפטים האלה.

9. הוכח, כי אם ארבעת גבהי הארבעון שוים - פאותיו שוות-שטח, ולהפך.

10. הוכח, כי בכל ארבעון יש פנה חדה, לאמור, פנה שכל שלש זויותיה המישוריות (פאות הפנה) חדות.

-.-.-.-.-.-.-

בחלק הראשון של מאמר זה בחוברת ז (מהדורה ב) מתבקשים הקוראים לתקן את שגיאות-הדפוס הבאות:

בעמוד 1, שורה שלפני האחרונה, צ"ל: קטנה מג (במקום: קטנה מב).
בעמוד 2, שורה 3, צ"ל: ג > ד' (במקום: ב > ד').

פתרונות לבעיות שהוצגו במאמר "משפטים ובעיות על הארבעון".

1. כמה ארבעונים אפשר לבנות לכל היותר משה קטעים נתונים, שישמשו מקצועות לארבעון?

פתרון. 30.

הוכחה. ממשולש ושלושה קטעים נתונים אפשר לבנות לכל היותר ששה ארבעונים, כי אם נעמיד את אחד הקטעים באחד מקדקדי המשולש, תשארנה בשביל שני הקטעים האחרים שתי אפשרויות. מכיון שיש למשולש 3 קדקדים, הרי 3.2=6. אבל מ6 קטעים אפשר לבנות $\binom{6}{3}=20$ משולשים. נקבל אפוא 6.20=120 ארבעונים. נביא בחשבון כי באופן כזה נבנה כל ארבעון ארבע פעמים, מכל אחת מארבע פאותיו. נחלק ב4 ונקבל 120:4=30.

2. הוכח, כי ששה פאת הארבעון קטן מסכום ששתי שלש פאותיו הנשארות.

הוכחה. נטיל את קדקוד הארבעון הטלה מאונכה על מישור בסיסו. על-ידי-כך תוטלנה 3 הפאות הצדדיות של הארבעון הטלה מאונכה על מישור בסיסו. ששה כל אחד מן ההטלים האלה קטן מששה הפאה המוטלת, כי לשניהם בסיס משותף, אבל גבהים שונים. מצד שני, סכום ששתי ההטלים אינו קטן מששה הבסיס. מכאן יוצא המשפט.

3. הוכח, כי אם לשני ארבעונים בסיס משותף וקדקוד הארבעון האחד נמצא בפנים הארבעון השני, קטן סכום ששתי שלש הפאות הצדדיות של הארבעון הראשון מסכום ששתי שלש הפאות הצדדיות של הארבעון השני.

נתון: ארבעון ABCD ובתוכו ארבעון MBCD. צייל: (עין ציור ה בע' חבא)

$$S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADB} > S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDB}$$

הוכחה: נמשיך את הקטע BM עד שההמשך יחתוך את המיסור ACD בנקודה N. נחבר את N עם C ו D. נוכיח תחלה כי קים $S_{NBC}+S_{NCD}+S_{NDB} > S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDB}$.

ברור כי (1) $S_{NCB}=S_{NCM}+S_{MCB}$, וכמו-כן כי (2) $S_{NDB}=S_{NDM}+S_{MDB}$. אבל, לפי בעיה 1: $S_{NMC}+S_{NCD}+S_{NDM} > S_{MCD}$. נציב במקום S_{NMC} ו S_{NMD} את ערכיהם לפי (1) ו(2) ונקבל: $S_{NCB}-S_{MCB}+S_{NCD}+S_{NDB}-S_{MDB} > S_{MCD}$. מכאן:

(3) $S_{NCB}+S_{NCD}+S_{NDB} > S_{MCB}+S_{MDB}+S_{MCD}$, מה שהיה להוכיח.

ועכשיו עלינו להוכיח כי $S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADB} > S_{NCB}+S_{NCD}+S_{NDB}$ – והרי הוכחנו את המשפט. ובכן: נמשיך את הקטע CN עד שההמשך יחתוך את AD בנקודה P ונחבר את הנקודה P עם B. לפי בעיה 1 קים:

$$S_{ABC}+S_{ACP}+S_{APB} > S_{PBN}+S_{NBC} \quad (S_{PBC}=S_{PBN}+S_{NBC})$$

$$S_{PBN}+S_{PND}+S_{PDB} > S_{BND}$$

ואחרי החבור

$$S_{ABC}+S_{ACP}+S_{APB}+S_{PND}+S_{PDB} > S_{NBC}+S_{BND}$$

ואולם

$$S_{ACP}+S_{PND}=S_{ACD}-S_{NCD} \quad ; \quad S_{APB}+S_{BPD}=S_{ADB}$$

מכאן

$$S_{ABC}+S_{ACD}-S_{CND}+S_{ADB} > S_{NBC}+S_{NBD}$$

או

$$S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADB} > S_{NBC}+S_{NBD}+S_{CND}$$

ובהתחשב עם (3) $S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADB} > S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDB}$, מה שהיה להוכיח.

4. הוכח, כי סכום ששתי ששת המשולשים, המתקבלים על-ידי חבור נקודה בפנים הארבעון בכל אחד מארבעת קדקדיו קטן מ3/2 הסכום של ששתי ארבע פאותיו וגדול מ1/2 הסכום הזה. החלק השני נכון גם אם הנקודה נמצאת מחוץ לארבעון, או עליו.

הוכחה. יהי נתון ארבעון ABCD ובתוכו נקודה M.

א. לפי בעיה 3 יהיה:

$$AMB+AMD+BMD < ACB+ACD+BCD$$
$$BMC+BMD+CMD < BAC+BAD+CAD$$
$$CMA+CMD+AMD < CBA+CBD+ABD$$
$$AMB+AMC+BMC < ADB+ADC+BDC$$

ועשי חבור אגף-אגף:

$$2(AMB+AMD+BMD+BMC+CMD+CMA) < 3(ACB+ACD+BCD+BAD)$$

ומכאן נובע המשפט.

