תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', ד' בתשרי תשפ"ב \ 10 ספטמבר 2021

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות רבות ברירה. בכל שאלה יש תשובה נכונה אחת.**
2. **יש להגיש תשובות לכל השאלות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
   אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.

בהצלחה!

<u>שאלה 1:</u> מספרים חיוביים שלמים x, y, z מקיימים את התנאי $\frac{10}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$. מהו הערך של z?

תשובה:

1) 4

2) 22

3) 3

4) 17

5) 2

6) 7

7) 10

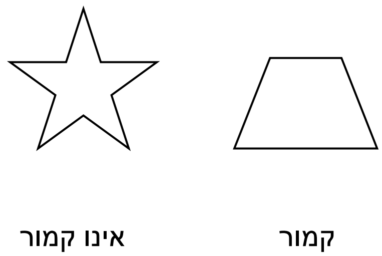
8) 1

9) 5

10) 70

שאלה 2: מהו המספר המרבי של זוויות חדות שיכולות להופיע במצולע קמור בעל n צלעות?
(מצולע נקרא קמור אם לכל שתי נקודות במצולע הקטע הישר שמחבר ביניהן גם נמצא בתוך המצולע.)

תשובה:



1) $n-1$

2) 3

3) $\frac{n}{2}+1$ כאשר n זוגי, $\frac{n-1}{2}+1$ עבור n אי-זוגי

4) 6

5) n

6) 4

7) $\frac{n}{2}+1$ כאשר n זוגי, $\frac{n+1}{2}+1$ עבור n אי-זוגי

8) $n-2$

9) 2

10) $\frac{n}{3}+2$ כש-n מתחלק ב-3, $k+2$ אם $n=3k+1$ או $n=3k+2$ עבור איזשהו k שלם חיובי

<u>שאלה 3:</u> לכל אוטו ששייך לעירייה נקבעו יומיים בשבוע בהם האוטו נמצא במוסך לצורך תחזוקה. בימים אלה האוטו לא עולה על הכביש. עם זאת, תפקוד העירייה דורש לפחות 10 מכוניות זמינות כל יום (כולל שבת). העירייה יכולה לבחור מהם ימי התחזוקה לכל אוטו (תחזוקה יכולה להתקיים גם בסוף שבוע במידת הצורך). מהו המספר המינימלי של מכוניות שנדרש כדי לתמוך בפעילות העירייה תוך קיום תחזוקה ראויה?

תשובה:

1) 17

2) 70

3) 19

4) 15

5) 14

6) 16

7) 11

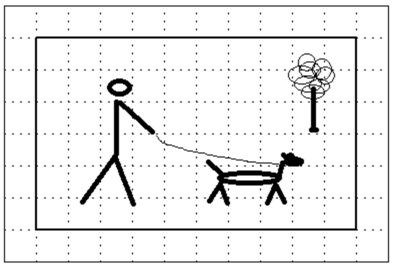
8) 13

9) 20

10) 12

<u>שאלה 4:</u> טלי מציירת על נייר משבצות. כשהיא סיימה, התקבל ציור בגודל $a\times b$ משבצות, כאשר $a\geq b$ ו-a,b הם מספרים שלמים חיוביים. מסביב לתמונה טלי הוסיפה מסגרת ברוחב של משבצת אחת וגילתה ששטח המסגרת שווה לשטח של ציור. כמה אפשרויות יש לגודל $a\times b$ של הציור של טלי?

תשובה:



1) אף אחת, אין a,b כאלה

2) 9

3) 6

4) 12

5) 4

6) 3

7) 1

8) 2

9) 5

10) יש אינסוף אפשרויות שונות

<u>שאלה 5:</u> למספר שלם חיובי A הוסיפו 2 ספרות מימין. המספר שהתקבל הוא הסכום של כל המספרים מ-1 עד A. מצאו את A.

