תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', ד' בתשרי תשפ"א / 10 ספטמבר 2021, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות רבות ברירה. בכל שאלה יש תשובה נכונה אחת.**
2. **יש להגיש תשובות לכל השאלות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
   אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.

בהצלחה!

שאלה 1

מהו המספר השלם החיובי הקטן ביותר n שעבורו קיימים n מספרים ממשיים שונים שהמכפלה שלהם היא 1 והסכום שלהם הוא 0?

תשובה:

1. $n = 3$
2. $n = 4$
3. $n = 11$
4. $n = 6$
5. $n = 5$
6. $n = 2$
7. $n = 7$
8. $n = 21$
9. $n = 13$
10. $n = 9$

רעיון לפתרון: קל לראות שעבור $n = 1, 2$ אי־אפשר למצא מספרים כאלה. עבור $n = 3$ אפשר: למשל, קחו $x_1 = -1$ ומצאו x_2, x_3 כך ש־ $x_2 + x_3 = 1, x_2x_3 = -1$.

שאלה 2

בבניין משרדים מסוים עובדים 2021 אנשים. חלק מזוגות האנשים שעובדים בבניין מכירים אחד את השני וחלק אינם מכירים אחד את השני (אנו מניחים בשאלה זו כי אם א' מכיר את ב' אז גם ב' מכיר את א'). נסמן ב־k את המספר הגדול ביותר כך שבכל מצב אפשרי של היכרויות בבניין בהכרח תהיה קבוצה של k אנשים בבניין שכל אחד מהם מכיר בדיוק את אותו <u>מספר</u> אנשים בבניין (אם כי לא בהכרח אותם אנשים).

סמנו את הטענה הנכונה לגבי k:

1. $k = 18$
2. $k = 1$
3. $k = 10$
4. $k = 15$
5. $k = 7$
6. $k = 2$
7. $k = 2021$
8. $k = 1010$
9. $k = 14$
10. $k = 0$

רעיון לפתרון: $k = 2$. כדי לראות ש־$k \geq 2$ שימו לב שכל אדם מכיר לין 0 ל־2020 אנשים. אם יש מישהו שמכיר 0 אזי אף אחד לא מכיר 2020 אנשים ולכן יש סך הכל 2020 אפשרויות למספר המכרים של כל אחד מ־2021 אנשים ולכן מעקרון שובך היונים ישנם לפחות שני אנשים עם אותו מספר מכרים. אם אין מישהו עם 0 מכרים אזי מאותו השיקול סיימנו. אפשר לראות ש־$k \leq 2$ על ידי בניית מצב היכרויות. למשל למספר את כל האנשים ולקבוע שכל אדם עם מספר זוגי מכיר את הכל האנשים עם מספרים אי־זוגיים הגדולים יותר.

שאלה 3

יוסי ניצב מול 1000 נורות המסודרות במעגל אשר ממוספרות מ־1 עד 1000. (נגד כיוון השעון). דני גם הוא ניצב מול 1000 נורות אחרות המסודרות אף הן באותו האופן. ליד כל נורה ישנו מתג המשנה את מצב הנורה מדלוקה לכבויה ולהפך. בתחילה כל הנורות כבויות ויוסי ודני עומדים מול הנורות שמספרן הסידורי הוא 1, כל אחד במעגל שלו.

יעל מקריאה לדני וליוסי, פעם אחר פעם, 1111 פעמים, מספרים שלמים (לא בהכרח שונים) בין 1 ל־1000 בסדר כלשהו. כאשר יעל מקריאה מספר כזה x, יוסי לוחץ על המתגים של 22 נורות רצופות במעגל הנורות שלו החל מהנורה מספר x נגד כיוון השעון, וגם דני לוחץ על המתגים של 28 נורות רצופות במעגל הנורות שלו החל מהנורה מספר x נגד כיוון השעון.

נגיד שמספר שלם אי־שלילי m הוא <u>טוב</u>, אם לאחר שיעל הקריאה את כל 1111 מספרים, לא משנה איזה מספרים היא הקריאה, בשני המעגלים ביחד בהכרח יהיו לפחות m נורות דולקות.

מהו המספר הטוב הגדול ביותר מבין האפשרויות הבאות?