ב. לפי בעיה 2 יהיה:

$$ABC < AMB+AMC+BMC$$
$$ABD < AMB+AMD+BMD$$
$$ACD < AMC+AMD+CMD$$
$$BCD < BMC+BMD+CMD$$

ועשי חבור אגף-אגף:

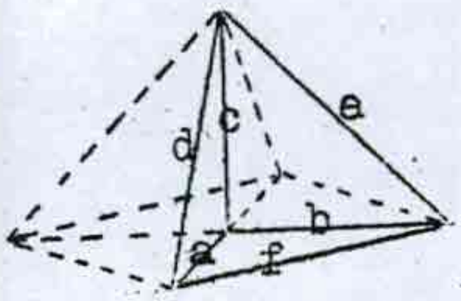
$$ABC+ABD+ACD+BCD < 2(AMB+AMC+BMC+AMD+BMD+CMD)$$

ומכאן נובע המשפט.

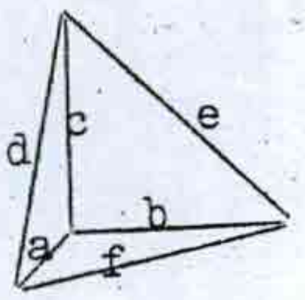
5. הוכח, כי בארבעון ישר-פנה (זאת אומרת, בעל פנה כפנת הקוביה) כל הזויות הנשארות חדות.

הערה משותפת לשתי הוכחות. לגבי הפאות ישרות-הזוית ברור כי שאר הזויות חדות. נשאר רק להוכיח שכל הזויות בפאה שמול הפנה הישרה, חדות.

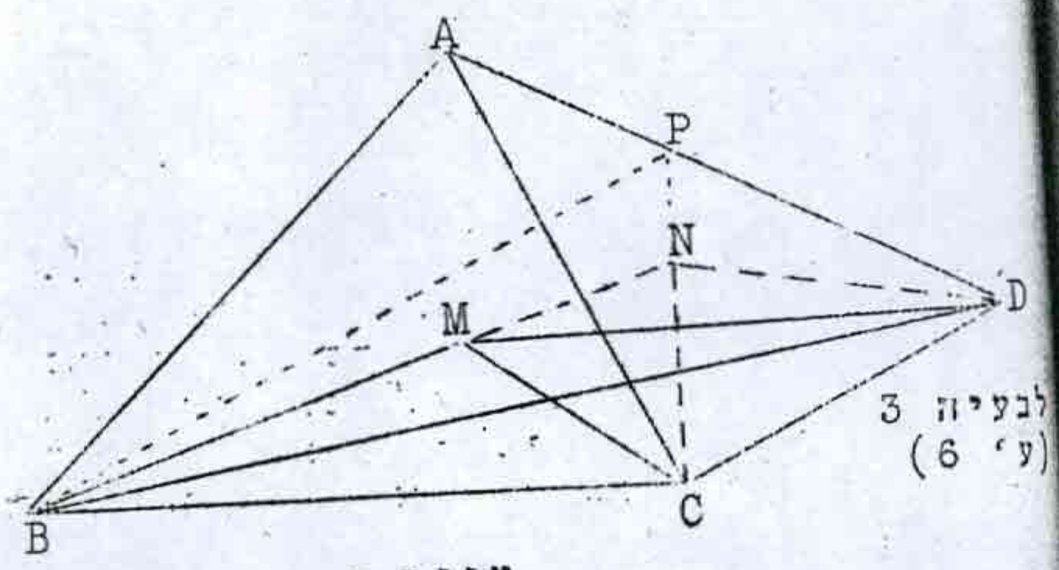
הוכחה א. נסמן את מקצועות הארבעון כמראה בציור ה, באשר a, b ו c הם המקצועות של הפנה הישרה, ו d, e, f של הפאה שממולה. נקבל: $d > a$, $e > b$.



ציור ז.



ציור ו.



לבעיה 3 (ע' 6)

ציור ה.

לכן $d^2+e^2 > a^2+b^2$. אבל $a^2+b^2=f^2$. לכן $d^2+c^2 > f^2$. אי-השויון האחרון מראה כי הזוית (d,e) (הזוית בין d ו e) היא חדה. באותו אופן מוכיחים גם לגבי שאר הזויות במשולש def.

הוכחה ב (מר ג. וולינץ). נשלים את הארבעון לפירמידה מעוינת, על-ידי-זה שנמשיך את המקצועות a ו b (ציור ז) מקדקוד הפנה הישרה לצד חוצו של הארבעון כדי a ו b בהתאמה, ונחבר את הקצוות ביניהן ובקדקדים. ארבע הזויות ליד קדקוד הפירמידה הזאת שוות. טכומן קטן מ 360°. לפיכך הן חדות.

הערות לבעיות 1-5.

לבעיה 1. כי קימים באמת ששה קטעים שאפשר לבנות מהם 30 ארבעונים שונים, אפשר להוכח מן הדוגמה של 6 קטעים שהם שונים, אך "כמעט שוים", לאמור, שההבדל בין כל שנים מהם קטן למדי. באפשרות בניתן אפשר להוכח, אם נצא מארבעון משוכלל ונשנה בהדרגה כל מקצוע שלו שנוי קטן למדי.

לבעיה 2. משפט זה הוא תקביל למשפט במשולש: צלע המשולש קטנה מסכום שתי הצלעות הנשארות.

לבעיה 3. משפט זה הוא תקביל למשפט במשולש: סכום הצלעות הצדדיות של משולש מקיף גדול מסכום הצלעות הצדדיות של משולש מוקף, הנסמך על אותו בסיס. - אפשר לראות בעיה זו כהכללת בעיה 2, המתקבלת ממנה במקרה הפרטי, אם קדקוד הארבעון הפנימי נמצא על הבסיס המשותף לשני הארבעונים.

לבעיה 4. משפט זה הוא תקביל למשפט במשולש: סכום הרחקים של נקודה בפנים משולש משלושת קדקדיו קטן מסכום שלש צלעותיו וגדול מחצי הסכום הזה.

