תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

יום ו', כ' באלול תשפ"ב / 16 ספטמבר 2022, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

שם:

מספר זהות:

בית ספר:

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה):

טל' נייד:

כתובת דוא"ל (באותיות דפוס ברורות!):

שאלה 1

מגדת עתידות רואה שבהגרלת הלוטו יעלו 6 מספרים שלמים חיוביים שונים שמכפלתם 3200. מהם?

רעיון לפתרון:

המספרים שיעלו בגורל הם: $1\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 8\ \ 10$

נתבונן בפירוק לגורמים ראשוניים $3200 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$. הדרך היחידה להפריד אותם לשישה מחלקים שונים זה מזה היא: $1,\ \ 2,\ \ 2\cdot2,\ \ 2\cdot2\cdot2,\ \ 5\cdot2,\ \ 5$. מדוע אין עוד דרכים? אלו המחלקים הקטנים ביותר של 3200. כל שישה מחלקים שונים אחרים לא יזכו, כי מכפלתם גדולה יותר מ-3200.

שאלה 2

כמה מספרים שלמים בין 1 ל- $10^{12} = 1{,}000{,}000{,}000{,}000$ הם גם ריבוע של מספר שלם וגם חזקה שלישית של מספר שלם, אבל לא חזקה רביעית ולא חזקה חמישית של מספר שלם?

רעיון לפתרון:

התשובה: 89

ראשית נשים לב שמספר הוא גם ריבוע וגם חזקה שלישית אם ורק אם הוא חזקה שישית. זה נובע מכך שמספר ההופעות של כל גורם ראשוני בפירוק שלו הוא גם זוגי וגם כפולה של שלוש, ולכן כפולה של שש. כלומר מספר שהוא גם ריבוע וגם חזקה שלישית מופיע בסדרה: $1^6, 2^6, 3^6, 4^6, \ldots$ .. מצד שני, לפי הטווח הנתון, הוא יכול להיות לכל היותר 100^6. אם כן, הצטמצמנו לרשימה של 100 מספרים.

נמחוק מהרשימה את $1^6, 4^6, 9^6, 16^6, 25^6, \ldots, 100^6$ בגלל שהם גם חזקות רביעיות, ולא צריך לספור אותן. למשל $125^4 = (5{\cdot}5{\cdot}5)^4 = 5^{12} = (5{\cdot}5)^6 = 25^6$ וכך באופן כללי לכל המספרים הריבועיים בחזקה שישית. כל מספר שנשאר הוא לא חזקה רביעית, שכן באופן כללי מספר שהוא חזקה שלישית וגם רביעית הוא חזקה 12-ית, והלוא מחקנו בדיוק את $1^{12}, 2^{12}, 3^{12}, 4^{12}, 5^{12}, \ldots, 10^{12}$.

משיקולים דומים, המספרים שהם חזקה שישית וחזקה חמישית הם $1^{30}, 2^{30}, 3^{30}, 4^{30}$ וכן הלאה. את $1 = 1^{30}$ כבר מחקנו. את $64^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^5 = 2^{30} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^6 = 32^6$ נמחוק עכשיו. המקרה הבא $243^6 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^6 = 3^{30}$ הוא כבר מחוץ לטווח של הרשימה.

לסיכום, מכיוון שמחקנו $11 = 1 + 10$ מספרים מתוך 100, התשובה היא 89.

שאלה 3

יש חפיסה של 32 קלפים. על כל קלף כתוב מספר בין 1 ל- 1,000,000, והמספרים שונים זה מזה. הקלפים מסודרים במעגל סביב השולחן כשהם הפוכים ולא רואים את המספרים שכתובים עליהם. המטרה היא למצוא קלף שמספרו גדול מכל אחד משני שכניו. לא ידוע כמה קלפים כאלה יש, אבל מספיק למצוא אחד כזה.

האם תוכלו למצוא אותו אם מותר להפוך לכל היותר 10 קלפים לבחירתכם (אחד אחרי השני) ואסור לגעת בשאר הקלפים?

רעיון לפתרון:

התשובה היא: כן.

פתרון א': בהתחלה הופכים 2 קלפים סמוכים ו-2 אלו שבדיוק מולם במעגל. ליד המספר הכי גבוה מבין ה-4 הידועים, יש 14 קלפים שמספרם לא ידוע המתחילים מאחד מצדדיו. הופכים את 2 האמצעיים מתוך ה-14. כעת, ליד המספר הגבוה ביותר שידוע יש 6 לא ידועים, ושוב הופכים את 2 האמצעיים. לסיום, הופכים את 2 הקלפים הלא ידועים באחד מצדדיו של המספר הכי גבוה שידוע. כעת נוצר רצף של 6 מספרים ידועים שהכי גדול ביניהם הוא לא באחד הקצוות, אז בהכרח הוא גדול מ-2 שכניו.

