

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ' באלול תשפ"ב / 16 ספטמבר 2022, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבוני, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

שם:

מספר זהות:

בית ספר:

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה):

טל' ביד:

כתובת דוא"ל (באותיות דפוס ברורות!):

שאלה 1

עבור כל מספר חיובי שלם n נסמן:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

מצאו את כל המספרים החיוביים השלמים n כך שהסכום $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ הוא ריבוע של מספר שלם.

שאלה 2

נקרא לסדרה באורך n של אפסים ואחדות "מחרוזת באורך n " ולאיבריה של אותה סדרה "ביטים". יהיו m, n שני שלמים חיוביים המקיימים $m < 2^n$. אריק מחזיק m מחרוזות באורך n . גיורא מעוניין למצוא מחרוזת חדשה השונה מכל המחרוזות שיש לאריק. לשם כך יכול גיורא לשאול את אריק שאלות מהצורה:
"מהו הערך של ביט מספר i במחרוזת מספר j ?",
כאשר $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq m$.

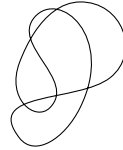
מהו המספר הקטן ביותר של שאלות המספיקות לגיורא להשיג את מטרתו כאשר $m = n$?

ומה התשובה כאשר $m = n + 1$?

שאלה 3

נמלה זחלה על מישור מרחק 1 וחזרה למקומה, (כך שהמסלול שלה הוא עקומה סגורה באורך 1; עובי המסלול נחשב ל-0).
הראו שקיים עיגול ברדיוס $\frac{1}{4}$ שמכיל את המסלול.

ציור של מסלול לדוגמא:



שאלה 4

לאורך מסלול בצורת מעגל נמצאים 100 בנים ו-100 בנות. המרחק בין שתי נקודות לאורך המסלול מוגדר כאורך הקשת הקצרה יותר שדרכה אפשר להגיע מאחת הנקודות לשנייה.

הראו כי סכום המרחקים בין כל שני בנים ובין כל שתי בנות תמיד קטן או שווה לסכום המרחקים בין כל הזוגות של בן ובת.

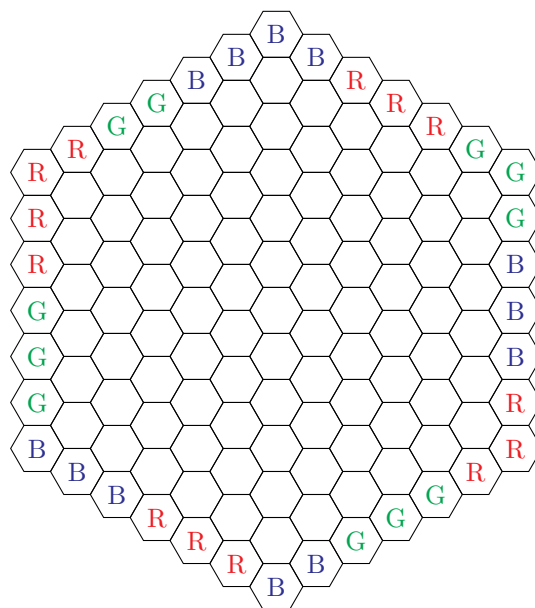
שאלה 5

נתונים n ישרים במישור שאף שלושה מהם לא נפגשים בנקודה אחת ואף שניים לא מקבילים.

הראו שקיים מסלול שאיננו חותך את עצמו ומורכב מ- n צלעות ישרות כך שכל אחד מהישרים הנתונים מכיל בדיוק צלע אחת של המסלול.

שאלה 6

נתונה כוורת של משושים כמו בתמונה, וצובעים כל אחד מהמשושים באחד משלושת הצבעים Blue, Green, Red (המסומנים בתמונה על ידי האותיות R, B, G). את המסגרת צובעים לפי ההוראות שבתמונה, ואת שאר המשושים שבפנים צובעים איך שרוצים. האם בהכרח יש נקודה שבה נפגשים שלושה משושים שצבועים בשלושה צבעים שונים?



שאלה 7

יהיו n ו- k , $k \leq n$, מספרים חיוביים שלמים. מסומנות n נקודות על ישר. ידוע כי לכל נקודה מסומנת מספר הנקודות המסומנות במרחק קטן או שווה ל-1 ממנה (כולל היא עצמה) מתחלק ללא שארית ב- k . הראו כי n מתחלק ב- k (ללא שארית).

