

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

8 בספטמבר 2023

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

מצאו מספר תלת ספרתי שמתקבל גם כמכפלת שני מספרים טבעיים עוקבים, וגם כמכפלת שלושה מספרים טבעיים עוקבים.

שאלה 2

לוקחים מספר טבעי חיובי ומחסרים את ספרת האחדות שלו משאר הספרות.

למשל, המספר 834 הופך ל- $83 - 4 = 79$.

חוזרים על הפעולה הזו שוב ושוב עד שנשארים עם מספר חד-ספרתי (חיובי, אפס או שלילי).

למשל, לוקחים את 79 שהתקבל קודם ומקבלים: $7 - 9 = -2$.

מספר נקרא **מיוחד** אם בסוף התהליך מקבלים את המספר 0.

למשל, 374 הוא מיוחד כי הופך ל- $37 - 4 = 33$ ו- $33 - 3 = 0$.

אילו מספרים טבעיים הם מיוחדים?

שאלה 3

כרטיס חישגד מכיל את המספרים 1 עד 12, מסודרים בסדר כלשהו בטבלה של 3 שורות ו-4 עמודות. ידוע שהמספרים בכל שורה גדלים משמאל לימין, והמספרים בכל עמודה גדלים מלמעלה למטה. דוגמה:

1	2	3	9
4	6	7	10
5	8	11	12

כאשר קונים את הכרטיס כל המספרים מוסתרים, וצריך "לגרד" את הכרטיס בשביל לחשוף אותם. כמה משבצות תמיד מספיק לחשוף כדי לדעת בוודאות את כל הטבלה?

שאלה 4

שולה מקבלת ארבעה פתקים, ועל כל פתק כתוב מספר בכתב סתרים ששולה לא מבינה. נסמן את המספרים הללו ב- a, b, c, d . כמו כן לשולה יש גישה לשלוש מכונות:

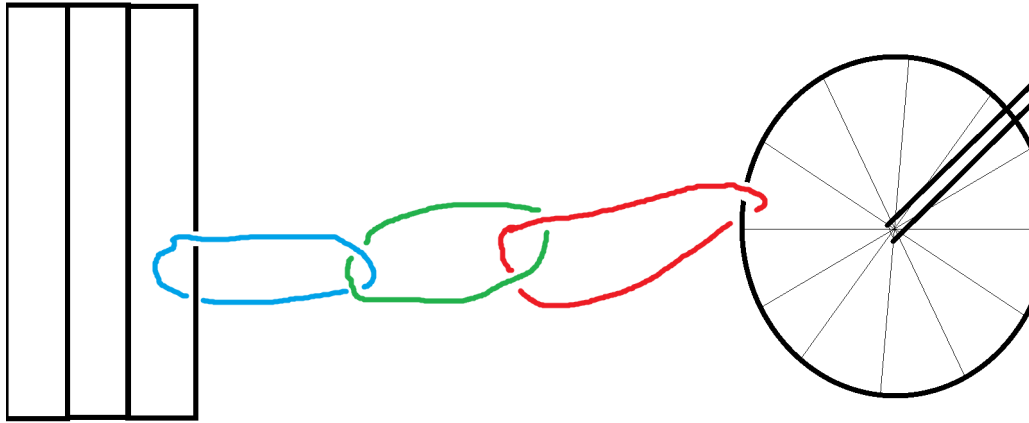
- מכונה שמקבלת שני פתקים עם מספרים בכתב סתרים, ומחזירה פתק חדש שעליו כתוב סכום המספרים בכתב סתרים. השימוש במכונה זו הוא בחינם.
- מכונה שמקבלת שני פתקים עם מספרים בכתב סתרים, ומחזירה פתק חדש שעליו כתובה בכתב סתרים תוצאת החיסור של המספר השני מהראשון. השימוש במכונה זו גם הוא בחינם.
- מכונה שמקבלת שני פתקים עם מספרים בכתב סתרים, ומחזירה פתק חדש שעליו כתובה מכפלת המספרים, **לא** בכתב סתרים. השימוש במכונה זו עולה לשולה שקל אחד.

כל המכונות מחזירות גם את הפתקים שקיבלו, כך שאפשר להשתמש בהם שוב. שולה יודעת לעשות פעולות חשבון על מספרים גלויים שאינם בכתב סתרים ללא כל הגבלה.

