המחיר 50 מיל

למתחילים בפיזיקה

לבוער תלרמד
בעריכת דב יוזיוק
בהשתתפות ד"ר ת. מוצקין

אוגוסט 1945 | חוברת י"ב | אלול תש"ה

ד"ר א. בר-אל

הנסיעה על "קיר - המות"

בשם פרעיש זה כנה את הצגותיו זוג רוכבי-אופנוע, אשר הופיע לפני שנים אחדות ב"תערוכה הלבנטינית" בתל-אביב, ואשר הדהים את קהל המבקרים בנסיעה על השטח הפנימי של גליל מאונך. בטורים הבאים ינתן נתוח קצר של הנסיעה המופלאה הזאת מבחינה פיסיקלית.

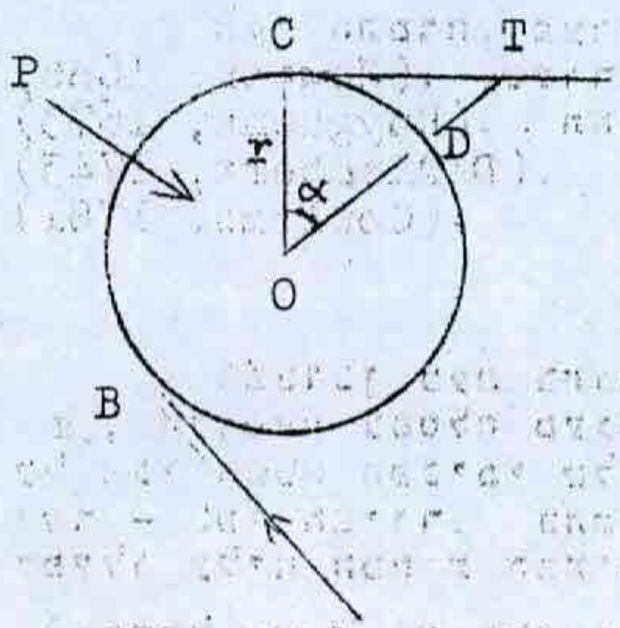
אזכיר תחלה עובדות אחדות ממתמטיקה ומפיסיקה.

1. אם α הוא מספר קטן, יהיה $\sin\alpha \cong \alpha$, $\sqrt{1 \pm \alpha} \cong 1 \pm \frac{\alpha}{2}$ ולכן:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \cong \sqrt{1-\alpha^2} \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2} \cong 1$$

2. אם תנוע נקודה על מעגל (r) במהירות קוית v ובמהירות זוית ω, יהיה $v = r\omega$. ואם ω - ולכן גם v - חבון קבועות, תכוסה עי"י הרדיוס, במשך הזמן t, הזוית $\alpha = \omega t$.

3. נקודה, הנעה במסלתה בתנועה קבועה - a - וללא מהירות התחלתית - תעבור, במשך הזמן t, את הדרך $x = at^2/2$.



4. חק ההתמדה: גוף חמרי, הנע בכוון ובמהירות מסוימים, ישמור על שניהם כל עוד לא שונה אחד מהם, או שניהם, עי"י גורם חיצוני ("כח").

נתבונן בגוף קטן, הנע במסלה ABCT: AB ו-CT קטעים ישרים, BC - קשת מעגל. במשך כל זמן תנועתו על BC יפעל עליו כח P ("צנטריפטלי"), המכוון אל מרכז המעגל. בC בפסקת פעולת הכח והגוף מתמיד שוב בתנועתו בקו ישר (המשיק למעגל בC). כעבור הזמן t יגיע הגוף ל-T, ו י ת ר ח ק אפוא מן המרכז r.

$$x = OT - OD = \frac{r}{\cos\alpha} - r = r.\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = r.\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

אם נסתפק ב α ק ט נ ה, מותר להניח $\overset{\frown}{CD} = CT = r\omega t$, כלומר: לו היה הגוף ממשיך את התנועה על המעגל, היה מגיע, אחרי הזמן t, ל D. בתנאים אלה יהיה:

$$x \cong r.\frac{2.(\frac{\alpha}{2})^2}{1} = \frac{r\alpha^2}{2} = \frac{r(\omega t)^2}{2} = \frac{r\omega^2}{2}.t^2 = \frac{a}{2}.t^2 \quad (a = r\omega^2).$$

אם כן: ל ו ר צ י נ ו להשאיר את הגוף על המעגל, צריכים היינו לפעול עליו בכח צנטריפטלי, אשר היה, במשך הזמן t, מ ק ר ב ו אל המרכז ב $x=(a/2).t^2$. מן הנוסחה הזאת נובע מיד, שכח זה גורם ת א ו צ ה ק ב ו ע ה $a=r\omega^2=v^2/r$ (המכוונת גם היא אל מרכז המעגל).

5. חק הפעולה: כל כח (P), המקנה למסה m תאוצה a, עומד ביחס ישר למכפלה ma; אם נבחר ביחידות מתאימות, נוכל לכתוב פשוט $P=ma$. השעור של הכח הצנטריפטלי יהיה אפוא

$$P = mr\omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

6. חק התגובה: כל גוף, הנפעל ע"י גוף אחר (בלחץ, משיכה, וכו'), משיב לו את פעולתו (לחץ, משיכה, וכו') באותו השעור ובאותו הכוון, אך בסגמה הפוכה.

אם כן במקרה של תנועה מעגלית של גוף m דרוש גוף שני (M) - קיר, פסים, חוט, וכו' - המַשה את m; תגובת m על M נקראת בשם "כח צנטריפוגלי". יש לזכור היטב, כי שני הכחות - הצנטריפטלי והצנטריפוגלי - פועלים על ג ו פ י ם ש ו נ י ם ואינם יכולים אפוא לאזן זה את זה.

7. כח ההתמדה: את הנוסחה $P=ma$ אפשר לכתוב בצורה המלאכותית $P + (-ma) = 0$, הנתנת לפרוש הבא: הכח הפעיל P מאוזן ע"י כח מדומה $Q = -ma$ ("כח ההתמדה"). ע"י כך אפשר ל ה ע ב י ר כ ל ש א ל ה ד י נ מ י ת ל ת ח ו ם ה ס ט ט י ק ה.

במקרה הנידון ישוה כח ההתמדה ל $m.v^2/r$ ופעל כנגד הכח הצנטרי-פטלי. נוכל אפוא לומר: הכח הצנטריפטלי דרוש כדי לאזן את כח ההתמדה. עם זה איננו זקוקים עוד לתמונת המעגלן