1. 35
2. 5
3. 60
4. 0
5. 25
6. 72
7. 22
8. 40
9. 55
10. 28

רעיון לפתרון:

התשובה היא 40. נשים לב תחילה כי אם יוסי היה לוחץ רק הוא על 50 נורות רצופות בכל פעם אזי לבסוף היו לפחות 50 נורות דלוקות. כדי להראות זאת נצבע את הנורות ב־50 צבעים שנסמנם $1, 2, \ldots, 50$. הצביעה תעשה באופן מחזורי כלומר $\ldots, 1, 2, \ldots, 50, 1, 2, \ldots, 50$ כיוון ש־ 1000 הוא כפולה של 50 הרי שבאופן כזה כל רצף של 50 נורות מכיל בדיוק נורה אחת מכל צבע. כעת קל להווכח שלאחר 1111 (או כל מספר אי־זוגי של) הקראות חייב להיות מתג אחד מכל צבע שנלחץ מספר אי זוגי של פעמים ולכן יהיה דלוק. עבור הבעיה שלנו בה ישנם שני שחקנים ניתן, על ידי צביעה מתאימה של הנורות בכל אחד מהמעגלים של דני ויוסי, לדאוג לכך שבכל סיבוב דני ויוסי לוחצים ביחד בדיוק על נורה מכל צבע ולכן מאותו השיקול חייבות להיות לפחות 50 נורות דלוקות לאחר 1111 שלבים. בצורה מפורשת, יוסי יצבע את הנורות שלו ב־50 צבעים בצורה מחזורית כפי שכבר הסברנו. דני יעשה את אותו הדבר בדיוק אלא שהוא יחל לצבוע בצורה מחזורית ב־50 צבעים החל מהנורה מספר 29 אצלו.

כמו כן, קל להראות ש־50 זו תשובה הדוקה, אם למשל יעל תמיד מקריאה את המספר 1.

שאלה 4

דנה היא חזאית מזג אוויר ועליה לנבא בכל ערב במשך שנה שלמה (365 ימים) האם ירד גשם ביום שלמחרת או לא. לשם כך דנה מקבלת בכל ערב עצות מ־1000 מומחים: בכל ערב כל אחד מהמומחים אומר לדנה האם לפי דעתו ירד גשם למחרת. כלומר, בכל ערב על דנה לנבא האם ירד גשם למחרת או לא, ולשם כך היא יכולה להסתמך על כל מה שקרה עד אותו הערב ־ כלומר נתונות לה כל עצות המומחים עד אותו הערב (כולל) וכמו כן ידוע לה באיזה ימים ירד גשם עד אותו הערב.

כמו כן, נתון שאחד מהמומחים טועה לכל היותר פעם אחת בכל השנה. במלים אחרות, קיים מומחה (שזהותו איננו ידועה לדנה) שבכל הערבים, פרט אולי לערב אחד, ינבא נכונה האם ירד גשם ביום שלמחרת. על שאר המומחים לא ידוע כלום וכל אחד מהם עלול לטעות באופן כלשהו.

נסמן ב־M את מספר הטעויות הקטן ביותר עבורו קיימת לדנה אסטרטגית ניבוי המבטיחה שהיא תשגה לכל היותר M פעמים בתחזית שלה.

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $0 \leq M \leq 9$
2. $10 \leq M \leq 25$
3. $26 \leq M \leq 55$
4. $56 \leq M \leq 85$
5. $86 \leq M \leq 135$
6. $136 \leq M \leq 160$
7. $161 \leq M \leq 185$
8. $186 \leq M \leq 250$
9. $251 \leq M \leq 330$
10. $331 \leq M \leq 365$

רעיון לפתרון: האסטרטגיה הבאה טועה לכל היותר 19 פעמים: דנה פועלת בשני שלבים: בשלב הראשון היא מתחזקת רשימה של כל המומחים שלא טעו כלל, ובכל שלב מנבאת על פי עצת הרוב של המומחים שנותרו ברשימה הזו. נשים לב שבכל פעם שדנה טועה, לפחות מחצית מהמומחים ברשימה נמחקים. לכן, לאחר לכל היותר $10 = 9 + 1$ ($2^9 < 1000 < 2^{9+1}$) טעויות, הרשימה תתרוקן.

