תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', ד' בתשרי תשפ"ב \ 10 ספטמבר 2021

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות רבות ברירה. בכל שאלה יש תשובה נכונה אחת.**
2. **יש להגיש תשובות לכל השאלות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
   אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.

בהצלחה!

<u>שאלה 1:</u> מספרים חיוביים שלמים x, y, z מקיימים את התנאי $\frac{10}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$. מהו הערך של z?

תשובה:

1) 4

2) 22

3) 3

4) 17

5) 2

6) 7

7) 10

8) 1

9) 5

10) 70

רעיון של פתרון:

$0 < \frac{1}{y+\frac{1}{z}} < 1$. כיוון ש- $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, מקבלים $x = 1$ ו- $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$. מכאן $y = 2,\ z = 3$

<u>שאלה 2:</u> מהו המספר המרבי של זוויות חדות שיכולות להופיע במצולע קמור בעל n צלעות?
(מצולע נקרא קמור אם לכל שתי נקודות במצולע הקטע הישר שמחבר ביניהן גם נמצא בתוך המצולע.)

תשובה:

1) $n-1$

2) 3

3) $\frac{n}{2}+1$ כאשר n זוגי, $\frac{n-1}{2}+1$ עבור n אי-זוגי

4) 6

5) n

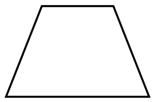
6) 4

7) $\frac{n}{2}+1$ כאשר n זוגי, $\frac{n+1}{2}+1$ עבור n אי-זוגי

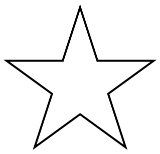
8) $n-2$

9) 2

10) $\frac{n}{3}+2$ כש-n מתחלק ב-3, $k+2$ אם $n=3k+1$ או $n=3k+2$ עבור איזשהו k שלם חיובי



קמור



אינו קמור

רעיון של פתרון:

סכום של זוויות חיצוניות הוא 360 מעלות, לכן יכולות להופיע לכל היותר 3 זוויות חיצוניות קהות. מכאן לכל היותר 3 זוויות פנימיות חדות.
בדקו, שלכל n קיימת דוגמה עם 3 זוויות חדות!

<u>שאלה 3:</u> לכל אוטו ששייך לעירייה נקבעו יומיים בשבוע בהם האוטו נמצא במוסך לצורך תחזוקה. בימים אלה האוטו לא עולה על הכביש. עם זאת, תפקוד העירייה דורש לפחות 10 מכוניות זמינות כל יום (כולל שבת). העירייה יכולה לבחור מהם ימי התחזוקה לכל אוטו (תחזוקה יכולה להתקיים גם בסוף שבוע במידת הצורך). מהו המספר המינימלי של מכוניות שנדרש כדי לתמוך בפעילות העירייה תוך קיום תחזוקה ראויה?

תשובה:

1) 17

2) 70

3) 19

4) 15

5) 14

6) 16

7) 11

8) 13

9) 20

10) 12

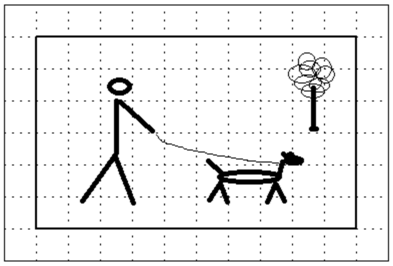
רעיון של פתרון:

14 מכוניות תספיקו: ל-4 מכוניות בוחרים ימי ראשון+שני, 4 – שלישי+רביעי, 2 – חמישי+שישי, 2 – שישי+שבת, 2 – חמישי+שבת. כל יום יש בדיוק 4 מכוניות מושבתות.

פחות מ-14 לא יספיק: כל אוטו משרת 5 ימים בשבוע, וצריכים לספק לפחות $5\times14=70$ ימי אוטו בשבוע.

<u>שאלה 4:</u> טלי מציירת על נייר משבצות. כשהיא סיימה, התקבל ציור בגודל $a\times b$ משבצות, כאשר $a\ge b$ ו-a,b הם מספרים שלמים חיוביים. מסביב לתמונה טלי הוסיפה מסגרת ברוחב של משבצת אחת וגילתה ששטח המסגרת שווה לשטח של ציור. כמה אפשרויות יש לגודל $a\times b$ של הציור של טלי?