לבעיה 5. בעיה זו היא מקרה פרטי מבעיה כללית יותר על מערכות הזויות המישוריות בארבעון. עין "טכניקה ומדע", חוברות 47, 48 ו49.

-:-:-:-:-:-

פ ר ת ר י ה ש א ל ו ת ב ח ו ב ר ת ז'.

(צוינה הכתה שהיו בה בשנת-הלמודים הקודמת. א-ה מציגות את הבעיות למאמר על הארבעון, ו-ע את שאר הבעיות, לפי ההתאמה דלקמן:
א1,ב2,ג3,ד4,ה5,ו95,ז96,ח97,ט98,י99,כ100,ל101,מ102,נ103,ס104,ע105.
' אחרי אות, פרושו פתרון חלקי.

י ר ו ש ל י ם . הגמנסיה העברית. מ. משלר, ו': בהוזח'י'כ'לס.
בית הספר התיכון. י. אליאסוב, ז': בדח.

ת ל - א ב י ב . גמנסיה "בלפור". ע. גולדשלק, ז': בגדהוחט'יכ'לנסע.
ע. דה-שליט, ז': בדהוזחט'יכ'לנסע. מ. ורשבסקי, ו': זחט'י'כ.
י. טיטונוביץ, ז': וזחטיכלנסע. א. מולצ'צקי, ז': בהוזחט'י'כ'ל'נסע.
מ. מלינוביץ, ז': וחי'כ'נס. ח. סולובייצ'יק, ז': וחט'יכ'נס.
רבקה קפלן, ח': חי'כ'. ר. רנרט, ו': חט'י.

גמנסיה "שלוה". מ. קלין, ח': כסע.

לרשימת הפותרים בחוברת ז' יש להוסיף:
י. שיטונוביץ, ז': 85, 87, 89, 91, 93, 94, 95, 979.
מ. מלינוביץ, ז': 85, 86, 87, 91, 92, 93, 95, 96, 97.

ה נ כ ו ר מציגים בשמחה את השתתפותם הערה של רבים מקוראי העתון בהתרת הבעיות. כמו בשנה הקודמת, כן גם השנה החלטנו לחלק שלושה פרסים בין המצטינים.

ו א ל ה ה ז ר כ י ם :

פ ר ס ו א ש ו ן - (מבוא למתמטיקה של פרופ' פרנקל) - מ י כ ה ק ל י ן , תלמיד כתה ח' בגמנסיה "שלוה", תל-אביב.

פ ר ס ש נ י - (שברים מחזוריים של ד"ר מרקל) - מ ש ה ה ל ו י, תלמיד כתה ז' בביה"ס "מונטפיורי", תל-אביב.

פ ר ס ש ל י ש י - (אכסיומטיקה ויסודות ההנדסה הלא-אויקלידית של ד"ר הולצברג) - מ י כ א ל מ ש ל ר, תלמיד כתה ו' ב"גמנסיה העברית", ירושלים.

פתרונות ל"בעירת".

(95) לפי משפט ברטרן-צ'ביסף נמצא בין n+1 ו2n+2 מספר ראשוני p. p נמצא בין המספרים

(1) 3,5,7,...,2n+1

שום מספר ב(1) זולת p אינו מתחלק בp. נסמן בM את קטנת הכפולות המשותפות של המספרים (1). M מכילה את p רק בחזקה ראשונה. לו היה E=1/(2n+1)+...+1/7+1/5+1/3 מספר שלם, היה גם ME=M/(2n+1)+...+M/7+M/5+M/3 מספר שלם. באגף השמאלי - כל המחוברים הם מספרים שלמים; כולם - זולת M/p - מתחלקים בp. לכן אין האגף השמאלי מתחלק בp, בעוד שהאגף הימני מתחלק בp, מה שמהוה סתירה.

הוכחה אחרת בלי משפט ברטרן-צ'ביסף (החורג ממסגרת תורת-המספרים האלמנטרית) לבעיות 85 ו95 ולבעיות דומות נמצאת במאמר "קבוצות קריטיות וסכומי הפוכים" (עין להלן ב"מדף ספרים").

(96) יהי AB הקטע הנתון. נבחר בו שתי נקודות C וD. יתכן שכבר אחת מהן אירציונלית. אם שתיהן רציונליות, בונים על CD כיתר משולש ישר-זוית שוה-שוקים ומקצים את נצבו על היתר עד E; E תהיה נקודה אירציונלית (כי $CE=CD/\sqrt{2}$).

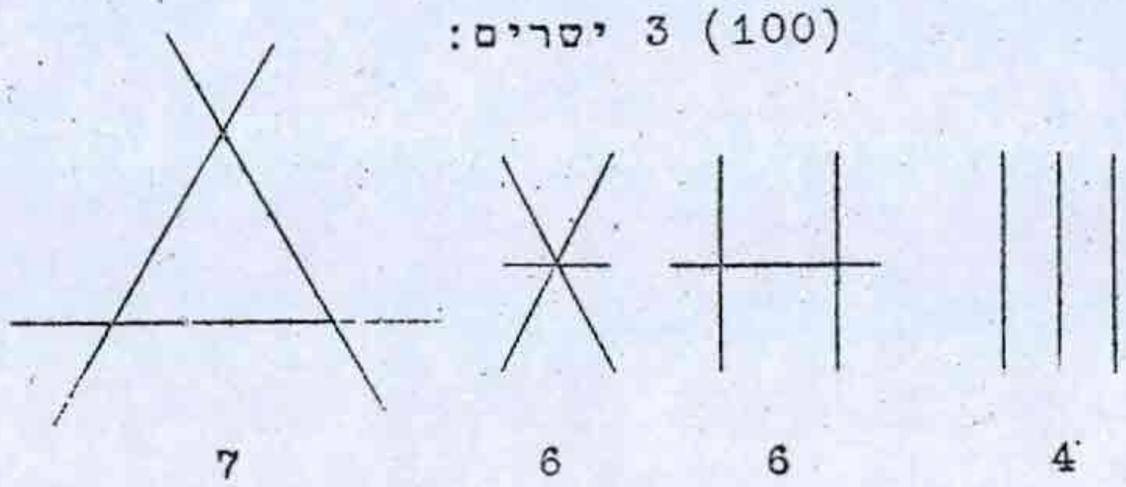
(97) בכלל קימים 4 מספרים אשר חזקתם הרביעית היא מספר בעל 4 ספרות, והם: $9^4=6561$, $8^4=4096$, $7^4=2401$, $6^4=1296$. התנאי א) מקוים ע"י 7, ג) ע"י 6 וב) בכלל לא.