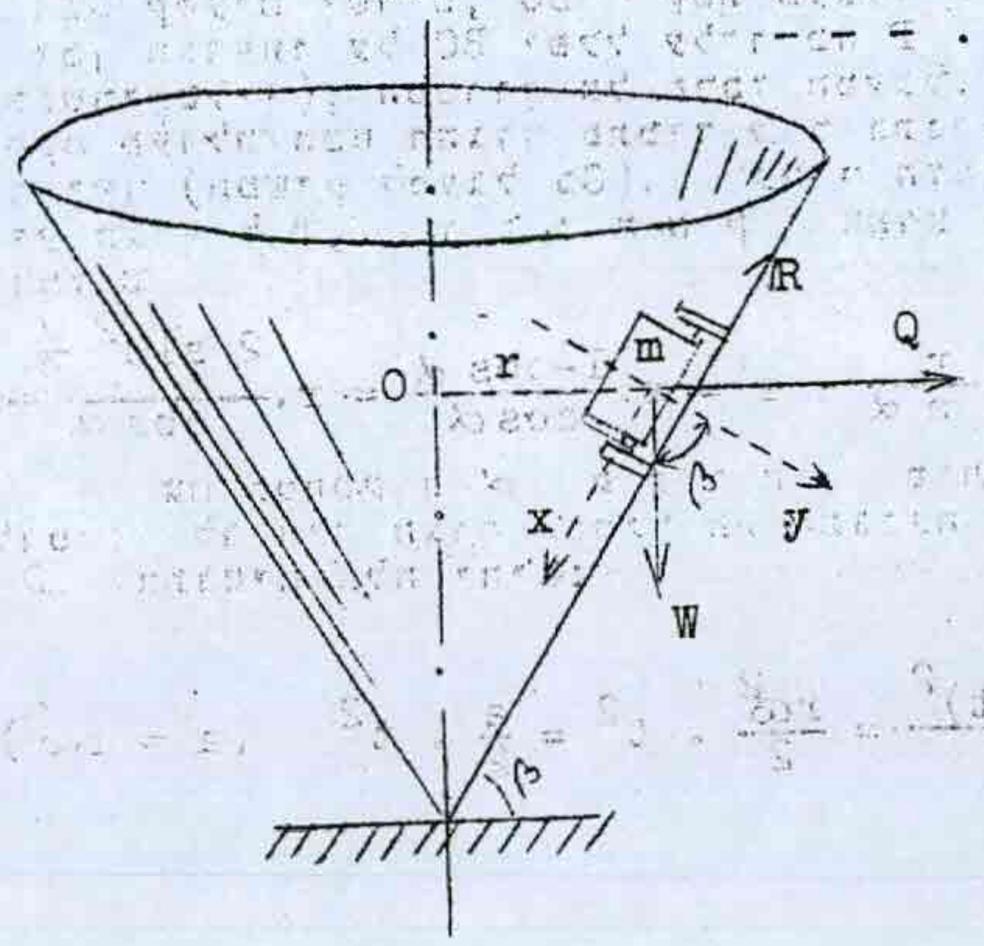
8. החכוך. הסעת גוף על פני גוף אחר נתקלת, כידוע, בהתנגדות החכוך (R), התלויה בטיב השטחים הבאים במגע ובלחצם ההדדי (N). בקרוב ראשון מתקימת הנוטחה $R = fN$, בה מסמן f מספר קבוע ("ספרת-החכוך"), האפיני לכל ז ו ג ח מ ר י ם.

את f מותר לכתוב גם בצורה טריגונומטרית $f = tg\varphi$ ואפשר להוכיח בנקל, ש φ ("זוית החכוך") היא הנטיה המכסימלית של מדרון, אשר גוף כבד עודנו עלול להשען עליו מבלי להחליק (אם $tg\varphi$ הוא ספרת החכוך בין הגוף למדרון).

החכוך מופיע אך ורק כהתנגדות לתנועה ולא כגורם לה.

הערה הסטורית.

חקי התמדה, פעולה ותגובה ידועים בשם "עקרונות ניוטון" (Newton, 1686). שעור הכח הצנטריפטלי ניתן ע"י הוי'גנס (Huyghens, 1673). תחבולת "כח-ההתמדה" הומצאה ע"י ד א ל מ ב ר (D'Alembert, 1743). חקי החכוך בחקרו לראטונה ע"י ק ו ל ו ן (Coulomb, 1781).



בתבונן כעת בתנועת עגלה (m), הנוסעת במסלה מעגלית אפקית על פני השטח הפנימי של קונוס ישר - כפי הציור. בהתאם לנ"ל יפעלו עליה הכחות הבאים:

המשקל $W=mg$ (g=תאוצת הנפילה);
כח ההתמדה $Q = \frac{mv^2}{r}$
החכוך $R=fN=f(W\cos\beta+Q\sin\beta)$

הכח R יפעל במגמה המסומנת בציור, אם העגלה תשאף לזוז במגמת x, ולהפך. תזוזה כזאת לא תתקים, אם: $W \cdot \sin\beta - Q \cdot \cos\beta < R$

$$\therefore \quad mg \cdot \sin\beta - \frac{mv^2}{r} \cdot \cos\beta < f.(mg \cdot \cos\beta + \frac{mv^2}{r} \cdot \sin\beta) \quad \Big| \cdot \frac{r}{m}$$

$$r.g.\sin\beta - v^2 \cdot \cos\beta < f.(r.g.\cos\beta + v^2 \cdot \sin\beta)$$

$$\frac{v^2}{r.g} \quad \frac{\sin\beta - f.\cos\beta}{\cos\beta + f.\sin\beta} = \frac{\sin\beta - tg\varphi \cdot \cos\beta}{\cos\beta + tg\varphi \cdot \sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin\beta \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\beta}{\cos\beta \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = tg(\beta-\varphi)$$

$\cos\beta \cdot \cos\varphi + \sin\beta \cdot \sin\varphi = \cos(\beta-\varphi)$

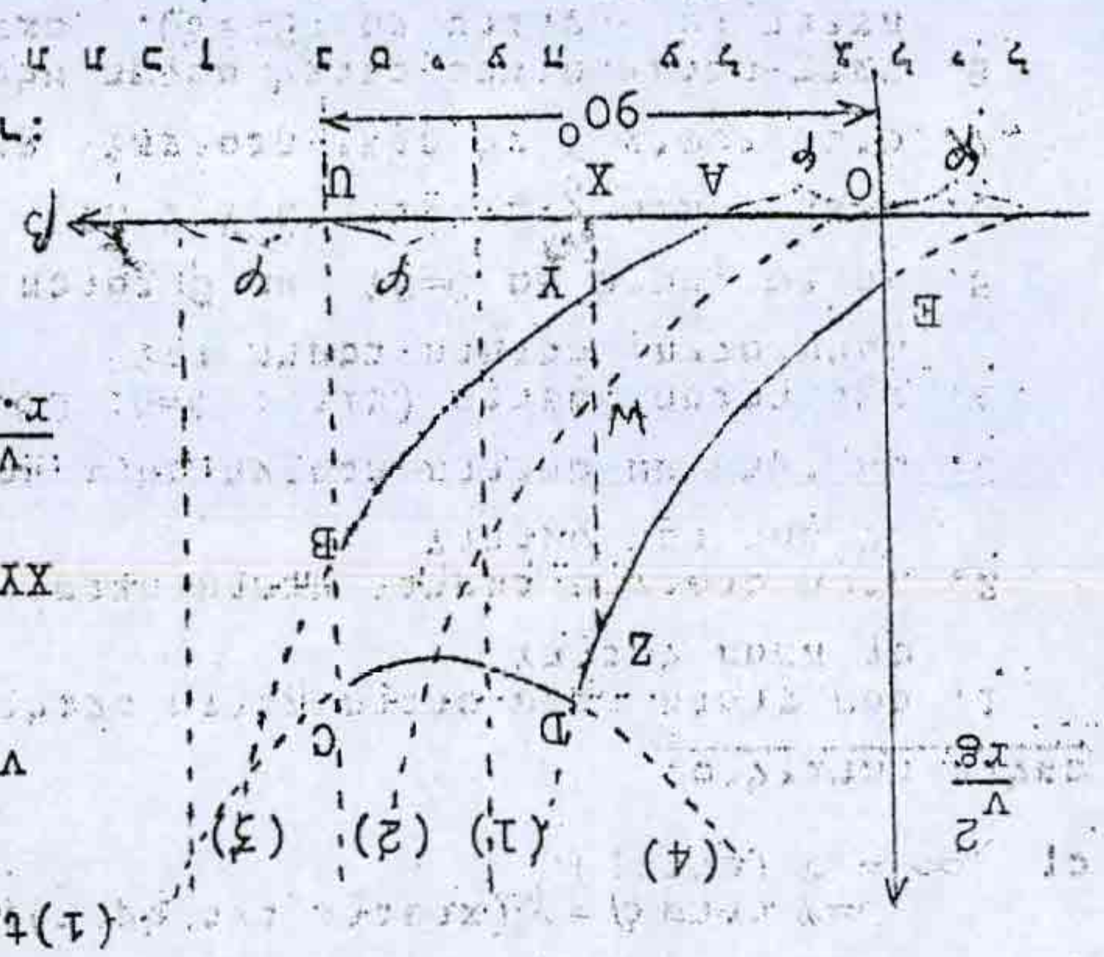
$$\frac{v^2}{r.g} < tg(\beta + \varphi) \quad \text{בא ,-x מהצד הזרוע הקרוב אל הגוף מהגדה}$$