פתרון ב': נציג פתרון עבור 4 קלפים, ואז עבור 8, ואז עבור 16, ואז עבור 32. אם יש 4 קלפים במעגל, פשוט הופכים את כולם. אם יש 8 קלפים במעגל, הופכים 4 לסירוגין – אחד כן ואחד לא, ואז הופכים את שני אלו לצידו של המספר הגדול ביותר שידוע. כעת יש לנו רצף של 5 מספרים שהגדול ביניהם הוא לא באחד הקצוות, ולכן הוא מה שחיפשנו. אם יש 16 קלפים במעגל, מפעילים את השיטה של 8 קלפים על אלו במקומות הזוגיים בעזרת הפיכת 6 קלפים, ואז ידוע קלף שמספרו גדול מ-2 אלו במרחק 2 ממנו. הופכים את 2 שכניו, וסיימנו כמו קודם. באופן דומה, עבור 32 במעגל, פותרים עבור 16 קלפים במקומות הזוגיים בעזרת הפיכת 8 קלפים, ואז הופכים את 2 שכניו של הגדול, וכמו קודם אחד מה-3 יהיה גדול מ-2 שכניו.

שאלה פתוחה למחשבה: האם אפשר גם ב-9 קלפים? הראו כיצד, או הוכיחו שאי אפשר.

שאלה 4

נתונים שני מספרים חיוביים לא בהכרח שלמים, a ו-b. נקרא למשולש "טוב" אם יש לו שתי צלעות באורכים a ו-b. בהינתן משולש טוב, נקרא לזווית שלו "בכירה" אם היא הגדולה ביותר בין שלוש הזוויות שלו. מבין כל המשולשים הטובים נבחר משולש טוב שהזווית הבכירה שלו היא הקטנה ביותר. האורכים של שתיים מהצלעות שלו הם a ו-b.

מה האורך של הצלע השלישית במשולש הטוב שבחרנו?

רעיון לפתרון:

תשובה: $c = \max(a, b)$, כלומר האורך הגדול מבין a ו-b.

נניח כי $a \geq b$ ונראה שהתשובה היא a. אחרת נחליף את תפקידיהם של a ושל b ושאר ההוכחה יהיה זהה. נסמן ב-A, B, C את הקודקודים מול הצלעות a, b, c בהתאמה. שני אורכי הצלעות הנתונים הם $|BC| = a$ וכן $|AC| = b$.

נצייר מעגל ברדיוס a. נצייר גם רדיוס של המעגל, כלומר קטע ישר מהמרכז לאחת הנקודות על ההיקף. נרשום C במרכז המעגל, ונרשום A בנקודה לאורך הרדיוס שהיא בדיוק במרחק b מהנקודה C. שימו לב ש-A חייבת להיות בתוך המעגל או על היקפו לפי ההנחה $a \geq b$. כך מקבלים $|AC| = b$. כעת הקודקוד B חייב להיות נקודה על היקף המעגל לפי הנתון $|BC| = a$. שכנעו את עצמכם שכל משולש עם צלע באורך a וצלע באורך b חופף למשולש שמתקבל כך.

מכיוון שהנחנו $a \geq b$, אורך הצלע הגדולה של המשולש הוא או a או c. נשתמש בטענה ידועה שהזווית הגדולה במשולש היא תמיד מול הצלע הגדולה. לכן, לכל בחירה של B הזווית הגדולה של המשולש תהיה או $\sphericalangle A$ או $\sphericalangle C$. כיצד נבחר את B כך שהזווית הגדולה מבין שתי אלו תהיה קטנה ככל האפשר?

קיימת נקודה B על המעגל כך ש $a = |AB|$. אפשר למצוא אותה על קו מאונך החוצה את הצלע AC. במקרה זה המשולש הוא שווה שוקיים $|AB| = |BC|$ ולכן $\sphericalangle A = \sphericalangle C$. אם נזיז את B באחד הכיוונים לאורך המעגל אז אחת משתי הזויות תגדל, ותגדל, ותגדל, עד שתהיה 180 מעלות, שזה יקרה כאשר הנקודה B תגיע להמשך הקו של הצלע AC, ומשם אי אפשר להמשיך. לכן כל נקודה אחרת על היקף המעגל לא תיתן לנו משולש שהזווית הבכירה בו היא הכי קטנה שאפשר.

המסקנה היא שהבחירה של B שעבורה הזוית הבכירה קטנה ככל האפשר היא כאשר הצלע השלישית של המשולש גם היא באורך a. באותו אופן, אם $a \leq b$ הצלע השלישית תהיה באורך b. בקיצור, הצלע השלישית צריכה להיות באורך $\max(a, b)$.