(98) פתרונות פשוטים הם 1/1=2/2=3/3=...=11/11=22/22=33/33=...=99/99 מלבד זאת ברור, כי יחד עם A/B=CD/DC, גם B/A=DC/CD הוא פתרון. די אפוא להצטמצם למקרה C>D, A>B. כן נוכל להניח כי A/B הוא שבר מצומצם. קים אפוא מספר שלם n, כך ש nA=$\overline{CD}$=10C+D, nB=$\overline{DC}$=10D+C. ע"י חבור וחסור המסואות נקבל: n(A+B)=11(C+D), 9(C-D)=n(A-B). ע"י כפל המסואות האחרונות נקבל(1) 9(A+B)(C-D)=11(A-B)(C+D). C וD קטנים מ10, לכן הבדלם זר ל11, לכן A+B מתחלק ב11. אך A+B<2.11. לכן A+B=11. מכאן A-B<9. אך האגף הימני של (1) צריך להתחלק ב9. לכן C+D מתחלק ב3. לC+D יכלים אפוא להיות רק הערכים הבאים: 15, 12, 9, 6, 3. אם C+D = 3, 6, 12, 15, צריך A-B להתחלק ב3. אז A-B=3, כי A-B<9 ויחד עם A+B=11, אי-זוגי. נקבל ע"י הצבה ב(1) את הפתרונות הבאים: 84/48 = 42/24 = 21/12 = 7/4. אם C+D=9, נקבל מ(1) C-D=A-B, ואם A-B=1,3,5,7, מקבלים:

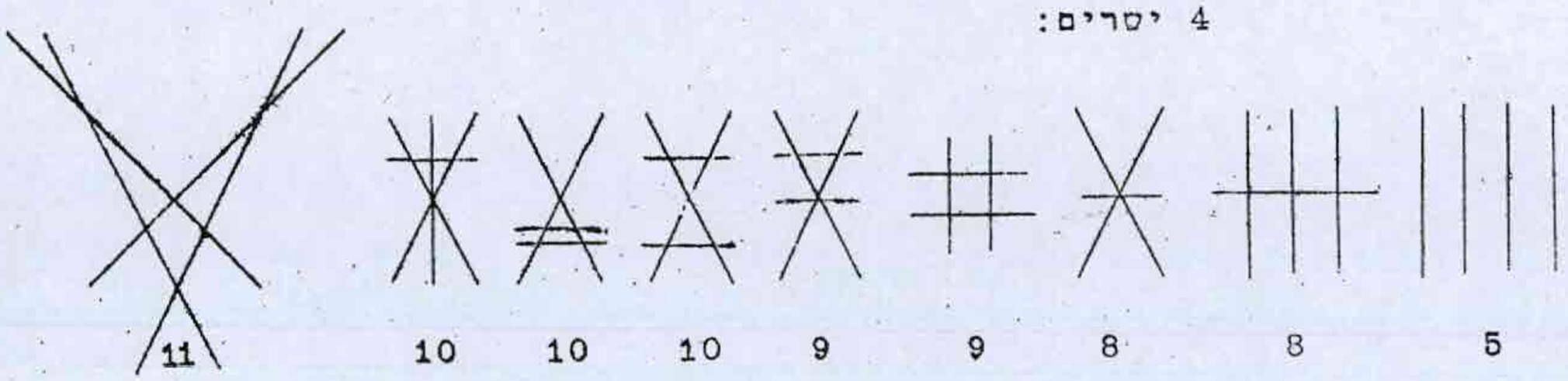
9/2 = 81/18; 8/3 = 72/27; 7/4 = 63/36; 6/5 = 54/45 .

(99) נניח כי בסיס-הספירה הוא n. אם a,b,c,d תכופים עולים, יהיה $\overline{cd}\geq cn>ab$ ולכן cd המכפלה. מab=cd+n, כלומר an+(a+1)=(a+2)(a+3), יוצא a(n-a-4)=5. מכאן a הוא מחלק של 5, כלומר 1 או 5, ואצל שניהם n=10. הפתרונות הם: 12=3.4, 56=7.8. אם a,b,c,d תכופים יורדים, יהיה ab המכפלה מab=cn+d, כלומר (c+2)(c+1)=cn+(c-1), יוצא c(n-c-2)=3. מכאן c=1 או c=3, n=6. הפתרונות הם: $\overline{10}$=3.2, $\overline{32}$=5.4.

(100) 3 ישרים:



4 ישרים:

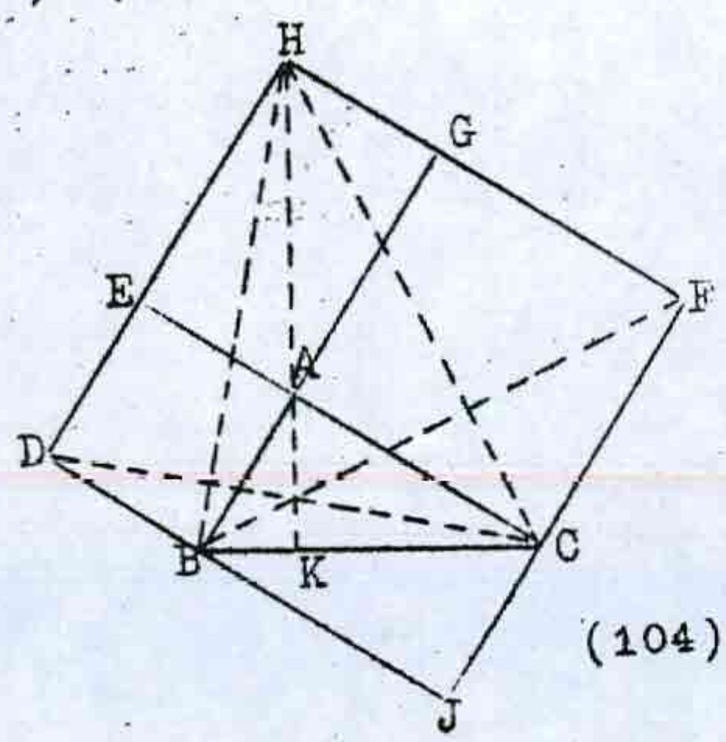


(101) נניח 1≥a. המכפלה תגדל, אם: א) במקום הגורמים b.1 נשים b+1, ב) במקום הגורם b (<4, ואף אצל 4 לא תקטן) נשים 2(b-2), ג) במקום 2.2.2 נשים 3.3. בגדולת-המכפלות יהיו אפוא כל הגורמים 3 זולת שניים, לכל היותר, השוים ל2. מקבלים לa=3n את הפתרון 3^n, לa=3n+2 את הפתרון $3^n.2$, לa=3n+4 את הפתרון $3^n.2^2$ (בשתי הצורות $3^n.2.2$ ו$3^n.4$). (פתרון יפה כמעט שלם נתן ע. גולדשלק).

(102) הבעיה 102 מוצגת מחדש, כי הפותרים חשבו בטעות שלא רק המחזור שות על שני הצירים, אלא גם זמן התחלת המחזור.

(103) עיי תשבון דיפרנציאלי (לדיז'נסקי ע' 64, שאלה 101) מקבלים כי ארכי צלעות המלבן המכסימלי, ולכן גם צירי האליפסה החסומה במלבן זה, הם $\sqrt{2}a$, $\sqrt{2}b$. צלעות המלבן המכסימלי החסום באליפסה זאת הם a, b וכן גם צירי האליפסה החדשה. ששה המלבן המכסימלי הראשון הוא $S_1=\sqrt{2}a.\sqrt{2}b=2ab$. ששה המלבן המכסימלי השני הוא $S_2=ab$. מתקבלת סדרה הנדסית אין-סופית שאברה הראשון הוא 2ab והמנה 1/2. מכאן S=4ab.

(104) לפי מולצ'צקי (הרוב פתרו בעזרת גאומטריה אנליטית).
△AEH≃△BAC, לכן היסר HAK|BC. △CFH≃△BJF, לכן HC|BF. באותו אופן BH|CD. הישרים BF, CD, HK הם אפוא גבהי המשולש BCH ולכן נפגשים בנקודה אחת.



(104)

(105) מספר זה $\left(=\frac{(a+n)!}{a!n!}\right)$ הוא $\binom{a+n}{n}$ ושלם בתור מקדם בינומיאלי.

הידעת?

18. איזה ספר מתמטי הוא הנמכר ביותר בעולם?
19. איזו שיטת-ספירה היה צריך לקבל, לולי המסורת העשרונית?
20. באי-אילו דברים בעקר נבדל העולם הדומם כמו שהוא לפי המדע, ממה שהוא נראה בעיני אנשים ללא מדע.

תשובות ל"הידעת".

15. מספר טרנסצנדנטי הוא מספר שאינו אלגברי, כלומר שאינו פותר שום משואה אלגברית במקדמים שלמים. מציאות מספרים טרנסצנדנטיים הוכחה לראשונה עיי ליוביל (Liouville), שאף בנה מחלקות מסוימות שלהם. הגדיל ממנו גאורג קנטור (G. Cantor) שהוכיח - בדרכים שונות בתכלית מאלו של ליוביל - לא רק מציאותם של מספרים טרנסצנדנטיים אלא אף זו שקבוצתם היא לאין-סוף יותר מקיפה מקבוצת המספרים האלגבריים (בלשון תורת-הקבוצות, ביתר דיוק: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים היא מעצמת הקונטי-נואום, בעוד שקבוצת המספרים האלגבריים היא רק ספירה). בשנת פרסום הוכחתו הנזכרת של קנטור (1873) הוכיח ארמיט (Hermite) שהמספר e, בסיס הלוגריתמים הטבעיים, הוא מספר טרנסצנדנטי (שהוא איריציונלי היה ידוע עוד מקודם עיי למברט (Lambert). כעשר שנים אחר כך (1882) הוכיח לינדמן (Lindemann) שהמספר π, יחס הקף העגול לקטרו, הוא מספר טרנסצנדנטי. בהוכחתו זו פתר לינדמן את הבעיה הקלסית על תרבוע העגול, כלומר הבעיה לקבוע בעזרת סרגל ומחוגה רבוע, השוה בשטחו לשטח העגול הנתון - ודהינו במובן שלילי. אמנם לשם כך אין הוכחת הטרנסצנדנטיות של π נחוצה: די (וכאחת נחוץ) להוכיח ש π אינו מספר "אוקלידי", לאמר, שאי-אפשר לבנות את π מתוך מספרים רציונליים בעזרת מספר סופי של פעולות רציונליות ופעולת הוצאת שרש רבועי. צעד נוסף קדימה בתורת הטרנסצנדנטיות נעשה כשהוכיחו בשנת 1924, בדרך בלתי תלויה זה מזה, שני חוקרים צעירים, גלפונד (יהודי רוסי) וסנידר את המשפט הבא: משלשה המספרים a, b, a^b, באשר a הוא מספר אלגברי שונה מ0 ומ1 ו b הוא מספר אלגברי איריציונלי, אחד הוא תמיד טרנסצנדנטי. מכאן נופק, שחזקת מספר אלגברי שונה מ0 ומ1 במעריך אלגברי איריציונלי הוא מספר טרנסצנדנטי. כך, למשל, המספרים $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $e^{\pi}=(-1)^{i}$ הם מספרים טרנסצנדנטיים. ממשפט גלפונד-סנידר יוצא גם שהלוגריתמים הרגילים (העשרוניים) של מספרים אלגבריים הם או רציונליים או טרנסצנדנטיים, ושל מספרים רציונליים זולת חזקות 10 - כולם טרנסצנדנטיים.