בא ,הדפסת המחבר הנמוך ביותר :15 בא

$$tg(\beta - \varphi) < \frac{v^2}{r.g} < tg(\beta + \varphi) \qquad (I)$$

בדוגמה זו הגוף מגיע לגובה מרבי

(1) $tg(\beta+\varphi)$; (2) $tg\beta$; (3) $tg(\beta-\varphi)$



$0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ הזווית המרבית

בגלל φ הגוף מגיע לגובה מרבי

$$\frac{v^2}{r.g} \leq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta} \qquad (II)$$

$\beta = 0$ הגוף נע לאורך מסלול אופקי (∞ מהצד הקרוב) $\left(\frac{n - \cos\beta}{\sin\beta}\right)$ מתפרנס

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי ($\beta = 2\,\mathrm{arctg}\,n - 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי $\beta = 90^\circ$)

$$\frac{v^2}{r.g} \geq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta} \qquad (III)$$

בגלל φ הגוף מגיע לגובה מרבי

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

$$\frac{v^2}{r.g} \geq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta} \qquad (IV)$$

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

$\beta = 0$ הגוף נע לאורך מסלול אופקי

$v = \infty$ מהצד הקרוב, $\frac{n - \cos\beta}{\sin\beta}$ מתפרנס

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

$$\frac{v^2}{r.g} \geq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta}$$

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

$$\frac{v^2}{r.g} \geq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta}$$

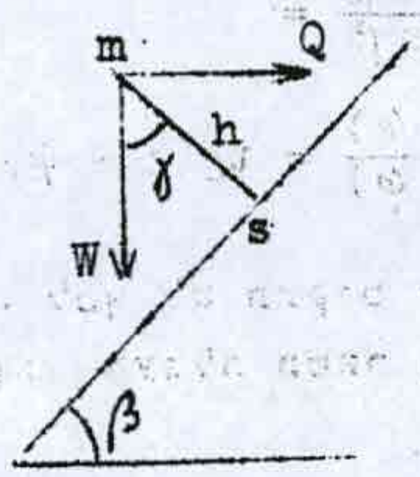
$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

$$\frac{v^2}{r.g} \geq \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta}$$

$\beta = 90^\circ$ הגוף נע לאורך מסלול אנכי

עיי המשטח OABCDE; ואותה שבתוך גליל מאונך כלוא בקטע $\frac{1}{2}$ BC.

אם בחליף את העגלה באופנוע, יתוסף על כל הנאמר לעיל עוד תנאי אחד: צריכים להתאזן המומנטים הסטטיים של Q ו W ביחס לקו המגע בין הקיר ובין גלגלי האופנוע; כלומר:



$$W \cdot h \cdot \sin\gamma = Q \cdot h \cdot \cos\gamma$$

h = מרחק ממרכז הכבד (m) של האופנוע (יחד עם הנוסע) עד קו המשען (s);

γ = הזוית בין h לאנך.

$$\therefore\ mgh.\sin\gamma = m\frac{v^2}{r} \cdot h.\cos\gamma \longrightarrow tg\,\gamma = \frac{v^2}{rg} \quad (III)$$

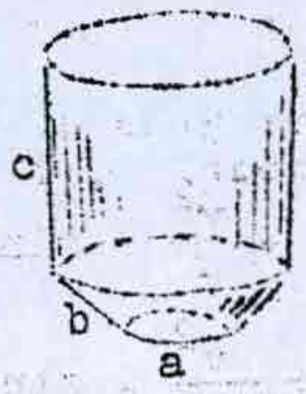
ובתקף (I): $\beta - \varphi < \gamma < \beta + \varphi$

(וכסובן גם $0^\circ < \gamma < 90^\circ$).

$\varphi=0$ דורש $\gamma=\beta$ (אופנוע נצב לקיר); המקרה $\gamma=0$ אינו אפשרי אלא אם כן $r=\infty$ (מדרון).

שאלות ותרגילים.

1. במה דומות ובמה שונות תנועה מעגלית וזריקה פרבולית? כיצד תעבור מן האחת לשניה?
2. איפה מופיעים במקרנו הכחות הצנטריפטלי והצנטריפוגלי? על מה פועל כל אחד ומה שעורו?
3. מה יקרה אם מהירות הנסיעה תחרג את הגבולות הנדרשים עיי (I)?
4. עבד דוגמה מספרית (כגון: m=4; f=0,60; r = 5 מ'). מהי המהירות המכסימלית, המותרת במקרה זה?
5. מה יש להסיק אם B=C? אם C נמוכה מ B? אם $\beta<\varphi$?
6. כיצד משתנה γ כשנעבור מ Y ל Z?
7. כיצד ישפיע f על תנאי הנסיעה? עין במקרים $\varphi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
8. "קיר-המות" מורכב בפועל משלשה חלקים, כפי הציור (b - קונוס עם $\beta=45^\circ$). מצא בתוך השטח OABCDE את המעברים a-b-c.



9. כיצד ישתנה התנאי (I) אם r תלוי ב β (למשל, אם הקיר בנוי בצורת חצי-כדור)?
10. חקור את אפשרות הנסיעה במקרה $\beta>90^\circ$ (למשל: השטח החיצוני של קונוס, או של כדור).
11. מה תהיה צורת השטח OABCDE בשביל "קיר-המות" הנמצא
   א. על פני הירח ($g' \cong 0.17g$);
   ב. על פני השמש ($g'' \cong 27g$)?

//// מדף ספרים ////

הכוכבים במסלותם (רשימת התכן בחוברת הקודמת).

זהו ספר נפלא, הן לירדעים מעט והן לירדעים הרבה. ספר קטן המכיל הרבה מאד. והכתוב באפן מרתק. הרוצה בספר אסטרונומי אחד בלבד יבחר בו, והרוצה ברבים לא יעסוק עליו. תקונים קטנים, א) לתרגום: עמוד 13 שורה 13 משיכתה. ש' 20: בעוד שהצד השני אפל. ע' 24 ש' 10: גדולה אלפי פעמים. ע' 37, כהמשך להערה: וגם השמש, ולפעמים גם מאדים ואחדים מכוכבי הלכת הזעירים. ע' 66 ש' 3 מלמטה: כ300000 קיים. ע' 69: 6 טרילירד. ע' 70 ש' 7: 330 שונות. ע' 91, כהמשך להערה: דהינו 9000000000000 קיים. ע' 92 ש' 14: 15 ביליון. ע' 123 ש' 2 מלמטה: במשך חדש אחד. - ב) למקור: ע' 99 ש' 9: ע' 112 ש' 7: ?. ע' 124 ש' 5 מלמטה: דורות של 70 שנה. ע' 135 ש' 1: השוה בתנ"ך]

ת.מ.

א. פריבלוב

מספרים מרוכבים

§1. מספרים מרוכבים והפעולות בהם.

1. מושג המספר המרוכב. מספר מרוכב α נקרא זוג מספרים ממשיים a ו b, הלקוחים בסדר מסוים: $\alpha=(a,b)$. אם $b=0$, נסכים לסמן את הזוג המתאים בקצור בa, בהניחנו $(a,0)=a$. באפן זה מופיעה קבוצת כל המספרים הממשיים כחלק של קבוצת כל המספרים המרוכבים. אחרי הכנסת מושג המספר המרוכב כזוג מספרים ממשיים נגדיר את הפעולות היסודיות בין המספרים האלה. הואיל וקבוצת כל המספרים הממשיים מופיעה כחלק של תחום כל המספרים המרוכבים, עלינו לדרש בשעת קביעת הפעולות הארתמטיות היסודיות במספרים מרוכבים, שהפעולות האלה, כשמשתמשים בהן למספרים ממשיים תתנה בתוצאה אותם המספרים, המתקבלים בארתמטיקה של המספרים הממשיים. מצד שני, אם ברצוננו, שלמספרים המרוכבים יהיה שמוש אוניברסלי בשאלות האנליזה, עלינו לדרש, שהפעולות היסודיות בהם המוכנסות על ידנו תמלאנה את האכסיומות הרגילות של אותמטיקת המספרים הממשיים.

