

בחינת קבלה למסלול "מתיכון לטכניון"

יום ב', כ"א בסיוון תשפ"ב / 20 ביוני 2022, 17 : 30 – 16 : 00

שאלה 1 (25 נקודות)

הוכיחו שעבור כל a, b גדולים מ 1 מתקיים:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \geq 2$$

עבור אילו ערכי a, b מתקיים שוויון?

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון מעגל.

א. נתון מיתר AB במעגל. הוכיחו שמבין כל המשולשים ABC החסומים במעגל, המשולש ששטחו הגדול ביותר הוא המשולש המקיים $AC = BC$ (כלומר, משולש שווה-שוקיים שבסיסו AB).

ב. הוכיחו שמבין כל המשולשים החסומים במעגל, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

הדרכה - שימו לב שגם אם לא פתרתם את הסעיף הראשון, תוכלו להניח שהטענה בסעיף הראשון נכונה ולהוכיח בעזרתה את הסעיף השני.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונה סדרה ששני האברים הראשונים בה הם $a_1 = 1$ ו $a_2 = 2$. יתר אברי הסדרה נקבעים על-פי הכלל הבא (לכל $n \geq 2$)

$$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$$

מצאו מהי השארית החילוק ב 3 של a_{2022} .

שאלה 4 (25 נקודות)

$2n$ נקודות נמצאות על היקפו של מעגל.

רוצים לחבר אותן בזוגות על-ידי n מיתרים כך שאף מיתר לא יחתוך מיתר אחר בפנים המעגל. נסמן ב C_n את מספר הדרכים השונות בהן ניתן לעשות זאת.

א. הראו כי $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$.

ב. בטאו את C_{n+1} באמצעות C_n, C_{n-1}, \dots, C_1 .

בהצלחה!