תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ' באלול תשפ"ב /16 ספטמבר 2022, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

שם:

מספר זהות:

בית ספר:

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה):

טל' נייד:

כתובת דוא"ל (באותיות דפוס ברורות!):

שאלה 1

עבור כל מספר חיובי שלם n נסמן:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

מצאו את כל המספרים החיוביים השלמים n כך שהסכום $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ הוא ריבוע של מספר שלם.

רמז לפתרון: התשובה היא: רק $n = 1, 3$. עבור $n = 2$ קל לראות שהסכום אינו ריבוע של מספר שלם, ועבור $n > 3$ הספרה האחרונה של הסכום היא 3 (הוכיחו!) והיא לא יכולה להיות הספרה האחרונה של ריבוע של מספר שלם (הוכיחו!).

שאלה 2

נקרא לסדרה באורך n של אפסים ואחדות "מחרוזת באורך n" ולאיבריה של אותה סדרה "ביטים". יהיו m, n שני שלמים חיוביים המקיימים $m < 2^n$. אריק מחזיק m מחרוזות באורך n. גיורא מעוניין למצוא מחרוזת חדשה השונה מכל המחרוזות שיש לאריק. לשם כך יכול גיורא לשאול את אריק שאלות מהצורה:

"מהו הערך של ביט מספר i במחרוזת מספר j?",

כאשר $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq m$.

מהו המספר הקטן ביותר של שאלות המספיקות לגיורא להשיג את מטרתו כאשר $m = n$? ומה התשובה כאשר $m = n + 1$?

רעיון לפתרון עבור המקרה הראשון: התשובה היא n. קל להשתכנע שגיורא חייב לשאול לפחות n שאלות, שכן אחרת מוכרחת להיות מחרוזת שאף ערך שלה לא נחשף ולכן במקרה הגרוע מחרוזת זו עלולה להיות שווה למחרוזת אותה בוחר גיורא. כדי לראות ש-n שאלות מספיקות נשתמש בשיטת הלכסון של קנטור: נחשוף את הערך ה-i במחרוזת ה-i ונקבע את הערך ה-i במחרוזת הפלט להיות ההפך ממנו.

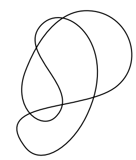
רעיון לפתרון עבור המקרה השני: התשובה היא $n + 2$. אלגוריתם שמגלה מחרוזת שאינה בקבוצה עם $n + 2$ שאילתות: תחילה נחשוף את הערך האחרון של שלושת המחרוזות הראשונות. נשים לב ששתיים מהן יש את אותו הערך, נניח 1. כעת נקבע את הערך האחרון במחרוזת הפלט להיות 0. זה מבטיח שהיא תהיה שונה משתיים מתוך שלושת המחרוזות הראשונות. נשים לב שכעת נותרו $n - 1$ ערכים שעלינו לקבוע במחרוזת הפלט וכמו כן נותרו לנו $n - 1$ מחרוזות קלט שעלינו לפסול. נעשה זאת בשיטת הלכסון של קנטור: נחשוף את הערך ה-i במחרוזת ה-i ונקבע את הערך ה-i במחרוזת הפלט להיות ההפך ממנו. כדי לראות ש-$n + 2$ הוא חסם תחתון נשים לב כי אם חושפים רק $n + 1$ ערכים אזי או שיש מחרוזת קלט שלא חשפנו בה אף ערך, או שחשפנו בכל מחרוזת קלט בדיוק ערך יחידה ולכן ישנם שתי מחרוזות קלט שחשפנו בהן את אותה הכניסה ואז יתכן שלשתי המחרוזות יש ערכים שונים בכניסה זו. בכל מקרה אין מספיק מידע כדי למצוא מחרוזת ששונה מכל המחרוזות.

שאלה 3

נמלה זחלה על מישור מרחק 1 וחזרה למקומה, (כך שהמסלול שלה הוא עקומה סגורה באורך 1; עובי המסלול נחשב ל-0).

הראו שקיים עיגול ברדיוס $\frac{1}{4}$ שמכיל את המסלול.

ציור של מסלול לדוגמא:



רעיון לפתרון: נבחר שתי נקודות A, B על המסלול שמחלקות את אורכו לחצי. המרחק ביניהן הוא לכל היותר $|AB| = \frac{1}{2}$. נסמן את מרכז הקטע AB באות O. נראה שהמסלול כולו נמצא בתוך עיגול ברדיוס $\frac{1}{4}$ סביב O. נבחר נקודה M על המסלול. תהי N נקודה סימטרית ל-M ביחס ל-O, כלומר בדיוק באותו מרחק מ-O ובדיוק בכיוון ההפוך. ואז

$$|MO| = \frac{1}{2}|MN| \leq \frac{1}{2}(|MA| + |AN|) = \frac{1}{2}(|AM| + |MB|) \leq \frac{1}{4}$$

כי הדרך מ-A ל-B דרך M לאורך המסלול היא לכל היותר $\frac{1}{2}$.