תשובה:

1) 454
2) 201
3) 173
4) 501
5) 200
6) 120
7) 204
8) 29
9) 499
10) 199

שאלה 6: כמה מספרים שלמים חיוביים x מקיימים את התנאי $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + 1$?

$\lfloor x \rfloor$ מסמן את העיגול כלפי מטה (החלק השלם) של מספר ממשי x. לדוגמה, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ וגם $\lfloor 3.99 \rfloor = 3$.

תשובה:

1) 15

2) 23

3) 35

4) 19

5) 5

6) 17

7) 14

8) 20

9) 10

10) 12

<u>שאלה 7:</u> בתוך ריבוע נבחרו 20 נקודות פנימיות שונות. מספר קטעים מחברים נקודות אלו אחת לשניה ולקודקודי הריבוע כך שמתקיימים התנאים הבאים:

- החלקים הפנימיים של הקטעים לא נחתכים זה עם זה,
- אוסף הקטעים מחלק את הריבוע ל- N משולשים,
- כל אחת מ-20 הנקודות היא קודקוד של אחד המשולשים ואינה נמצאת על צלע של אף משולש שהיא לא הקודקוד שלו.

מהו N ?

תשובה:

1) 60

2) 40

3) 81

4) 63

5) 42

6) 59

7) 23

8) 62

9) 41

10) 24

<u>שאלה 8:</u> אנה וברוך משחקים משחק הבא. לאנה יש 2021 קלפים, עליהם היא רושמת 2021 מספרים שונים בלי להראות אותם לברוך (מספר אחד על כל קלף). ברוך רוצה לגלות את המספרים ועל אילו קלפים הם רשומים.
במהלך אחד ברוך יכול להצביע על 3 קלפים לבחירתו ולשאול מה הם המספרים הרשומים על אותם הקלפים. אנה מגלה את שלושת המספרים אך לא מספרת איזה מספר שייך לאיזה קלף מתוך השלושה שבחר ברוך.
מהו המספר המינימלי של שאלות הנדרשות לברוך כדי לברר חד-משמעית איזה מספר רשום על כל קלף?

תשובה:

1) 2022

2) 1515

3) 675

4) 4044

5) 1011

6) 875

7) 1516

8) 2020

9) 999

10) 1010

שאלה 9: n גפרורים מונחים על השולחן ($n>1$). אבי ובני לסירוגין מורידים מהשולחן כמה גפרורים כל אחד. במהלך הראשון אבי מוריד מספר כלשהו של גפרורים בין 1 ל-$(n-1)$ (כולל). אחר כך כל שחקן חייב בתור שלו להוריד מספר גפרורים ששונה מאפס ושלא עולה על המספר שהיריב שלו הוריד במהלך הקודם.
(לדוגמא, אם אבי הוריד 3 גפרורים המהלך הראשון, במהלך שני בני רשאי להוריד 1,2 או 3 גפרורים. במהלך השלישי אבי לא יכול לעבור על המספר שבני בחר במהלכו הקודם וכך הלאה).
שחקן שהוריד את הגפרור האחרון מנצח. מצאו את כל המספרים n עבורם לאבי יש אסטרטגיה המבטיחה ניצחון.

תשובה:

1) כל $n>2$

2) כל n אי-זוגי

3) כל n שאינו מהצורה 3^k+1 לאף k שלם חיובי

4) כל המספרים מהצורה $n=4k+1$ עבור k שלם כלשהו הגדול מ-1

5) כל המספרים מהצורה $n=8k+1$ או $n=8k+7$ עבור k שלם כלשהו הגדול מ-1

6) כל n זוגי פרט ל-$n=2$

7) כל n שאינו מהצורה 2^k לאף k שלם חיובי

8) כל n שאינו מהצורה 3^k לאף k שלם חיובי

9) כל n שאינו מהצורה $8k$ לאף k שלם חיובי

10) אין n כאלה (כלומר, בני יכול לנצח לכל n, אם הוא משחק נכון)