פתרון אחר: נשים לב כי המשולש הטוב שהזווית הבכירה שלו היא הקטנה ביותר חייב להכיל שתי זוויות בגודל הזווית הבכירה. זאת כיוון שאם לא כך הדבר נוכל להקטין מעט את הזווית בין הצלעות באורכים a ו b ולקבל משולש טוב שהזווית הבכירה שלו מעט קטנה יותר. לכן המשולש המבוקש הוא שווה שוקיים. נראה כי בהכרח הצלע השלישית שווה לארוכה מבין הצלעות a ו b. נניח כי $a < b$ ונניח בשלילה שהמשולש הטוב הוא המשולש שווה השוקיים עם שתי צלעות באורך a וצלע באורך b. הזווית בין שתי הצלעות באורך a בהכרח גדולה מ- 60 מעלות כי היא שווה ל- 60 מעלות כאשר $a = b$ וככל ש- b גדל היא גדלה. נובע מכאן שהזווית בין שתי הצלעות באורך a גדולה מהזווית בין הצלעות באורך a, b בסתירה לכך שמדובר במשולש טוב.

שאלה 5

יש שני משולשים חדי זווית. אורכי הצלעות של המשולש הראשון הם a, b, ו-c. אורכי הצלעות של המשולש השני הם A, B, ו-C. כמו כן, ידוע ש $a < A$, $b < B$ ו-$c < C$.
הראו ששטח המשולש הראשון קטן משטח המשולש השני.

רעיון לפתרון:
נניח בשלילה ששטח המשולש הראשון אינו קטן משטח המשולש השני. נשים לב כי אם נתונים אורכים של שתי צלעות של משולש עם זוויות חדות אז ככל שהזווית בין שתי הצלעות גדולה יותר כך השטח של המשולש שיוצרות שתי הצלעות האלה גדול יותר. זה נובע מכך שהגובה מקצה של צלע אחת ביחס לצלע השנייה גדל ככל שמגדילים את הזווית עד ל- 90 מעלות. אנחנו טוענים כי הזווית בין שתי הצלעות באורכים A, B במשולש השני בהכרח קטנה יותר מהזווית בין שתי הצלעות באורכים a, b במשולש הראשון. (אם נראה זאת זה יהיה נכון לגבי כל שלוש הזוויות של המשולשים ונקבל סתירה כיוון שסכום הזוויות בשני המשולשים הוא זהה 180 מעלות.) ובכן נניח בשלילה שלא כך הדבר אז נקטין את הזווית בין שתי הצלעות באורכים A, B במשולש השני עד שתהייה שווה לזווית בין שתי הצלעות באורכים a, b במשולש הראשון. כך הקטנו את שטח המשולש השני וקיבלנו משולש שמכיל את המשולש הראשון בסתירה לכך ששטח המשולש הראשון אינו קטן משטח המשולש השני.

להלן רעיון של פתרון אפשרי אחר המשתמש בנוסחת הרון (למי שמכיר את הנוסחה):

נוסחת הרון לשטח משולש: $S_{abc} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

בעזרת נוסחאות כפל מקוצר: $\left(4S_{abc}^2\right) = ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2) = \ldots$

ויוצאת נוסחה שאפשר להסיק ממנה שהשטח גדל עם אורכי הצלעות:

$$\begin{aligned}
16S_{abc}^2 &= a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\\
&< A^2(b^2+c^2-a^2)+B^2(a^2+c^2-b^2)+C^2(a^2+b^2-c^2)\\
&= a^2(B^2+C^2-A^2)+b^2(A^2+C^2-B^2)+c^2(A^2+B^2-C^2)\\
&< A^2(B^2+C^2-A^2)+B^2(A^2+C^2-B^2)+C^2(A^2+B^2-C^2)\\
&= 16S_{ABC}^2
\end{aligned}$$

הסוגריים חיוביים כי המשולשים חדי זווית.

שאלה 6

באורוות המלך 75 סוסים, והוא אוהב לבחון את מהירותם וגם לסדר אותם בכל מיני דרכים. יום אחד הוא סידר אותם בשורה מהנמוך לגבוה – כל סוס גבוה מהקודם לו. ואז הוא בדק את משקלם, וראה שכל סוס יותר שמן מהקודם לו, חוץ מ-5 סוסים. כלומר, כל אחד מה-5 האחרים דווקא היה יותר רזה מהקודם לו בשורה. למחרת סידר אותם מהרזה לשמן ובדק את מהירותם. הוא ראה שכל סוס יותר מהיר מהקודם לו, חוץ מ-5 שדווקא היו איטיים יותר.