2. חבור וחסור של מספרים מרוכבים. חבור שני מספרים מרוכבים $\alpha=(a,b)$, $\beta=(c,d)$ נגדיר בעזרת השויון:

$$\alpha+\beta=(a+c;b+d). \qquad (I)$$

אם נשתמש בהגדרה זו לשני מספרים ממשיים a ו c, נמצא:

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c,$$

ז"א הדרישה הראשונה, שהטלגוה של הפעולות המוכנסות, מתמלאת ביחס לחבור.

כפול שני מספרים מרוכבים α ו β נגדיר בעזרת השויון:

$$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc). \qquad (II)$$

ההגדרה הזאת, כשמשתמשים בה לשני מספרים ממשיים a ו c, נותנת $(a,0)(c,0)=(ac,0)=ac$, ז"א פעולת הכפול איננה נותנת סתירה לארתמטיקה של המספרים הממשיים.

בהשתמשנו בהגדרות (I) ו(II), קל לאמת, שפעולות החבור והכפול של מספרים מרוכבים משועבדות לחקי הארתמטיקה הידועים לנו:

1) חלופיות החבור: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,
2) " הכפול: $\alpha\beta=\beta\alpha$,
3) קבוציות החבור: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,
4) " הכפול: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$,
5) פלוגיות ביחס לחבור וכפול: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

אנו ממליצים לקורא לאמת את נכונות כל החקים האלה בתחום המספרים המרוכבים.

בפעולות במספרים מרוכבים ממלא תפקיד מיוחד מספר, המתואר על ידי הזוג (0,1) והמסומן באות i (מן המלה הצרפתית imaginaire). אם נעלה את הזוג הזה בריבוע, כלומר נכפל אותו בעצמו, נקבל בתקף הגדרה (II):

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

ז"א $i^2=-1$, שממנו נובע, הסמוך $i=\sqrt{-1}$. משימנו לב לכך, נוכל לרשם כל מספר מרוכב α כך:

$$\alpha=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi,$$

ז"א כל מספר מרוכב $\alpha=(a,b)$ אפשר לתאר בצורת סכום של מספר ממשי a ומספר מדומה שהוא bi.

מקובל לקרא לa החלק הממשי של המספר המרוכב α ולסמן ב$R(\alpha)$ (מן המלה הצרפתית réel), לb - המקדם על יד החלק המדומה של המספר α ולסמן ב$I(\alpha)$ (מן המלה הצרפתית imaginaire). ברור, אם $I(\alpha)=0$, נהפך המספר המרוכב α למספר ממשי. אם $R(\alpha)=0$ - למדומה טהור. שני מספרים מדומים נקראים, לפי ההגדרה, שוים, אם שוים ביניהם חלקיהם הממשיים ושוים חלקיהם המדומים.

שני מספרים מרוכבים שיש להם אותו עצמו מרכיב ראשון, אך מרכיבים שניים מנוגדים בסימניהם, נקראים צ מ ו ד י ם ומסומנים כך:

$$\alpha = a+bi \ , \quad \bar{\alpha} = a-bi \ .$$

כמקרה פרטי של השויון (II) נצין את חק הכפול של שני מספרים צמודים:

$$\alpha . \bar{\alpha} = a^2+b^2 .$$

בארתמטיקה נקרא מודול החבור מספר כזה, שעל ידי הוספתו אין התוצאה משתנית: המספר 0; כיוצא בו 1 הוא מודול הכפול, ז"א מספר, שבכפול בו אין התוצאה משתנית. נראה, שבתחום כל המספרים המרוכבים יש מודול חבור אחד – המספר 0, ומודול כפול אחד – המספר 1.

באמת, יהי δ מודול החבור, ז"א

$$\alpha + \delta = \alpha, \tag{1}$$

באשר α – מספר מרוכב כלשהו. נראה כי מספר δ כזה קים, ויחיד הוא. אם נחבר לשני חלקי השויון (1) את המספר $-\alpha=\alpha.-1$, נקבל: $\delta=0$.

יהי, הלאה, ε מודול הכפול, ז"א

$$\alpha . \varepsilon = \alpha, \tag{2}$$

באשר $\alpha\neq 0$. אם נכפל את שני חלקי השויון (2) במספר $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$, נקבל:

$$\frac{1}{a^2+b^2} . \bar{\alpha}\alpha . \varepsilon = \frac{1}{a^2+b^2} . \bar{\alpha}\alpha$$

הואיל ו$\bar{\alpha}.\alpha=a^2+b^2$, יוצא מכאן: $\varepsilon=1$.

על סמך ההגדרה (II) מכפלת שני מספרים מרוכבים היא אפס, אם לפחות גורם אחד שוה לאפס. נכונה-גם הטענה ההפוכה: אם מכפלת שני מספרים מרוכבים שוה לאפס, לפחות אחד הגורמים הוא אפס. באמת, יהי $a.\xi=0$, $\alpha\neq 0$. אם נכפל את שני חלקי השויון הזה במספר $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$, נקבל: $\xi=0$.

3. <u>חסור וחלוק של מספרים מרוכבים.</u> החסור מגדר כפעולה, ההפוכה לחבור. המרס שני מספרים מרוכבים $\beta=c+di$ ו $\alpha=a+bi$ נקרא לפי ההגדרה למספר z, הממלא את השויון:

$$\alpha + z = \beta. \tag{3}$$

נראה, שפעולת החסור נתנת לבצוע חדערכי בתחום המספרים המרוכבים. נוסיף לשני חלקי השויון (3) את המספר $-\alpha$, נקבל:

$$z=\beta+(-\alpha)=\beta-\alpha=c-a+(d-b)i \ .$$

לבסוף, החלוק הוא פעולה, ההפוכה לכפול. כך, בסמל $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ נבין לפי ההגדרה מספר z, הממלא את השויון:

$$\alpha . z = 1. \tag{4}$$

אם נכפל את שני חלקי השויון (4) במספר $\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$, נמצא:

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$$

מנת שני מספרים מרוכבים β ו α נסמן ב $\frac{\beta}{\alpha}$, בהניחנו:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} . \beta$$

ובכן, חלוק, להוציא חלוק באפס, נתן תמיד ובאפן חדערכי לבצוע בתחום המספרים המרוכבים.

השויונות:

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i \ ,$$
$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i \ ,$$

בהיותם משוים עם השויונות (I) ו(II), מראים, שאם נחליף בסכום או במכפלה של שני מספרים מרוכבים את המחוברים או את הגורמים במספרים צמודים להם, נקבל בתוצאה מספרים צמודים. הואיל וחסור וחלוק מופיעים כפעולות,

ההפוכות ביחס לחבור וכפול, נכון הסק זה גם ביחס לפעולות האלה. לפי זה, אם נתאים לכל מספר מרוכב את מספרו הצמוד לו, נקבל העתקה של מערכת המספרים המרוכבים על עצמה בתכונה זו, שהשויונות:

$$\alpha+\beta=\gamma\ ,\quad \alpha-\beta=\gamma\ ,\quad \alpha\cdot\beta=\gamma\ ,\quad \frac{\beta}{\alpha}=\gamma$$

ישארו נכונים, אם נחליף את המספרים הנכנסים בהם בתמונותיהם. מכאן יוצא בפרט, שכל משואה בין מספרים מרוכבים, ששני חלקיה מכילים פעולות חבור, חסור, כפול וחלוק, נשארת ללא שנוי, אם נחליף כל מספר מרוכב במספרו הצמוד.