תשובה:



1) אף אחת, אין a,b כאלה

2) 9

3) 6

4) 12

5) 4

6) 3

7) 1

8) 2

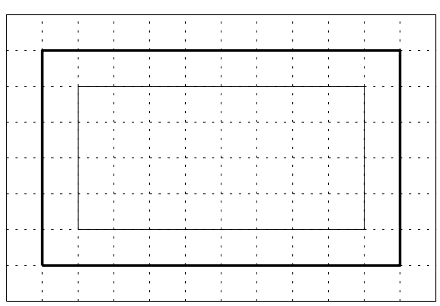
9) 5

10) יש אינסוף אפשרויות שונות

רעיון של פתרון:

קל לראות ש-$b>1$. נצייר בתוך התמונה מסגרת פנימית ברוחב 1 שצמודה למסגרת החיצונית. כל צלע של מסגרת פנימית קצר ב-2 משבצות מהצלע המתאים של המסגרת החיצונית, לכן שטח של מסגרת פנימית קטן ב-8 ביחס לשטח של חיצונית. 8 משבצות ה"חסרות" הן שטח של המלבן הפנימי בתוך שתי המסגרות. גודל המלבן הזה יכול להיות או 8×1 או 4×2, מכאן שתי תשובות אפשריות: $a=6,b=4$ או $a=10,b=3$.

פתרון נוסף: שטח המסגרת הוא $ab=2a+2b+4$ שגורר $(a-2)(b-2)=8$. כמו קודם, יש שתי דרכים להציג 8 כמכפלה של שני גורמים שלמים כך ש-$a\ge b$.



<u>שאלה 5:</u> למספר שלם חיובי A הוסיפו 2 ספרות מימין. המספר שהתקבל הוא הסכום של כל המספרים מ-1 עד A. מצאו את A.

תשובה:

1) 454

2) 201

3) 173

4) 501

5) 200

6) 120

7) 204

8) 29

9) 499

10) 199

רעיון של פתרון:

נניח שהוספנו מספר דו-ספרתי B. אז $100A+B=1+2+\ldots+A=\frac{A}{2}(A+1)$. לכן $A(A-199)=2B$ ומכאן $0\le A(A-199)\le 198$. הפתרון היחיד הוא $A=199$.

שאלה 6: כמה מספרים שלמים חיוביים x מקיימים את התנאי $\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$?

$\lfloor x \rfloor$ מסמן את העיגול כלפי מטה (החלק השלם) של מספר ממשי x. לדוגמה, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ וגם $\lfloor 3.99 \rfloor = 3$.

תשובה:

1) 15

2) 23

3) 35

4) 19

5) 5

6) 17

7) 14

8) 20

9) 10

10) 12

רעיון של פתרון:

נניח $x = 5n + r$ עבור $0 \le r \le 4$, $n \ge 0$. אזי $\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n$, $n + 1 = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{n+r}{4} \right\rfloor$.

מכאן $1 \le \frac{n+r}{4} < 2$ זאת אומרת $4 - r \le n \le 7 - r$. לכל $0 \le r \le 4$ ישנם 4 n-ים מתאימים, סה"כ 20 פתרונות.

<u>שאלה 7:</u> בתוך ריבוע נבחרו 20 נקודות פנימיות שונות. מספר קטעים מחברים נקודות אלו אחת לשניה ולקודקודי הריבוע כך שמתקיימים התנאים הבאים:

- החלקים הפנימיים של הקטעים לא נחתכים זה עם זה,
- אוסף הקטעים מחלק את הריבוע ל- N משולשים,
- כל אחת מ-20 הנקודות היא קודקוד של אחד המשולשים ואינה נמצאת על צלע של אף משולש שהיא לא הקודקוד שלו.

מהו N ?

תשובה:

1) 60

2) 40

3) 81

4) 63

5) 42

6) 59

7) 23

8) 62

9) 41

10) 24

רעיון של פתרון:

סכום הזויות של כל N משולשים הוא $180N$. מצד שני, זויות אלה יוצרות 20 זויות מלאות סביב כל נקודה פנימית ו-4 זויות ישרות בקודקודי הריבוע. מכאן $180N = 20\times 360 + 4\times 90$ ו- $N = 42$.

<u>שאלה 8:</u> אנה וברוך משחקים משחק הבא. לאנה יש 2021 קלפים, עליהם היא רושמת 2021 מספרים שונים בלי להראות אותם לברוך (מספר אחד על כל קלף). ברוך רוצה לגלות את המספרים ועל אילו קלפים הם רשומים.
במהלך אחד ברוך יכול להצביע על 3 קלפים לבחירתו ולשאול מה הם המספרים הרשומים על אותם הקלפים. אנה מגלה את שלושת המספרים אך לא מספרת איזה מספר שייך לאיזה קלף מתוך השלושה שבחר ברוך.
מהו המספר המינימלי של שאלות הנדרשות לברוך כדי לברר חד-משמעית איזה מספר רשום על כל קלף?