בשלב השני דנה מתחילה רשימה חדשה של כל המומחים שטעו עד כה בדיוק פעם אחת. נשים לב שברשימה זו יש לכל היותר אלף מומחים אבל אולי פחות שכן חלק מהמומחים אולי טעו יותר מפעם אחת. כעת, דנה חוזרת על אותו התהליך עם הרשימה החדשה: היא כל פעם מנבאת על פי עצת הרוב ובכל יום מוחקת מהרשימה את כל המומחים שטעו בתחזית שנתנו בערב הקודם. כעת נשים לב שהרשימה השניה אף פעם לא תתרוקן שכן אותו מומחה שטועה לכל היותר פעם אחת לעולם ישאר בה. לכן, מספר הטעויות של דנה בשלב זה הוא לכל היותר 9 ($2^9 < 1000 < 2^{9+1}$). סך הכל דנה לא תעשה יותר מ 19 טעויות. כמו כן, לא קשה להראות ש $M \geq 9$ אפילו במקרה בו יש מומחה שאיננו שוגה כלל. מכאן אפשר גם לנסח אסטרטגיה ליריב שתכפה על דנה לפחות 10 טעויות כאשר המומחה הכי טוב עלול לטעות (לכל היותר) פעם אחת.

שאלה 5

ארבעה זוגות נשואים מתארחים אצל זוג אחר (סך הכל יש חמישה זוגות). בתחילת הערב חלק מהמשתתפים לוחצים ידיים אחד לשני כאשר ידוע שאף אחד לא לוחץ ידיים עם עצמו או עם בן/בת הזוג שלו וכל זוג אנשים לוחצים ידיים לכל היותר פעם אחת. בסוף הערב, המארח פונה לכל שאר המשתתפים ואומר: "כל אחד ואחת מכם/ן לחצו מספר שונה של ידיים". נסמן ב־x את מספר הידיים שלחצה המארחת (בת זוגו של המארח).

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $x = 0$
2. $x = 1$
3. $x = 2$
4. $x = 3$
5. $x = 4$
6. $x = 5$
7. $x = 6$
8. $x = 7$
9. $x = 8$
10. אין מספיק נתונים כדי לקבוע באופן חד ערכי את x.

רעיון לפתרון: המארח פונה לתשעה אנשים ויש בדיוק תשע אפשרויות למספר הלחיצות: בין אפס לשמונה. נשים לב כי אלו שלחצו אפס ושמונה פעמים הם בני זוג, אלו שלחצו פעם אחת ושבע פעמים הם בני זוג וכן הלאה עד אשר מגיעים לכך שאלו שלחצו ארבע פעמים הם בני זוג. כלומר המספר ארבע מופיע פעמיים ולכן בהכרח המארח לחץ ארבע פעמים וכך גם אשתו.

שאלה 6

טבלה של מספרים ממשיים (לא בהכרח שונים) תיקרא ממויינת אם כל שורה וכל עמודה בטבלה הן ממויינות - כלומר, איברי כל שורה מסודרים בסדר לא יורד כשעוברים עליהם משמאל לימין, ואיברי כל עמודה מסודרים בסדר לא יורד כאשר עוברים עליהם מלמעלה למטה.

נגדיר פעולת מיון בסיסית על טבלה כפעולה שממיינת את כל האיברים בשורה נתונה או בעמודה נתונה. כך לדוגמא, הפעולה הבסיסית 'מיין את שורה 1' מסדרת מחדש את איברי שורה 1 כך שלאחר הסידור שורה 1 ממוינת. נסמן ב-n את המספר הקטן ביותר עבורו קיימת סדרה S של n פעולות בסיסיות אשר ממיינת כל טבלה בגודל 6×6. במלים אחרות, עבור כל טבלה A בגודל 6×6, אם מבצעים את אותן n הפעולות הבסיסיות לפי הסדרה S על הטבלה A אזי מתקבלת טבלה ממוינת. (שימו לב כי S היא סדרת אחת של פעולות שממיינת כל טבלה בגודל 6×6).

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. $n = 60$
2. $n = 12$
3. $n = 54$
4. $n = 18$
5. $n = 48$
6. $n = 24$
7. $n = 30$
8. $n = 42$
9. $n = 36$
10. $n = 6$

רעיון לפתרון: תחילה מוכיחים שמספיק להסתכל על טבלאות בינאריות (כלומר שכל המספרים בהם הם 0 או 1). לשם כך מראים שאם סדרת פעולות בסיסיות כלשהי לא מצליחה למיין טבלה כלשהי אזי גם קיימת טבלה בינארית שאותה הסדרה לא מצליחה למיין. עבור טבלאות בינאריות לא קשה להראות שמספיק למיין את כל השורות ואז את כל העמודות. כלומר 12 פעולות בסיסיות מספיקות. כמו כן, קל לראות שלכל סדרה של פחות מ-12 פעולות ישנה טבלה שהסדרה לא תמיין. אכן, עבור כל סדרה כזו קיימת שורה או עמודה שלא ממויינת באף אחת מהפעולות הבסיסיות בסדרה וכך נוכל להגדיר טבלה בה רק אותה שורה או העמודה לא ממוינת. טבלה כזו לא משתנה תחת הפעולה ולכן גם לא מתמיינת.