16. בכלל תופסים מקום ראשון ושני שוה בטוה הצרפתים והגרמנים. מקום שלישי עד שישי - היהודים, הסקנדינבים, האנגלים, השויצרים, שביניהם קשה

להכריע. ואולם אם נצטמצם, נאמר, ל25 השנים האחרונות, יבואו בראשונה הצרפתים, הגרמנים, האנגלים (עם אמריקה) והיהודים, בלי לתת ביניהם סדר. לעומת זה, אם מחלקים את מדת קדום המתמטיקה עיי כל עם במספר בני העם ובמספר שנות השתתפותו במדע, יהיה ראשון העם הנורבגי, ובשני המקומות הבאים יתחלקו היהודים ובני שויץ. מכל ההשואות האלה הוצאו מיסדי המתמטיקה, היונים העתיקים.

17. פרפטואום מובילה מסוג שני הוא מכונה אשר תפקידה להפיק אנרגיה ממקור חום, בלי להצטרך להבדלי טמפרטורה, למשל, מכונה הפועלת על-חשבון החום הגנוז באוקינוס. מכונה כזאת היא בלתי-אפשרית, לפי החק היסודי השני של הטרמודינמיקה.

//// מדף ספרים ////

אכסיומטיקה ויסודות ההנדסה הלא-אוקלידית בהוצאה אלמנטרית (מבוא לתורת היסודות של המדע המדויק), מאת יצחק רפאל הלוי והולצברג (הוצאת המחבר), 45+2 עמודים, מעוטף. המחיר 300 מאיי. לקוראי היידפים" הנחה של 10%.
"על הספר אפשר להביט כעל נסיון לתת הוצאה כה אלימנטרית וקצרה על היסודות של ההנדסה הלא אויקלידית, שלהבנתה תספקנה הידיעות בהנדסה - הנתנות בכתות ה', ו' של בית-ספר תיכוניי" (מתוך ההקדמה). הספר מצטין בסגנון בהיר וחי. הצורה החיצונית, אף כי בדפוס-שעוה, מפני תנאי הזמן, נעימה. אין לנו אלא להמליץ המלצה חמה ביותר לקוראינו הצעירים לרכוש להם את הספר הזה, שיגולל לפניהם את אחת "ההמצאות הנועזות ביותר והגאוניות ביותר של השכל האנושיי", ושירחיב במדה נכרת את אפק השכלתם המתמטית והכללית.
להזמינו במשרד המפקחים, תל-אביב, רח' דבורה הנביאה 17.
מתורת המספרים האלמנטרית, שברים מחזוריים, מאת דיר אריה מרקל, הוצאת "יבנה" תל-אביב, 92+5 עמודים, מעוטף. המחיר 650 מאיי, לקוראי היידפים" הנחה של 10%. להזמינו אצל המחבר לפי הכתבת: ביי"הס התיכוני המקצועי עיי התכניון העברי, חיפה.

תכרגרת סדרת פבוצ'י וצמודתה, מאת דב יוז'וק, ירושלים תשיג. 12+1 עמודים, המחיר 50 מאיי. להזמינו אצל מפיצי היידפים".

קבוצות קריטיות וסכומי הפוכים, מאת דב יוז'וק, 4 עמודים, המחיר 20 מאיי. להזמינו אצל מפיצי היידפים".

-:-:-:-:-

<u>פתרון התרגיל במאמר "על המבנה המתמטי של הלוח העברי" (חוברת ה').</u>

לפי צפורה בלבן: נצא מסוף השנה הרביעית של המחזור המושלמי ונצעד אחורנית 29 פעמים, 11 שנים כל צעד. אז תכיל כל מערכת כזו של 11 שנים 7 שנים פשוטות ו4 שלמות.

<u>פתרו</u>: בלבן, <u>גולדשלק</u>, הלוי.

נתאר את מספר השנים A בצורה

$$A=4-11b+30D \qquad 0\leqslant b\leqslant 29 \qquad (1)$$

D מספר טבעי כל שהוא. נפתור את (1) לפי b,D

$$11A=44-121b+11.30D$$
$$=30(1-4b+11D)+14-b$$
$$11A-14=30(1-4b+11D)-b$$

על-סמך אי-השויון $0\leqslant b\leqslant 29$ יהיה $30-b$ השארית (אי-השלילית הקטנה ביותר) המתקבלת כאשר נחלק $11A-14$ ב30, ומתוך כך קובעת המשואה (1) את הערך של D באופן חד-ערכי. נקבל

$$(11A-14+b)/30=1-4b+11D \qquad (2)$$

לפי (1) יש ב A שנים $1-4b+11D$ שנים שלמות. לפי (2) מכילות A השנים את מספר הימים $354A+1-4b+11D=(b-14+(11+354.30)A)/30$. לכן ההבדל בין מספר הימים בין הלוח העברי והמושלמי הוא:

$$(1/19-a/19+(12+7/19)A)\mu -b/30+14/30-(354+11/30)A =$$
$$\mu/19+14/30-(\mu/19)a-b/30+((12+7/19)\mu-354-11/30)A =$$
$$2+10297/492480-(1+272953/492480)a-b/30+(10+433459/492480)A$$

וההבדל בשנים מושלמיות שלמות:

$$995257/174830400-(365433/174830400)a-b/10650+(5358259/174830400)A.$$

<u>הערה</u>: לשלשה התרגילים למאמר על הלוח בחוברת ו' אפשר עוד לשלוח פתרונות.

כתובת המערכת:
דב יוז'וק, ירושלים, רח' מלאכי 20.