שאלה 4

לאורך מסלול בצורת מעגל נמצאים 100 בנים ו-100 בנות. המרחק בין שתי נקודות לאורך המסלול מוגדר כאורך הקשת הקצרה יותר שדרכה אפשר להגיע מאחת הנקודות לשנייה.

הראו כי סכום המרחקים בין כל שני בנים ובין כל שתי בנות תמיד קטן או שווה לסכום המרחקים בין כל הזוגות של בן ובת.

רעיון לפתרון: נקרא למרחק בין בן ובת "מרחק דו-צבעי" ולמרחק בין בן ובן או בת ובת "מרחק חד-צבעי". נניח שיש בן שבנקודה הנגדית מולו במעגל לא נמצא בן אז אפשר להניע אותו באחד הכיוונים ולאורך התנועה וכל עוד מול אותו בן לא עומד בן מצבנו נעשה רק גרוע יותר במובן הזה שההפרש בין סכום המרחקים הדו-צבעיים לסכום המרחקים החד-צבעיים גדל לטובת החד צבעיים. אותו דבר לגבי הבנות. כדי לראות מדוע, נביט בבן, ששמו, נגיד, שמוליק, שמולו לא עומד בן. נחלק את המעגל לשני חצאים לפי הקוטר שבקצה אחד שלו נמצא שמוליק. נסמן ב- g_1, b_1 את מספר הבנים והבנות בהתאמה בחצי אחד ונסמן ב- g_2, b_2 את מספר הבנים והבנות בחצי השני.

אם נזיז את שמוליק לכיוון החצי הראשון הרי שההפרש בין סכום המרחקים הדו-צבעיים לבין סכום המרחקים החד-צבעיים גדל ב-

$$g_2 - b_2 + b_1 - g_1$$

כפול המרחק ששמולק זז. אם נזיז את הבן שלנו לכיוון הנגדי נקבל שינוי בשיעור

$$-g_2 + b_2 - b_1 + g_1$$

כפול המרחק ששמוליק זז. לפחות אחד המספרים האלה אינו חיובי כי סכומם 0. כדאי לשים לב גם שאם שמוליק מגיע למצב שבו הוא עומד מול בת עדיין כדאי לו להמשיך בכיוון תנועתו וזאת בניגוד למצב בו הוא עומד מול בן. כמו כן, אם שמוליק נתקל תוך כדי תנועתו בבת הרי שניתן להוציא את שניהם מן המשחק כיוון שתרומתם יחד להפרש בין המרחקים החד צבעיים למרחקים הדו-צבעיים היא 0. אם שמוליק ניתקל בבן תוך כדי תנועתו, אז כדאי לו להמשיך לנוע באותו הכיוון ומצבו רק נעשה גרוע יותר. מכאן שנוכל להזיז את שמוליק לאחד הכיוונים ולהגיע למצב גרוע יותר מבחינתנו. נעצור כאשר שמוליק יעמוד מול בן. לכן מספיק להוכיח את הטענה במצב בו בנקודה הנגדית מול כל בן עומד בן ומול כל בת עומדת בת. קל לראות (הוכיחו!) שבמצב כזה מתקיים שיוון בין שני הסכומים. למעשה במצב כזה כל שני בנים נגדיים או כל שתי בנות נגדיות תורמים ביחד 0 להפרש בין שני סוגי המרחקים.

רעיון לפתרון קצת שונה: לכל זוג בנים או זוג בנות נצייר על המעגל שלנו את הקשת הקצרה בינהם בצבע כחול. לכל זוג של בן ובת נצייר על המעגל את הקשת הקצרה בינהם בצבע אדום. אנחנו מעוניינים להראות שסכום אורכי הקשתות האדומות (עם חפיפות) גדול או שווה לסכום אורכי הקשתות הכחולות (עם חפיפות). נחלק את המעגל למקטעים מאוד קטנים, כך שאף אחד מהבנים והבנות לא עומד בנק' פנימית של אף מקטע. נביט בזוג של מקטע והמקטע הנגדי לו (זה שמהעבר השני של מרכז המעגל). נשאל את עצמנו כמה תורמים שני המקטעים האלה לקשתות האדומות בסך הכל וכמה לכחולות. ובכן, התרומה לקשתות הכחולות היא אורך מקטע אחד כפול

$$x(100 - x) + y(100 - y)$$

כאשר x, y הם מספרי הבנים והבנות, בהתאמה, בחצי אחד של המעגל המוגדר ע"י שני המקטעים הנגדיים. התרומה של שני המקטעים הנגדיים לקשתות הכחולות היא אורך מקטע אחד כפול:

$$x(100 - y) + y(100 - x)$$

כל שנותר לוודא הוא שהתרומה לקשתות האדומות גדולה או שווה לתרומה לקשתות הכחולות. כלומר:

$$y(100 - x) + x(100 - y) - y(100 - y) - x(100 - x) \geq 0$$

שאלה 5

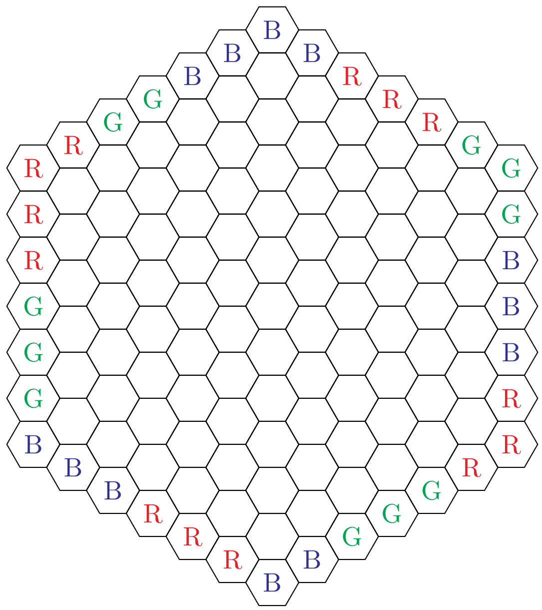
נתונים n ישרים במישור שאף שלושה מהם לא נפגשים בנקודה אחת ואף שניים לא מקבילים.
הראו שקיים מסלול שאינו חותך את עצמו ומורכב מ- n צלעות ישרות כך שכל אחד מהישרים הנתונים מכיל בדיוק צלע אחת של המסלול.

רעיון לפתרון: מתחילים בנקודה מסוימת על אחד הישרים והולכים עד לנקודת החיתוך הקרובה ביותר עם ישר אחר ומוציאים מהמשחק את הישר הראשון. ממשיכים באותו האופן ומראים שהמסלול שמתקבל בהכרח אינו חותך את עצמו.

שאלה 6

נתונה כוורת של משושים כמו בתמונה, וצובעים כל אחד מהמשושים באחד משלושת הצבעים Blue ,Green ,Red (המסומנים בתמונה על ידי האותיות R,B,G). את המסגרת צובעים לפי ההוראות שבתמונה, ואת שאר המשושים שבפנים צובעים איך שרוצים.

האם בהכרח יש נקודה שבה נפגשים שלושה משושים שצבועים בשלושה צבעים שונים?



רעיון לפתרון: כן. אפילו שתיים. מתחילים ללכת מצד ימין לאורך הצלעות בין הכחול לאדום, וכשמגיעים לקודקוד דו-צבעי פונים לצלע השנייה שלו שגם היא בין הכחול לאדום. תמיד הכחול יהיה מימין והאדום משמאל ביחס להתקדמות על המסלול. מסלול כזה יכול להמשיך עד שיפגוש נקודה תלת-צבעית או עד שיגיע לקצה ויצא החוצה כאשר הכחול מימין והאדום משמאל. יש שלושה מסלולים כאלה שנכנסים לתחום, אבל רק אחד שיוצא ממנו. לכן, כל אחד מהשניים האחרים במוקדם או במאוחר יפגוש נקודה תלת צבעית.

שאלה 7

יהיו n ו-k, $k \leq n$, מספרים חיוביים שלמים. מסומנות n נקודות על ישר. ידוע כי לכל נקודה מסומנת מספר הנקודות המסומנות במרחק קטן או שווה ל-1 ממנה (כולל היא עצמה) מתחלק ללא שארית ב-k.

הראו כי k מחלק את n.

פתרון (פתרון של עשהאל רייטר): תהיינה $x_1 < \ldots < x_n$ n הנקודות על הישר. נביט באוסף הבא של $2n$ נקודות: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ בנוסף לנקודות $x_1+1, x_2+1, \ldots, x_n+1$. ונסדר מחדש את הנקודות הללו בסדרה $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2n}$.

לכל $1 \leq i \leq n$ יהיו a_i, b_i האנדקסים כך ש-: $p_{a_i} = x_i$ ו- $p_{b_i} = x_i + 1$.

נשים לב כי מספר הנקודות במרחק קטן או שווה ל- 1 מ- x_i הוא בדיוק $b_i - a_i$ (חשבו מדוע).

לכן, על פי הנתון $b_i - a_i$ הוא כפולה של k לכל i. במילים אחרות ל- a_i ול- b_i יש אותה שארית בחלוקה ב- k. נשים לב כי המספרים $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ הם סידור אחר של המספרים $1, 2, \ldots, 2n$.

ברשימה הזו כל שארית בחלוקה ב- k מופיעה אותו מספר פעמים רק אם $2n$ הוא כפולה של k. אחרת, יש שאריות שיופיעו פעם אחת נוספת, אך זה לא ייתכן כיוון שכל שארית מופיעה מספר זוגי של פעמים. כמו כן, אם n אינו כפולה של k אז $2n/k$ בהכרח מספר איזוגי, שוב בסתירה לכך שכל שארית מופיעה מספר זוגי של פעמים.