שאלה 7

מצולע במישור נקרא **קמור** אם עבור כל שתי נקודות במצולע הקטע ביניהן מוכל במצולע. קבוצת נקודות במישור נקראת **כללית** אם אף שלוש נקודות בה לא נמצאות על ישר אחד.
תהא P קבוצה סופית של נקודות במישור. נאמר שאוסף Q של מצולעים קמורים **מכסה את קטעי** P אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הקודקודים של כל מצולע ב־Q שייכים ל־P,
2. כל קטע שמחבר שתי נקודות ב־P הוא צלע של אחד המצולעים ב־Q.

שתי נבחרות של תלמידים, נבחרת א' ונבחרת ב', משחקות במשחק הבא: נבחרת א' מסמנת במישור קבוצה כללית P של 2021 נקודות, ונבחרת ב' צריכה למצא אוסף Q של d מצולעים קמורים שמכסה את קטעי P. אם נבחרת ב' מצליחה לעשות את זה, היא מנצחת, ואם לא ־ נבחרת א' מנצחת.
נתבונן במספר המקסימלי d שעבורו נבחרת א' תנצח עם <u>כל</u> קבוצה כללית P של 2021 נקודות שהיא תסמן.
איזה מהמספרים הבאים הוא הקרוב ביותר לאותו d המקסימלי?

1. $100,000$
2. $200,000$
3. $300,000$
4. $400,000$
5. $500,000$
6. $600,000$
7. $700,000$
8. $800,000$
9. $900,000$
10. $1,000,000$

רעיון לפתרון: התשובה היא תשובה מספר 5 כי $d = 1010\times1011/2-1 = 510554$. בוחרים ישר שמחלק את נקודות P ל־1010 נקודות ול־1011 נקודות. נשים לב כי ישר זה חותך 1010×1011 קטעים בין הנקודות של P וכי כל מצולע של נבחרת ב' מכיל לכל היותר שני קטעים כאלו. לכן נבחרת ב' צרכיה לפחות $d + 1 = 1010 \times 1011/2$ מצולעים כדי לנצח.
עם יותר מ־ $d = 1010 \times 1011/2 - 1 = 510554$ מצולעים אפשר שנבחרת א' תסמן נקודות כך שנבחרת ב' תנצח: אם נבחרת א' תסמן 2021 נקודות שהן הקודקודים של מצולע קמור, אז ניתן להראות (הראו איך!) כי נבחרת ב' כן תצליח לכסות אותן על ידי $d + 1 = 1010 \times 1011/2$ מצולעים קמורים.

שאלה 8

משולש ΔABC ייקרא **כמעט שווה־שוקיים עם תכונת** $0 \geq \alpha$ אם $1 \leq \frac{|AB|}{|AC|} \leq 1+\alpha$. (בשאלה זו גם כאשר שלושת הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד מתיחסים ל־ ΔABC כמשולש).

מבין הערכים הבאים מהו ה־α הקטן ביותר עבורו זה נכון שכל קבוצה בת n נקודות במישור מכילה שלוש נקודות שהן קדקדי משולש כמעט שווה שוקיים עם תכונת α?

1. $\alpha = \frac{5}{n^{12}}$
2. $\alpha = \frac{5}{n^{10}}$
3. $\alpha = \frac{5}{n^{9}}$
4. $\alpha = \frac{5}{n^{3}}$
5. $\alpha = \frac{5}{n^{7}}$
6. $\alpha = \frac{5}{n^{6}}$
7. $\alpha = \frac{5}{n^{5}}$
8. $\alpha = \frac{5}{n}$
9. $\alpha = \frac{5}{\sqrt{n}}$
10. $\alpha = 1$