ש ו נ ו ת

בעיה פתוחה. בעתון Scripta Mathematica (יוויל עיי מוסד יהודי באמריקה) כרך ששי, שנת 1939, עמוד 218, מובאת הבעיה המעניינת דלקמן: "המצוך את הספרות של איזה מספר וחבר את התוצאה למספר המקורי. חזור על הפעולה הזאת לגבי הסכום ונהג בסכום החדש באותה דרך. אחרי מספר מספיק של צעדים יתקבל מספר הנקרא מימין לשמאל באותו אופן כמו משמאל לימין. למשל: 79+97=176; 176+671=847; 847+748=1595; 1595+5951=7546; 7546+6457=14003; 14003+30041=44044.

הוכחת התכונה המעניינת הזאת עודנה חסרה".

אולי ימצאנה אחד מקוראי "הידפים", או שמא ימצא דוגמה לסתור?

דרך שונה מהמקובלת להוכחת משפט הנדסי פשוט.

משפט: אם מדיאנה במשולש היא גם ביסקטריסה, המשולש הוא שוה-~~צלעות~~ שוקיים. הוכחה. נתון: משולש ABC ונקודה M על AB כך ש$AM=BM$ ו$\widehat{ACM}=\widehat{BCM}$. צ"ל: $AC=BC$. אם $AC\neq BC$, נוכל להניח $AC>BC$. תהי A' נקודה על AC כך ש$A'C=BC$. נחבר את A' עם M. המשולשים $CA'M$ וCBM חופפים, כי $CM=CM$, $CA'=CB$ לפי הבניה, ו$\widehat{A'CM}=\widehat{BCM}$ לפי ההנחה. מכאן $\widehat{A'MC}=\beta=\widehat{BMC}=\beta'$, $A'M=BM$. מ$A'M=BM$, $AM=BM$ יוצא $A'M=AM$. מכאן $\widehat{MAA'}=\alpha=\widehat{MA'A}=\alpha'$. אך α' היא זוית חיצונית למשולש $A'MC$ וβ' היא זוית חיצונית למשולש MCA. נקבל אפוא $\alpha=\alpha'>\beta=\beta'>\alpha$, כלומר $\alpha>\alpha$, מה שלא יתכן.

הוכחה פשוטה למשפט: מכפלת 4 מספרים תכופים אינה רבוע שלם (השוה מאמר פצורניק בחוברת ז'). מן הזהות:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$$

יוצא כי $n(n+1)(n+2)(n+3)$ אינו רבוע שלם, כי הבדל 2 רבועים תכופים הוא $(x+1)^2-x^2=2x+1$, והבטוי $2x+1$ גדול מ1, אם $x>0$.

הוכחה דומה, אך יותר מסובכת שלח לנו מ. קלין.

-:-:-:-:-

ב ע י ר ת .

הפתרונות לבעיות - גם לאלה שהוצגו בתוך המאמרים - צריכים להגיע לטערכת לא יאוחר מן ה15 בדצמבר. הבעיות המסומנות ב ÷ מבוססות על חמר הנלמד בכתות ה-ו בלבד (אך אין פרוש הסימן ÷ קלות, ואין פרוש העדרו קשי). בטמון המספרים הסדוריים של הבעיות בחוברת ז' נפלה טעות. אנו נמשיך כאן בספירה הנכונה. - בעיה 111 שלח לנו מיאי-שמיי מר י. נוימן.

÷109. א) על 3 מספרים טבעיים c,b,a ידוע כי סכום הפוכיהם, כלומר $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ הוא מספר שלם. אי-אילו הם? ב) אותה שאלה לגבי 4, 5 מספרים.

÷110. מצא את פתרונות המשואה $2^x-3^y=1$ במספרים טבעיים x וy.

÷111. פתר במספרים שלמים את המשואות $x^2+y^2+z^2=218$, $x+y+z=24$.

112. הוכח, כי בסדרה החשבונית $-1+3r$, $-1+2r$, $-1+r$, ... $(r=3,4,5,...)$ נכללות כל החזקות אי-הזוגיות של $-1+r$, ורק אי-הזוגיות.

113. הוכח, כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אירציונלי.

114. הוכח, כי $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ הם אירציונליים, אם a וb טבעיים ולא שניהם רבועים שלמים.

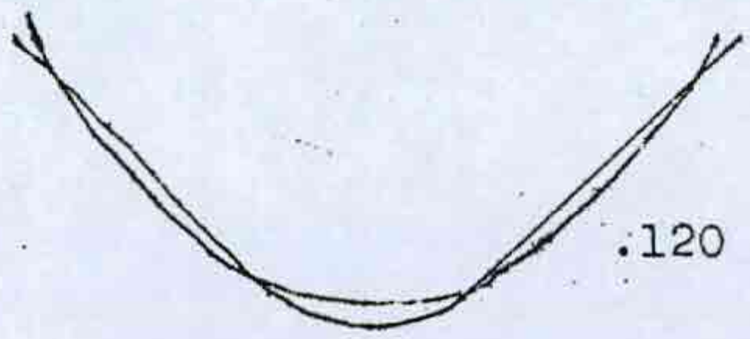
115. הוכח, כי המישור מתחלק עיי n ישרים לכל היותר ל $\binom{n+1}{2}+1$ חלקים (נשלחה לנו עיי מולצ'צקי וקלין).

÷116. למצא את כל הישרים המחלקים רבוע לשני חלקים חופפים (עם הוכחה).

÷117. מהו המספר המכסימלי של מעגלים שוים לא-נחתכים, המשיקים למעגל שוה להם?

118. על מסלה מעגלית מתחילים לרוץ 3 רצים מאותה נקודה ובאותו הרגע, כל אחד במהירות קבועה. מצא את התנאי לכך ששלשתם יפגשו פעם בנקודה אחת.

119. נתון כדור ודרך מרכזו מישור. הוכח, כי כל מעגל המאונך למישור והפוגש אותו בשתי נקודות מחוץ לכדור, נמצא כולו מחוץ לכדור (מעגל הוא מאונך למישור, אם המישור עובר דרך מרכזו ומאונך למישור המעגל).