המלך רוצה לשלוח שלושה פרשים. כללי הטקס מחייבים שסוס א' יהיה יותר גבוה ויותר מהיר מסוס ב', וסוס ב' יהיה יותר גבוה ויותר מהיר מסוס ג'.

(1) הראו שיש באורוות שלושה סוסים מתאימים.

(2) לאחר שהפרשים יצאו לדרכם, האם בהכרח יש עוד שלושה סוסים מתאימים?

רעיון לפתרון:

(1) לפי הסקירה ביום הראשון, אפשר לחלק את הסוסים ל-6 קבוצות, כך שבתוך כל קבוצה המשקל עולה עם הגובה. מכיוון שיש 75 סוסים, לפחות אחת הקבוצות חייבת לכלול 13 סוסים או יותר. נזכור אותם. לפי היום השני, אפשר לחלק את הסוסים ל-6 קבוצות כך שבתוך כל קבוצה המהירות עולה עם המשקל. כל אחת מהן יכולה לכלול כמה מה-13 סוסים שזכרנו מהיום הראשון. בהכרח לפחות אחת מ-6 הקבוצות של היום השני תכלול 3 סוסים או יותר מבין ה-13 ההם. כך נקבל 3 סוסים שהמשקל שלהם עולה עם הגובה והמהירות עולה עם המשקל. לכן המהירות שלהם עולה עם הגובה, כמו שצריך.

(2) 72 לא מספיקים. כדי להראות זאת נבנה דוגמה בהשראת השאלה הראשונה. נתחיל מ-36 סוסים. להלן רשימת הגבהים, משקלים, ומהירויות שלהם בהתאמה:

$$\begin{array}{l} 11,12,13,14,15,16,\ \ 21,22,23,24,25,26,\ \ 31,32,\ldots,\ \ 61,62,63,64,65,66 \\ 16,26,36,46,56,66,\ \ 15,25,35,45,55,65,\ \ 14,24,\ldots,\ \ 11,21,31,41,51,61 \\ 66,65,64,63,62,61,\ \ 56,55,54,53,52,51,\ \ 46,45,\ldots,\ \ 16,15,14,13,12,11 \end{array}$$

בדוגמה זאת, המשקלים שרשומים בשורה השנייה עולים עם הגבהים שבשורה הראשונה למעט ב-5 מקומות, וכן המהירות עולה עם המשקל למעט ב-5 מקומות, אבל המהירות יורדת עם הגובה, ולכן אין 2 סוסים כנדרש.

מה שאולי לא רואים מיד, זה שהמהירות עולה עם המשקל למעט ב-5 מקומות. לשם כך יש לעבור על המספרים שבשורה השנייה מהקטן לגדול, 11, 12, וכן הלאה, ולראות מה רשום באותם מקומות בשורה השלישית, 16, 26, וכן הלאה. אפשר לשים לב שזאת בדיוק אותה סדרה כמו זאת שמתקבלת כשעוברים לפי הסדר של השורה הראשונה וקוראים את השנייה.

כדי לעבור מ-36 ל-72 סוסים, נשכפל כל סוס, ונצרף לו סוס שהוא קצת יותר גבוה, קצת יותר שמן, וקצת יותר מהיר. זה לא ישנה את שני התנאים הנ"ל שמתקיימים למעט ב-5 מקומות. ואז יהיו לנו 2 סוסים כנדרש בכל זוג כזה, כלומר שהמהירות עולה עם הגובה. אבל כמובן לא יהיו 3 סוסים כאלה, כי כל 2 סוסים מזוגות שונים עדיין לא מתאימים.

שאלה 7

בלוח משבצות בגודל 10×10 כותבים את המספרים $1, 2, 3, ..., 100$ בסדר כלשהו.

(1) האם בהכרח אפשר למצוא זוג משבצות סמוכות, כלומר עם צלע משותפת, שההפרש בין המספרים הכתובים בהן הוא לפחות 5?

(2) האם בהכרח אפשר למצוא כזה זוג עם הפרש לפחות 10?

רעיון לפתרון:

התשובה היא: כן, אפשר למצוא זוג משבצות סמוכות עם הפרש 10 או יותר.

מתחילים לסמן את המספרים המופיעים בלוח 1, 2, 3, ... לפי הסדר. עוצרים ברגע הראשון שכבר יש מספר מסומן בכל שורה, או שכבר יש מספר מסומן בכל עמודה, או כששני הדברים קורים ביחד. למשל במקרה שמסומן מספר בכל שורה אבל באחת העמודות עדיין לא, נובע שבכל שורה יש מספר מסומן לצד מספר שאינו מסומן. הנמוך מבין העשרה המסומנים קטן משכנו הלא מסומן ב-10 לפחות. שני המקרים האחרים דומים.