רעיון לפתרון: נוכיח כי $\alpha = \frac{5}{n}$ הוא התשובה. תהי X קבוצה בת n נקודות. בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי הקוטר של X (כלומר המרחק הגדול ביותר בין זוג נקודות ב־X) שווה ל־1. נתבונן בזוג נקודות A, B ב־X כך שהמרחק בין A ל־B שווה ל־1. מאי־שיוויון המשולש נובע כי כל נקודה ב־X מקיימת שמרחקה מ־A הוא לפחות $\frac{1}{2}$ או שמרחקה מ־B הוא לפחות $\frac{1}{2}$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי לפחות $n/2$ מהנקודות ב־X מקיימות שמרחקן מ־A הוא בין $\frac{1}{2}$ ל־1. לכן, קיים זוג נקודות C, D שמרחקן מ־A הוא לפחות $\frac{1}{2}$ ובנוסף $|AC - AD| \leq \frac{1}{n}$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $|AD| \geq |AC|$. לכן:

$$1 \leq \frac{|AD|}{|AC|} \leq \frac{|AC| + 1/n}{|AC|} = 1 + \frac{1/n}{1/2} = 1 + \frac{2}{n}$$

נראה עתה כי קיימות קבוצות בנות n נקודות שם לא ניתן למצוא משולש כמעט שווה שוקיים עם תכונת $\alpha = \frac{1}{3n^2}$. הרעיון הוא לבנות קבוצה של n מספרים על הישר הממשי כולם שלמים בין 1 ל־ $3n^2$ ואין בינהם אף שלושה מספרים $x < y < z$ כך ש־ $y - x = z - y$. אם אכן נצליח לבנות קבוצה כזו הרי שלא ניתן יהיה למצוא בה משולש כמעט שווה שוקיים עם תכונת $\alpha = \frac{1}{3n^2}$. זאת מפני שאם A, B, C שלוש נקודות (מספרים) בקבוצה כך ש־ $|AC| > |AB|$ (שימו לב כי לא ייתכן $|AC| = |AB|$) אז

$$\frac{|AC|}{|AB|} \geq \frac{|AB| + 1}{|AB|} = 1 + \frac{1}{|AB|} \geq 1 + \frac{1}{3n^2}$$

כעת ניגש לבניית הקבוצה. אנו נבחר מספרים שלמים בין 1 ל־ $3n^2$ אחד אחרי השני ובכל פעם שנבחר מספר נדאג שהוספתו לא תגרום ליצירת שלשה של מספרים $x < y < z$ כך ש־ $y - x = z - y$. נשים לב כי אם בחרנו k מספרים עד כה, אזי המספר הבא יכול להיות כלשהו פרט ל־ k המספרים שבחרנו וכמו כן כל זוג מספרים שבחרנו פוסל לכל היותר שלוש אפשרויות שכן אם בחרנו כבר את $a < b$ הרי שלא ניתן לבחור את $2b - a, (a+b)/2, 2a - b$ אשר כל אחד מהם עלול ליצור יחד עם a, b שלשה אסורה. לכן אם בחרנו כבר k מספרים הרי שיש לנו לפחות $3n^2 - k - 3\binom{k}{2}$ אפשרויות לבחירת המספר הבא. כל עוד $3n^2 - k - 3\binom{k}{2} > 0$ נוכל להמשיך. לכן ניתן לבחור כך לפחות n מספרים כנדרש. כאן $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ זה מספר הבחירות האפשריות של 2 מספרים מתוך קבוצה של k מספרים שונים.

שאלה 9

נגיד שקבוצת נקודות במישור היא **כללית**, אם אף שלוש נקודות בה אינן על ישר אחד.
יהי n מספר חיובי שלם.

- קבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור תיקרא **טובה**, אם היא כללית וכמו כן ניתן לחלק את הנקודות בה ל n זוגות כך שכל שני קטעים המחברים בין שתי נקודות שהן בנות זוג נחתכים.
- ישר העובר דרך זוג נקודות מקבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור נקרא **ישר חוצה**, אם הוא מחלק את שאר הנקודות של הקבוצה לשתי קבוצות שוות גודל של $n-1$ נקודות כל אחת, הנמצאות בשני צדדי הישר. נשים לב כי בקבוצה טובה כל ישר העובר דרך שתי נקודות שהן בנות זוג הוא ישר חוצה.
- קבוצה של $2n$ נקודות שונות במישור תיקרא **יפה**, אם היא כללית וכמו כן לכל נקודה A בקבוצה קיימת בת זוג יחידה B בקבוצה כך שהישר שעובר דרך A ו B הוא ישר חוצה.