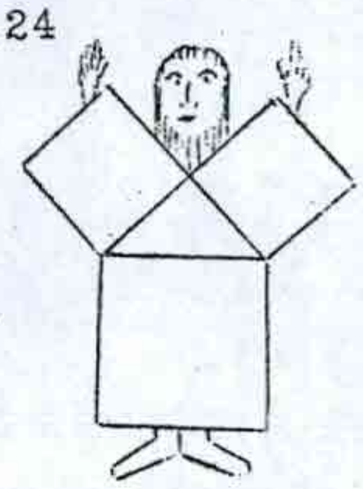


120. היתכן כי אלו הן פרבולות בעלות צירים מקביליים?

121. ידוע כי משיכת השמש על האדמה גדולה הרבה יותר ממשיכת הירח על האדמה. בכל-זאת גורם בעקר הירח לתופעת גאות ושפל. מה סבת הדבר?

(המשך הבעיות בעמוד 12).

שיחת חולין מתמטית



124. - "קץ כל המתמטיקה!" - בקריאה כזאת פרץ ראובן הממציא לכתה ביום הראשון ללמודים. - "מצאתי הוכחה פשוטה וחותכת, כי... כל העצמים מזדהים! אין "אני", ואין "אתה", אין תלמידים ואין מורה, אין בית-ספר ואין עיר ואין עולם, אין שנויים ואין חליפות, הכל, הכל מזדהה אחד בשני, הכל הוא-הוא!... והרי לכם הוכחה, באנדוקציה: תודו, כל עצם מזדהה בעצמו - אין ספק בדבר! משפטנו נכון אפוא ביחס לקבוצה שיש בה רק עצם אחד - והרי הצד הראשון של האינדוקציה נעשה! נניח עתה כי המשפט הוכח כבר ביחס לקבוצה המכילה n עצמים ונוכיח כי המשפט קים גם ביחס לקבוצה שיש בה n+1 עצמים. ובכן, נתונה קבוצה של n+1 עצמים, הרי n מהם מזדהים, לפי ההנחה. נשמיט מן הקבוצה החלקית של n העצמים המזדהים אחד מהם ובמקומו נשים את העצם ה-n+1 בקבוצה המקורית; הרי שוב, לפי אותה הנחה, יהיו כל העצמים בקבוצת n העצמים החדשה, עצמים מזדהים. נשתמש עתה בכלל האומר: שני עצמים המזדהים בשלישי, מזדהים ביניהם (אם ראובן הוא שמעון, ולוי גם כן שמעון, הרי ראובן הוא לוי). לפי כלל זה יוצא שהעצם ה-n+1 מזדהה גם בעצם שהשמטנו בראשונה, והרי שכל n+1 העצמים מזדהים ביניהם - ובכן כל העצמים בעולם מזדהים!" - כה סים ראובן, לגודל תמהונם של כל התלמידים, שעמדו פעורי-פה ולטושי-עינים, מבלי דעת מה להשיב לראובן על הוכחתו הקולעת והנמרצת.

מי מכם יציל את הכתה ממבוכה ואת העולם מכליון?

125. מורה בכתה א חזרה מעבודתה וספרה לבעלה: "היום חסרו ילדות אחדות, באו 43. ערכתי אתן משחק בקסר עם המספר 18: כלן עומדות במעגל, ילדה אחת אומרת 1, שכנתה 2 וכו', ה18 יוצאת. שכנתה מתחילה שוב ב1 וכו'. החוג מצטמצם עד שאחת נשארת. מה שמחו כלן, כשנשארה עדנה, שאגב במקרה גם התחילה". אחרי רגעים אחדים מעיר הבעל: "טעית, היו 42 ילדות". ספרה אשתו מחדש ומצאה שצדק. מנין לו?

126. במשך ימי החפש הצליח ראובן להוכיח משפט פלנימטרי מסובך: נתונים שני ישרים במיטור ועל אחד - הנקודות A ו B , ועל השני C ו D . דרך ABC חגים מעגל הפוגש את הישרים עוד ב'D. באפן מתאים מגדירים את 'A, 'B, 'C. המשפט הוא, שאם ABCD הם על מעגל אחד, גם 'A'B'C'D יהיו על מעגל אחד. מה דעתכם?

127. בקובץ-נוסחאות שיצא בזמן האחרון נמצאת הנוסחה $\pi(a+b)$ להקף האליפסה בעלת הצירים a ו b . מצא דוגמה, המראה בלי חשבון, כי הנוסחה הזאת אינה נכונה.

128. הלצה גרפית. כתב את המספרים: 313 10101 1332, כך שיהיו משפט עברי, ומצא משפטים דומים.

(המשך הבעיות מעמוד 11)

122. שים מקל על שתי אצבעות ידיך הימנית והשמאלית ונסה להזיז את האצבעות, כך שמרחקן יקטן. האצבעות תזוזנה בזו אחר זו חליפות. תן הסבר לתופעה הזאת. מה תהיה נקודת-הפגישה של האצבעות?

123. על גלגל, המסתובב סביב ציר, כרוך חבל. בקצה האחד של החבל תלוי קוף, ובקצה השני - אבן, המאזנת את הקוף. מה יקרה לגלגל, אם הקוף יתחיל פתאם לטפס על החבל?

דאר המערכת.

(א) תלמיד בירושלים, המוכן לעזור בסדור משחק-רביעיה הנדסי, מתבקש לפנות למערכת.

(ב) ארבעת העמודים הראשונים של חוברת ז' הופיעו במהדורה חדשה ומתוקנת. הם ינתנו חנם לכל מי שימסור למפיץ אותם עמודים במהדורה הישנה.

(ג) צורת הפצת העתון הנוחה ביותר היא ע"י מפיץ (מורה או תלמיד) אחד בכל כתה, או בכל בית-ספר תיכוני. הרוצים לקחת חלק בהפצה (במקום שהפצה אינה מסודרת עוד) יתקשרו עם המערכת.