מתוך "מבוא לתורת הפונקציות של משתנה מרוכב". תרגם דב יבז'וק.

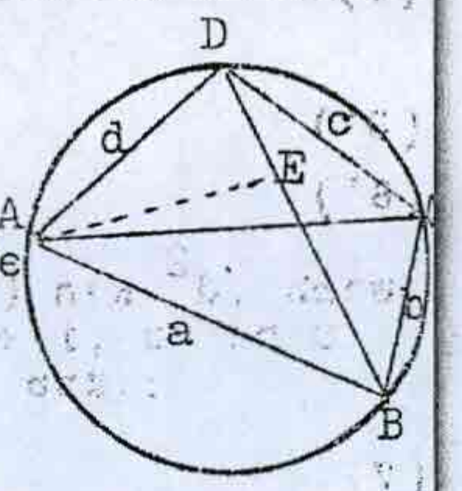
ליתר התעמקות בנושא המספרים המרוכבים עיין בספר "מבוא למתימטיקה" של פרופ' פרנקל, עמ' 141-168, 214-216.

דייר ארדה מ.ר קלה

על משפט תלמי.

כפלא הוא איך יכלו התוכנים הגדולים של יון העתיקה לבצע את חשוביהם מבלי ידיעת הטריגונומטריה במישור ועל הכדור. את מקום הדרכים הנהוגות כיום מלאו משפטים יפים אחדים המובאים - כחלקם בשם מנלאוס - על ידי התוכן תלמי (פטולומאוס) בספרו האסטרונומי המפורסם והכולל, שנקרא אחרי כן אלמגסט. כזה הוא המשפט על המרובע המוקף, אשר עד לפני זמן קצר נלמד בשם "משפט תלמי" בבתי הספר ואשר שמש בתקופה העתיקה מעלה מקום לבוסחות על סינוס וקוסינוס של $\alpha+\beta$. העובדה הפשוטה המובעת על ידי המשפט - כדאי לדעתה גם היום, הן לכשעצמה והן בגלל קשריה לתחומים מתמטיים אחרים.

משפט תלמי אומר, כי במרובע-המיתרים שוה מכפלת האלכסונים לסכום מכפלות הצלעות הנכחיות זו לזו, או, לפי המסומן בציור: $ef=ac+bd$.



לשם הוכחה נבנה את הזוית CAD בא ליד AD באופן שטוקה החפשית תפגוש את האלכסון f ב E. המשולשים ABC ו DAE דומים זה לזה (למה?), ומכאן $DE:d=b:e$, זאת אומרת $DE=bd/e$. גם המשולשים ABE ו ACD דומים זה לזה ומכאן $EB:a=c:e$, זאת אומרת $EB=ac/e$, לכן יהיה: $f=DE+EB=bd/e+ac/e=(bd+ac)/e$, ומכאן $ef=ac+bd$.

קל לראות כי משפט תלמי כולל גם את משפט פיתגורס, כי גם המלבן הוא מרובע-מיתרים ואלכסוניו שוים וגם הצלעות הנכחיות שוות בו. לפיכך: $e^2=a^2+b^2$.

בעזרת משפט תלמי אפשר גם לחשב את אלכסון הטרפז שגה הסוקים, כי גם הוא מרובע-מיתרים (למה?) ואלכסוניו שוים (למה?) ולכן: $e^2=ac+b^2$.

לעומת זאת אין משפט תלמי מספיק, כדי לחשב בעזרתו בלבד את אלכסוני מרובע-המיתרים. אבל מפני שמרובע-מיתרים נקבע ע"י 4 צלעותיו (למה?), מוכרחה להתקים אפשרות לחשב את אלכסוניו בעזרת ארבע הצלעות. ובאמת הדבר אפשרי בעזרת בוסחת השטח של המשולש $F=abc/4r$. בעזרת נוסחה זו אפשר לבטא את e/f ע"י ארבע הצלעות; לפי משפט תלמי נתון גם ef ובעזרת כפול וחלוק של ef ב e/f אפשר לחשב את e ואת f.

בנוסחת שטח המשולש הנ"ל נשתמש, כדי לבטא את שטח המרובע בשני אופנים, פעם ע"י המשולשים ABC ו ADC ופעם ע"י המשולשים ABD ו CBD. בשויון המתקבל אפשר לצמצם את r ונשארת רק מנאה בשביל e/f כדלקמן:

$$F(ABC)=abc/4r\ ,\quad F(ADC)=cde/4r\ ,\quad F(ABD)=adf/4r\ ,\quad F(CBD)=bcf/4r\ ,$$

לכן $abc/4r+cde/4r=adf/4r+bcf/4r$, ומכאן $e(ab+cd)=f(ad+bc)$, זאת אומרת $e/f=(ad+bc)/(ab+cd)$. לפי משפט תלמי, $ef=ac+bd$, ולכן:

$$e^2=(ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)\ ,\quad f^2=(ac+bd)(ab+cd)/(ad+bc)$$

אפשר לתת לבוסחות אלה צורה קלה יותר לזכרון ע"י החשבון הבא:

$$e^2=\frac{a^2cd+abc^2+abd^2+b^2cd}{ab+cd}=\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}$$

$$f^2=\frac{a^2bc+adc^2+adb^2+bcd^2}{ad+bc}=\frac{ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)}{ad+bc}.$$

נראה לפי הציור את מצב הגדלים a,b,c ו d ביחס ל e וכן ביחס ל f ונבין את המשמעות של הביטויים

ד ב י ר ז י ר ק

האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית היא רבוע שלם?

ב"דפים" חוברת ז, עמודים 6-8, הוכיח א. פצורניק כי מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרת המספרים הטבעיים אינה רבוע שלם. הוכחה קצרה למשפט זה נתנה גם בחוברת ח, עמוד 11. בתורת הכללה אפשר לשאל: האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית היא רבוע שלם? ברצוני להוכיח כאן את המשפט הבא:

משפט. מכפלה מצורת $a(a+d)(a+2d)(a+3d)$, כאשר a ו d הם מספרים טבעיים זרים ביניהם, אינה רבוע שלם, אם $a \geqslant (-3d+\sqrt{4d^4+5d^2+1})/2$.

במלים אחרות: רק בראש סדרה חשבונית שאברה הראשון והפרשה טבעיים־זרים ביניהם במצאות אולי רביעיות של מספרים תכופים, שמכפלתם היא רבוע שלם. לעמת זה מובטחנו כי במרחק מספיק מן הראש לא יקרה דבר זה לעולם.