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

1. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא קבוצה יפה.
2. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא קבוצה יפה.
3. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא קבוצה טובה.
4. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא קבוצה טובה.
5. כל קבוצה יפה היא טובה אבל קיימת קבוצה טובה שאיננה יפה.
6. כל קבוצה טובה היא יפה אבל קיימת קבוצה יפה שאיננה טובה.
7. ישנה קבוצה טובה שאיננה יפה וישנה קבוצה יפה שאיננה טובה.
8. כל קבוצה כללית בת 100 נקודות היא או קבוצה יפה או קבוצה טובה.
9. כל קבוצה כללית בת 1000 נקודות היא או קבוצה יפה או קבוצה טובה.
10. כל קבוצה טובה היא יפה וכל קבוצה יפה היא טובה.

רעיון לפתרון: תהי נתונה קבוצה טובה בת $2n$ נקודות. נראה שהיא יפה. נביט על נקודה כלשהי A ותהי B בת הזוג שלה. נשים לב כי הישר דרך A ו־B, כמו גם כל ישר דרך שתי נקודות שהן בנות זוג, מחלק את שאר הנקודות לשתי קבוצות שוות גודל בנות $n-1$ נקודות כל אחת. נניח שיש נקודה C בקבוצה כך שגם הישר דרך A ו־C הוא ישר חוצה. הישר AC מחלק את המישור ללא הישר AC לשני חצאי מישור שנסמנם ב־H_1 ו־H_2. אנו נניח בלי הגבלת הכלליות שהנקודה B נמצאת ב־H_1. מבין כל שתי נקודות X ו־Y שהן בנות זוג לפחות אחת חייבת להיות ב־H_1 כי אחרת הקטע בין A ל־B לא יכול לחתוך את הקטע בין X ל־Y. זו סתירה מכיוון שנובע מכך שמספר הנקודות ב־H_1 הוא לפחות n.

נראה עתה כי כל קבוצה יפה בת $2n$ נקודות היא קבוצה טובה. כיוון שהקבוצה היא יפה, יש באופן טבעי חלוקה (אפילו יחידה) של הקבוצה לזוגות נקודות כך שהישר העובר דרך כל זוג נקודות הוא ישר חוצה. אנו נראה כי כל שני קטעים הנקבעים ע"י זוג נקודות שהן בנות זוג

חייבים להחתך. זה יראה כי הקבוצה שלנו היא גם טובה. יהיו AB ו־CD שני קטעים כאלה. נניח בשלילה שאינם נחתכים. בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי הישר דרך A ו־B אינו חותך את הקטע CD. נניח עוד בלי הגבלת הכלליות ש־C קרובה יותר מאשר D לישר AB. נעביר ישר ℓ דרך C שמקביל ל־AB. נסובב את הישר ℓ סביב הנקודה C ונעקוב בכל רגע אחרי מספר הנקודות בקבוצה שנמצאות באותו הצד של ℓ שבו נמצא בהתחלה הקטע AB. נשים לב כי כאשר מתחילים מספר הנקודות הזה הוא לפחות $n+1$. זאת כיוון ש־AB הוא ישר חוצה ובהתחלה ℓ מקביל ל־AB. בשלב מסויים כאשר ℓ מתלכד עם CD יש בכל צד שלו בדיוק $n-1$ נקודות. לכן היה חייב להיות שלב שבו עברנו ממצב של n נקודות בצד שאחריו אנו עוקבים למצב בו יש בדיוק $n-1$ נקודות באותו הצד. זה יכול לקרות רק כאשר ℓ הוא ישר חוצה דרך C ונקודה בקבוצה ששונה מ־D. זו סתירה לכך שיש רק ישר חוצה אחד דרך C.

כדי להראות כי זו התשובה הנכונה היחידה, נותר להראות כי לא כל קבוצה בת $2n$ נקודות היא טובה (או יפה). לצורך כך נוכל פשוט להביט על קבוצת הקדקדים של מצולע משוכלל עם $2n-1$ צלעות ולהוסיף גם את מרכז המצולע המשוכלל. קל לראות כי כל ישר דרך מרכז המצולע וקדקד של המצולע הוא ישר חוצה. מכאן שקבוצת הנקודות שבחרנו היא אינה קבוצה יפה ולכן גם לא טובה.