תשובה:

1) 2022
2) 1515
3) 675
4) 4044
5) 1011
6) 875
7) 1516
8) 2020
9) 999
10) 1010

רעיון של פתרון:

נניח שנשאלו N שאלות. ברור, שכל קלף הופיע בשאלה אחת לפחות (אחרת לא ניתן לדעת את המספר הרשום עליו). נסמן ב- k את מספר הקלפים שנבחרו בשאלה אחת בדיוק מתוך N. בשאלה אחת לא היו יכולים להופיע שני קלפים כאלה כי במקרה זה לא ניתן להחליט איזה מספר רשום על איזה קלף. מכאן $k \le N$. שאר הקלפים השתתפו בשתי שאלות או יותר.
סה"כ מספר הקלפים M שהופיעו בשאלות (עם חזרות) מקיים $k+2(2021-k) \le M \le 3N$.
לכן $4042-N \le 4042-k \le 3N$ ומכאן $N \ge 1010.5$.

$N=1011$ מספיק. כל שישה קלפים ניתן לברר בעזרת 3 שאלות בלבד: לשאול על קלפים מספר $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{5,6,1\}$. קלפים 1,2,3 מופיעים פעמיים (והשאלות שונות לכל קלף) וניתנים לבירור. קלפים 2,4,6 הם הקלפים הנותרים בכל אחת מהשאלות.
כעת נחלק 2021 קלפים ל-336 קבוצות של 6 קלפים ול-5 קלפים הנותרים נוסיף קלף כלהשו. בעזרת אסטרטגיה קודמת נוכל לברר את כולם תוך $337\times 3=1011$ שאלות.

<u>שאלה 9:</u> n גפרורים מונחים על השולחן ($n>1$). אבי ובני לסירוגין מורידים מהשולחן כמה גפרורים כל אחד.
במהלך הראשון אבי מוריד מספר כלשהו של גפרורים בין 1 ל-$(n-1)$ (כולל). אחר כך כל שחקן חייב בתור שלו להוריד מספר גפרורים ששונה מאפס ושלא עולה על המספר שהיריב שלו הוריד במהלך הקודם.
(לדוגמא, אם אבי הוריד 3 גפרורים המהלך הראשון, במהלך שני בני רשאי להוריד 1,2 או 3 גפרורים. במהלך השלישי אבי לא יכול לעבור על המספר שבני בחר במהלכו הקודם וכך הלאה).
שחקן שהוריד את הגפרור האחרון מנצח. מצאו את כל המספרים n עבורם לאבי יש אסטרטגיה המבטיחה ניצחון.

תשובה:

1) כל $n>2$

2) כל n אי-זוגי

3) כל n שאינו מהצורה 3^k+1 לאף k שלם חיובי

4) כל המספרים מהצורה $n=4k+1$ עבור k שלם כלשהו הגדול מ-1

5) כל המספרים מהצורה $n=8k+1$ או $n=8k+7$ עבור k שלם כלשהו הגדול מ-1

6) כל n זוגי פרט ל-$n=2$

7) כל n שאינו מהצורה 2^k לאף k שלם חיובי

8) כל n שאינו מהצורה 3^k לאף k שלם חיובי

9) כל n שאינו מהצורה $8k$ לאף k שלם חיובי

10) אין n כאלה (כלומר, בני יכול לנצח לכל n, אם הוא משחק נכון)

רעיון של פתרון:

אם n אי-זוגי, אבי מנצח אם במהלך הראשון מוריד גפרור אחד.
אם n זוגי, השחקן שינסה להוריד מספר אי-זוגי של גפרורים יפסיד: הרי בדומה למקרה הקודם, ליריב שלו מספיק להוריד גפרור בודד כדי להבטיח ניצחון. לכן כדי לשמור על סיכוי לנצחון על שני השחקנים לבחור במספרים זוגיים. כעת ניתן לאחד גפרורים לזוגות ולדמיין שכל שחקן מוריד זוגות במקום גפרורים בודדים.
אם מספר הזוגות אי-זוגי, אבי ינצח בדיוק כמו קודם.
אחרת (מס' הזוגות הוא זוגי) ניתן לאחד גפרורים לרביעות, שמיניות וכך הלאה. אסטרטגיה זו נכשלת רק כאשר מספר הגפרורים הוא 2^k ואז בני מנצח (תסבירו למה!).