הוכחה. קיומת הזהות

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4=\left[a(a+3d)+d^2\right]^2, \tag{1}$$

שקל לאמתה על ידי חשוב 2 האגפים. אילו היה $a(a+d)(a+2d)(a+3d)$ רבוע שלם, היה לפי הזהות (1) והמספט על מספרי פתגורס (עכל פתגורנת המשואה $x^2+y^2=z^2$ במתמ טבעיים זרים ביניהם כלולים בנוסחות: $z=m^2+n^2$ ו $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, או $y=m^2-n^2$, $x=2mn$, כאשר m ו n עוברים על כל המספרים הטבעיים ו $m>n$):

$$a(a+3d)+d^2=m^2+n^2 \tag{2}$$

ו

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)=(m^2-n^2)^2=(m-n)^2(m+n)^2, \tag{3}$$

$$d^2=2mn, \tag{4}$$

או

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)=4m^2n^2, \tag{3'}$$

$$d^2=m^2-n^2. \tag{4'}$$

על ידי הצבת (4) באגף השמאלי של (2), נקבל:

$$a(a+3d)=(m-n)^2. \tag{5}$$

מכאן ו(3): $(a+d)(a+2d)=(m+n)^2$ (6)

על ידי הצבת (4') באגף השמאלי של (2), נקבל:

$$a(a+3d)/2=n^2 \tag{5'}$$

מכאן ו(3') $(a+d)(a+2d)/2=m^2$ (6')

הפרש הרבועים (6) ו(5) הוא $2d^2$. הפרש הרבועים (6') ו(5') הוא d^2. הפרש הרבועים של 2 מספרים טבעיים אינו קטן מספר הקטן + 1, כי אם u ו v הם מספרים טבעיים יהיה: $(u+v)^2-u^2 \geqslant (u+1)^2-u^2=2u+1$. מכאן:

$$2d^2 \geqslant 2\sqrt{a(a+3d)}+1 \tag{7}$$

או:

$$d^2 \geqslant \sqrt{2a(a+3d)}+1 \tag{7'}$$

מ(7) יוצא: $a \leqslant (-3d+\sqrt{4d^4+5d^2+1})/2$ (8)

מ(7') יוצא: $a \leqslant (-3d+\sqrt{2d^4+5d^2+2})/2$ (8')

האגף הימני של (8) גדול מן האגף הימני של (8'), כי d הוא מספר טבעי, לכן קיים משני אי-השויונות (8) ו(8') לפחות אי-השויון החלש יותר (8).

קבלנו אפוא בחן-בדיקה, המאפשר להחליט לכל d טבעי נתון האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית בעלת ההפרש d ואבר ראשון טבעי זר לd יכלה להיות רבוע שלם, ודהינו, לפי (8), יש לבדק רק מספר סופי (קטן ביחס) של מספרים a.

ט כ נ י ק ה ו מ ד ע, ירחון למדע שמושי ולהשכלה, חוברת 65, המחיר 90 מיל. מאמרים מתמטיים ופיסיקליים כלליים בחוברת זו: המחקר המתימטי והאסטרונומי אצל היהודים, מאת אברהם הלוי פרנקל. - הכשרת הצפון הרחוק להתישבות. - על סכום הפינות בארבעונים תקינים,

שרונרת

איך תחשב לקויי שמש וירח. חשוב הימים שבהם חלים לקויי שמש וירח נוח במיוחד בלוח של חדשי ירח, כלוח העברי והמושלמי. הכלל הקצר הבא, הנותן תוצאה נכונה כמעט תמיד, מדפס כאן אולי בפעם הראשונה.

חשוב הלקויים נעשה קל ביותר בעזרת יום החוזר חלילה אחרי כל 6 חדשים עבריים פחות 4 ימים (ביתר דיוק: פחות 1/8 - 4 ימים, מה שמשפיע אחרי כמה פעמים) והחל למשל ביום ייד בסיון תשיו (13.6.46). יום זה יוכל להקרא יום קרבת לקוי, או בקצור יום קרבה.

אם יום הקרבה מרוחק מטייו בחדש העברי ב11 יום או פחות (בין שיום הקרבה הוא לפני טייו, כין לאחריו) חל בטייו לקוי ירח חלקי; ואם ב5 ימים או פחות, לקוי שלם. לקוי ירח רואים על מחצית פני כדור הארץ.

אם יום הקרבה מרוחק מראש חדש (מלפניו או מלאחריו) ב16 יום או פחות, חל בראש חדש לקוי חלקי של השמש, שרואים אותו בערך ב1/8 של פני כדור הארץ; ואם ב11 או פחות, ישנו גם כן לקוי חלקי באותו השטח, אך בתחום צר וארך במרכז השטח הזה, התופס כחלק השלשים ממנו, רואים ברגעים האמצעיים של זמן הלקוי החלקי לקוי שלם או טבעתי.

בזכיר עוד שאחרי 38 ימי קרבה, הם 18 שנים אזרחיות ו11 יום, או 19 שנים עבריות פחות שנה לא-מעוברת, חוזרים הלקויים לפי סדרם. 70% של הלקויים חוזרים אחרי שנה עברית (לא-מעוברת), וכן חוזרים 70% אחרי 19 שנים עבריות או אזרחיות.

כדי לזכר את הכלל הנייל (אחרי שהובן בצורתו המפרטת), צריך לקבע במח רק את המספרים שהופיעו: 5, 11, 11, 16; את המחזור: 6 חדשים - 4 ימים + 1/8 יום, ואת התאריך ייד בסיון תשיו.

ת ר ג י ל . חבר לפי הכלל הזה את לוח הלקויים לשנים תשייה, תשיו ותשייז ושלח למערכת.

דייר ת. מוצקין.

מכונה פוטו-אלקטרית לפרוק מספרים.

צעד גדול קדימה בשדה פרוק המספרים הטבעיים לגורמים ראשוניים צעדה האנושות על ידי המצאת מכונה פוטו-אלקטרית, המפרקת מספרים גדולים במהירות מפליאה. למשל, פרוק המספר

$$2^{93}+1=3^2 \cdot 529510939 \cdot 715827883 \cdot 2903110321$$

נמשך רק שלש שניות. מכונה נפלאה זו נבנתה באמריקה על ידי ד.ה. להמר (D.H. Lehmer). היא מרכבת בעקר משלשים גלגלי-שנים מקבילים, המאפשרים במצבים מסוימים לקרן אור לעבר דרך חורים קטנים בהם. רושמים במכונה את השאלה ומביאים אותה לידי תנועה. הגלגלים מסתובבים במהירות עצומה בעוד קרן האור מחליקה עליהם ומבקשת מוצא לעברו. במצב של פתרון מסתדרים כל החורים בקו ישר אחד, קרן האור עוברת דרכם ונקלטת על ידי "עין" פוטו-אלקטרית, המעמידה את המכונה ומרשה לקרא את התוצאה. המכונה יודעת לפתר את השאלה הבאה: למצא מספר שלם x שבשבילו ax^2+bx+c הוא רבוע שלם y^2, באשר a,b ו c הם מספרים שלמים נתונים. במבט ראשון נראית אולי בעיה זו פשוטה, אך היא מכילה במקרים פרטיים בעיות בעלות קשי יוצא מן הכלל. אם a=1, b=0 יהיה $c=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. הבעיה הזאת כוללת אפוא את בעית פרוק המספר c, שהיא אחת מן הבעיות המרכזיות בתורת המספרים. מן העובדה ש a,b ו c קטנים אין להסיק מx קטן. באמת, כאשר a=1549, b=0, c=1, יהיה הערך הקטן ביותר של x שוה ל:

1222309542826747495934242683346380508818076263178681966098672827963220.

פרטים נוספים על מכונה זו אפשר לקרא (באנגלית) בכתבי-העת הבאים:

American Mathematical Monthly XL (1933), 401-406.
Scripta Mathematica 1(1933), 229-235.

פתרון הבעיות בחוברת י"א.

א. קל לראות שהמספרים העומדים במשבצות הקדקדיות של הרבוע צריכים להיות שונים. נציג אפוא את ה4 המספרים באיזה סדר שהוא במשבצות הקדקדיות (ציור א).

1			2
3			4

ציור א.

1			2
	2		
		3	
3			4

ציור ב.

1			2
	3		
		2	
3			4

ציור ג.

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

ציור ד.

1	4	3	2
2	3	4	1
4	1	2	3
3	2	1	4

ציור ה.

ו. במשבצות האמצעיות של האלכסון המכיל את המספרים 4,1 צריכים לעמד המספרים 3,2. אפשר להעמידם בשני אופנים (ציורים ב, ג). קל לראות עכשו שהמספרים הכתובים מספיקים כל צרכם בכדי לקבע על ידיהם לפי התנאים הנתונים את מקום המספרים הנשארים. לשם זה נמלא קדם את שתי השורות ושתי העמודות הקיצוניות ואחר את האלכסון השני (ציורים ד, ה). ובכן, אם כתובים המספרים במשבצות הקדקדיות, יש לבעיה שני פתרונות. והואיל ואפשר להעמיד 4 מספרים ב4 מקומות ב24 אופנים, יש לבעיה 24.2=48 פתרונות.

ז. כדאי להעיר שבעיה זו נלקחה מ"כתב-עת למתמטיקה אלמנטרית" ברוסית, שהופיע בקיוב בשנת 1885. פותר הבעיה שם הוא ל. (אריה ליאו) מוצקין (בתקופתו המתמטית, לפני שהתמסר כלו לציונות).

ב. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2-4a^2b^2 =$

$(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2 = (a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab) =$

$[(a-b)^2-c^2]\,[(a+b)^2-c^2] = (a-b-c)(a-b+c)\cdot(a+b-c)(a+b+c)$

פשקובסקי העיר שכאן לפנינו חלק מנוסחת הרון לשטח משולש שצלעותיו הן a,b,c.

ג. המספר 0 הוא פתרון "טריביאלי" (זול) לשאלה. אם המספר שונה מ0, אינו יכול להיות בעל ספרה אחת, כי אין ספרה גדולה מ0 יכלה להיות בעלת שני ערכים. אם המספר הוא בעל 2 ספרות, b יחידות ו a עשרות, באשר $a\neq 0$, יהיה $10a+b=4(a+b)=4a+4b$. מכאן $b=2a$. מכאן ומ$a\neq 0$ יוצא $b\neq 0$. b גדול אפוא מ0 וקטן מ10. לכן יכל a לקבל רק את הערכים 4,3,2,1 ו b בהתאם לכך את הערכים 8,6,4,2. בסך הכל נקבל את המספרים 48,36,24,12,0.

המספר אינו יכל להיות בעל 3 ספרות. באמת, אם ספרת המאות היא 1, יהיה המספר לכל הפחות 100, בעוד ש4 פעמים סכום ספרותיו יהיה לכל היותר $4(1+9+9)=76$, ובכן גדול המספר מכפולת הארבע של סכום ספרותיו. אם ספרת המאות גדולה מ1, יהיה המספר לכל הפחות 200, בעוד ש4 פעמים סכום ספרותיו יהיה לכל היותר $4(9+9+9)=108$, מה שמראה שגם במקרה זה גדול המספר מכפולת הארבע של סכום ספרותיו.

המספר אינו יכל להיות בעל $n\geqslant 4$ ספרות, כי אז יטוה לפחות ל10^{n-1}, בעוד ש4 פעמים סכום ספרותיו יטוה לכל היותר ל$4.9n=36n$. אך באינדוקציה מן $n+1$ קל לראות כי ב$n\geqslant 4$ קים תמיד אי-השויון $10^{n-1}>36n$. ראשית בודקים שאי-השויון נכון ב$n=4$, ואכן, אז נקבל $1000>144$. שנית, אם אי-השויון נכון בn, כאשר $n\geqslant 4$, נקבל:

$$10^n=10^{n-1}+9.10^{n-1}>36n+9.10^{n-1}>36n+36=36(n+1),$$

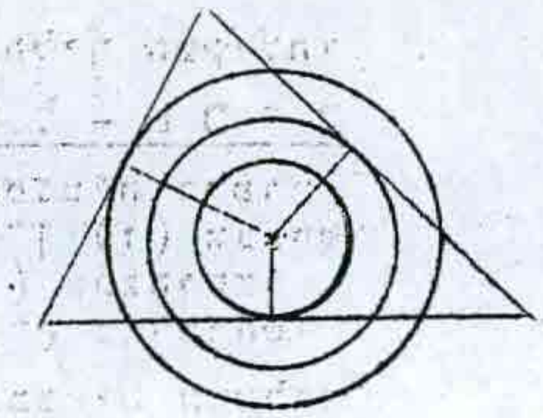
זאת אומרת, אי-השויון נכון גם ב$n+1$, ולכן הוא נכון תמיד, ושאלתנו נפתרה בשלמות.

ד. $$\frac{a^n-1}{a-1} = a^{n-1}+\ldots+1 < (a+1)^{n-1}+\ldots+1 = \frac{(a+1)^n-1}{(a+1)-1}.$$

בכל אחד משני הבטויים האמצעיים נמצאים n מחוברים, וכל מחובר בבטוי שמצד שמאל קטן מן המחובר המתאים לו בבטוי שמצד ימין, זולת המחוברים האחרונים בשני הבטויים, השוים ל1, ובכן קטן הבטוי השמאלי מן הימני ומשפטנו הוכח.

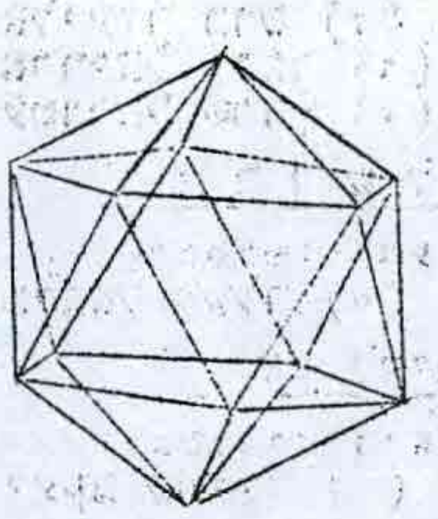
ה. (לפי ש. מאירי). נרשם 3 מעגלים הרכזיים שמחוגיהם מתיחסים זה לזה כמו k:l:m. נעביר באיזו נקודה שהיא על אחד המעגלים (למשל החיצוני) משיק. נעביר משיקים לכל אחד משני המעגלים האחרים כך שהאחד יפגע במשיק הראשון בזוית α של המשולש הנתון והשני יפגע בו בזוית β, אולם

מעברה השני של נקודת ההשקה. שני המשיקים יפגשו (הואיל ו$\alpha+\beta<2d$) ויצרו משולש הדומה למשולש הנתון, הואיל וזויותיו חופפות בהתאמה לזויות המשולש הנתון. במשולש זה ישנה נקודה שמרחקיה מצלעותיו מתיחסים זה לזה כמו $k:l:m$, והיא מרכז המעגלים.



כדי למצא נקודה דומה במשולש הנתון יש רק לחלק שתים מצלעותיו לקטעים מתכנתיים לקטעים שנוצרו על ידי נקודות ההשקה על הצלעות המתאימות במשולש העזר. מנקודות החלוקה זוקפים אנכים לצלעות ונקודת חתוכם היא הנקודה המבוקשת במשולש הנתון.

ו. קטנת הכפולות המשותפות של כל המחלקים של מספר הוא המספר עצמו. אך מנת המספר ומחלקו הוא מחלק של המספר. לכן אם נרחיב בסכום הפוכי המחלקים את כל השברים בקטנת הכפולות המשותפות של המכנים, נקבל כמונים שוב את כל המחלקים (אך בסדר הפוך), וכמכנה - את המספר עצמו. מכאן נובע משפטנו.



ז. נסתכל בעשרימון המסוכלל (אִיקוֹסָאֶדֶר). הריהו פאון (רב-פאות) בעל 20 פאות, שכל אחת מהן היא משולש משוכלל. כל פאות העשרימון וכן כל פנותיו חופפות. בכל קדקד של העשרימון נפגשות 5 פאות ובסך הכל יש לו 12 קדקדים. מספר מקצעותיו 30. את העשרימון אפשר להקיף בכדור, העובר דרך 12 קדקדיו. למרכז הכדור המקיף נקרא מרכז העשרימון ולמחוגו - מחוג העשרימון. נרשם עתה סביב כל קדקד העשרימון כמרכז כדור במחוג השוה לרחק הקדקד ממרכז העשרימון. בסך הכל נקבל 12 כדורים העוברים דרך נקודה משותפת - מרכז העשרימון. הואיל וכידוע גדול מקצע העשרימון ממחוגו (175 לעומת 138), ימצא כל קדקד העשרימון, ובכן כל מרכז של 12 הכדורים החדשים, מחוץ לכל אחד מ12 הכדורים האלה, מה שנותן לנו את המבוקש.

ח. בסך הכל קימים 92 מצבים שבהם אפשר להעמיד 8 מלכות על לוח השחמט באפן שלא תתקפנה זו את זו. בין 92 המצבים האלה יש 12 מצבים "יסודיים", זאת אומרת מצבים כאלה שאינם מתקבלים ממצבים אחרים על ידי סבוב לוח השחמט סביב מרכזו בזוית של 90°, של 180°, של 270°, או על ידי שקוף במראה. באפן כזה נתן, בדרך כלל, לקבל ממצב נתון עוד 7 מצבים אחרים, 3 על ידי סבוב ו4 על ידי שקופם ושקוף המצב הנתון במראה. אך במקרים פרטיים יכל לקרות שהסבוב או השקוף נותן מחדש את המקור. בכדי לרשם מצב נתון באפן נח, נסכים לספר את העמודות משמאל לימין ואת השורות מלמעלה למטה ונרשם משמאל לימין לפי סדר העמודות את מספר השורה בכל עמודה שבה עומדת מלכה במצב הנתון. למשל, הסמל 41582736 יסמן לנו כי בעמודה הראשונה עומדת המלכה בשורה הרביעית, בעמודה השניה עומדת המלכה בשורה הראשונה, בעמודה השלישית עומדת המלכה בשורה החמישית, וכן הלאה. בכתיב זה יכתבו 12 המצבים היסודיים בצורה הבאה:

41582736, 41586372, 42586137, 42736815, 42736851, 42751863,
42857136, 42861357, 46152837, <u>46827135</u>, 47526138, 48157263.

כל אחד מהמצבים האלה נותן על ידי סבוב ושקוף עוד 7 מצבים אחרים, כך שהוא שקול כנגד 8 מצבים, זולת המצב ה10, המדגם, השקול כנגד 4 מצבים בלבד (בדק!). בסך הכל יש לנו אפוא $8.11+4=92$ מצבים. המצב ה7 הוא היחיד שבו אין שום 3 מלכות נמצאות בקו ישר אחד.

ט. $2^7-1=127$

י. 7. לראשונה הוא עושה 6. אחרי העשון יש לו 6 בדלים (זנבות). מהם הוא עושה לו סיגריה נוספת.
נוסח אחר: 9. לראשונה הוא עושה 6. אחרי העשון יש לו 6 בדלים. מהם הוא עושה 2. אחרי העשון יש לו 2 בדלים. הוא שואל בדל אחד, עושה סיגריה, מעשנה ומחזיר את הבדל השאול לבעליו.

ד א ר ה מ ע ר כ ת

(א) הופיעו מחדש החוברות א, ה. מחיר כל חוברת כרגיל 50 מיל.
(ב) נמצא עכשיו במערכת ועומד לרשות המזמינים מספר מצומצם של קומפלטים (חוברות א - יב,ו2 חוברות תוספות). מחיר כל קומפלט, עם התוספות 800 מיל; בלי התוספות 600 מיל.

כתבת המערכת: רב יוזיוק, ירושלים, רח' מלאכי 20.

שמרת הפותרים

הארות ת מצינת שפול בתרגילים למאמר "על תהליך השקילה".

חדרה

ביה"ס התיכון
חיים גירון (ז) חטי
עמוס חרזה (ז) אבגהוחטי
משה מרלדבסקי (ז) אבגהחטי

חיפה

ביה"ס הימי
בנימין דוידוביץ (ב) גדהוחט

ביה"ס המקצועי
יעקב סיניגליה (ג) אבגדהו

ביה"ס הריאלי
אליעזר ברש (ז) גדוחטי
אריאל רינר (ו) גדהוחטי
עמנואל שורץ (ז) אבגדהחטי

ירושלים

הגמנסיה העברית
מיכאל משלר (ח) אבגדהוחטי

ראשון לציון

גמנסיה ריאלית
יעקב שפיצר ( ) אבגדהוחטי

תל-אביב

גמנסיה בלפור
בצלאל ברנשטין (ז) אבגחטי
יוסף דמבו (ו) אבגהוחטי
יוסף קלרמן (ז) בגדהוחטי

גמנסיה הרצליה
שרה גולדשלק (ו) אבגהחטי
נעם זק (ז) אבגדהוחטי
שמחה פשקובסקי (ז) אבגדהוחט

ביה"ס התיכוני למסחר
אסתר בירנבאום (ז) גדוחטי
הנס כהן ( ) אבגדהוחטי
אורי קרפיבנר (ו) בגדהוחטית
ארי שלוגר (ז) בגדהוחטי

גמנסיה שלוה
אלחנן ברגמן (ד) אבגדהוחטי
עליזה טייץ (ז) אבגדוחטי
אפרים קרליין (ח) בגדהוחטית
רפאל ריליס (ז) אגדהוחט

- - - - - - -

לרשימת הפותרים בחוברת י' יש להוסיף:
מיכאל בנעט (הרצליה, ח) אבגהוזחטיכלמנ

הבנר מציינים בשמחה את השתתפותם הערה של רבים מקוראי העתון בהתרת חבעיות. כמו בשנה הקודמת, כן גם השנה החלטנו לחלק שלושה פרסים בין המצטיינים.

ואלה חדרכים:

פרס ראשון ("התעופה" מאת דוד קימלפלד)
עמנואל בתיב - פז (גולדשלק), בוגר "בלפור", תל-אביב.
פרס שני ("האטום" מאת אי. וו. פייטרנוב)
אהרן מרלצ'צקי, בוגר "בלפור", תל-אביב.
פרס שלישי ("דע את המכונה" מאת דב שליונסקי)
חיים גן, תלמיד כתה ז', "בלפור", תל-אביב.

בעיות.

הפתרונות לבעיות צריכים להגיע למערכת לא יאוחר מראש חדש כסלו תשי"ו. הפותרים מתבקשים לנהג לפי ההוראות שנתנו בחוברת י"א, עמוד 12 במדור "דאר המערכת", פסקה ג.

≠169(א). נתונות 81 מטבעות שלכלן יש אותו המשקל, מחוץ לאחת שהיא כבדה יותר במקצת. בכמה, לכל הפחות, שקילות על מאזנים פשוטים אפשר לגלות את המטבע הכבדה?

170(ב). נסה אותו דבר לגבי n מטבעות, מהן 2 כבדות יותר, במספרים n קטנים.

≠171(ג). לסוחר היו 6 פקידים, שלא היו נאמנים עליו. לכן רצה שבהעדרו יהיו נוכחים לכל הפחות 5 מהם בשעת מתיחת העסק. כמה צריך להכין מנעולים ומפתחות ואיך לחלק את המפתחות בין 6 הפקידים בכדי שפחות מ5 מהם לא יוכלו לפתח את העסק?

172(ד). פתר את המשואה $\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$, והראה כי כל השרשים ממשיים.

≠173(ה). תאר את הבטוי a^4+4 עוד באפן אחר כסכום שני רבועים.

174(ו). דרך נקודה בתוך זוית נתונה העבר ישר כך שיחתך מצלעות הזוית הנתונה משולש בעל שטח קטן ביותר.

175(ז). אם a הוא מקצע העשרימון (השוה פתרון בעיה 165(ז) בחוברת זו) ו R מחוג הכדור המקיף, הוכח כי $R=a\sqrt{(5+\sqrt{5})/8}$, והראה לפי זה, כי $a>R$.

≠176(ח). נתונים 2 מוטות מתכת שוים בכל, האחד שואב (ממוגנט) והאחר אדיש (בלתי ממוגנט). איך להכיר, בלי מכשירים נוספים, איזה מן המוטות הוא השואב ואיזה האדיש?

--:--:--:--:--