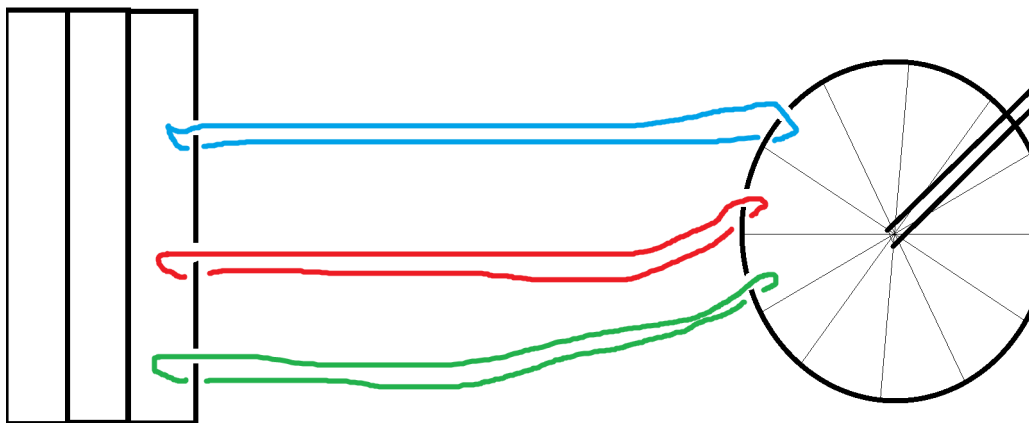
שולה רוצה לדעת את שני המספרים: $ad + bc$, $ac + bd$.
אם היא תנסה לחסוך ככל האפשר, כמה שקלים תצטרך לשלם?

שאלה 5

לשלושה שותפים יש אופניים. לכל שותף יש שרשרת שרק הוא יכול לנעול ולפתוח. אם הם רוצים לקשור את האופניים לגדר כך שכל אחד מהם יוכל לבוא ולקחת אותם, הם יכולים לעשות זאת כך:



אם הם רוצים שרק שלושתם ביחד יוכלו לשחרר את האופניים, הם יכולים לקשור אותם כך:

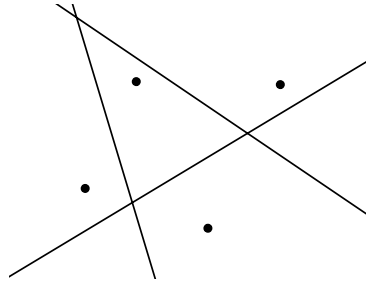


ומה אם רוצים שכל שניים מהם יוכלו לשחרר את האופניים, אך לא שותף בודד? כיצד יקשרו אותם לגדר?

התשובה לשאלה יכולה להיות ציור יפה וברור ככל האפשר. רצוי להוסיף הסבר מילולי קצר איך "רואים" מהציור שצריך שני שותפים ולא מספיק אחד כדי לשחרר את האופניים.

שאלה 6

מציירים 101 נקודות במישור באופן כלשהו, כך שאף 3 נקודות לא נמצאות על ישר אחד. נאמר שאוסף ישרים **מפריד** את הנקודות שציינו אם לכל שתי נקודות P ו- Q יש ישר l באוסף כך ש- P ו- Q נמצאות בצדדים שונים של l . למשל בציור הבא יש אוסף של 3 ישרים שמפריד קבוצה של 4 נקודות:



כמה ישרים נצטרך על מנת להפריד את 101 הנקודות שלנו במקרה הגרוע ביותר?

שאלה 7

נתונה חפיסה של 100 קלפים שבה הקלפים ממוספרים מ-1 עד 100. מערבבים את החבילה ומשחקים את המשחק הבא.

בכל שלב של המשחק מסתכלים על הקלף העליון בחבילה. נניח שזהו קלף מספר k . אז לוקחים את k הקלפים העליונים בחבילה ומחזירים אותם לראש החבילה בסדר הפוך.

שימו לב שפעולה זאת מעבירה את הקלף k מראש הערימה למקום ה- k מראש הערימה. הקלף שהיה שני מלמעלה יהיה במקום $k - 1$ מראש הערימה וכן הלאה.

חוזרים על התהליך שוב ושוב. הראו כי בסופו של דבר הקלף העליון בחבילה יהיה קלף מספר 1.

תשובות

1. על ידי בדיקת $(x-1)x(x+1) = x^3 - x$ עבור $x = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ נמצא $210 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 14 \cdot 15$

2. מספרים המתחלקים ב-11.

זה בגלל שמתקיים

$$10x + y \equiv -(x - y) \pmod{11}$$

וצד ימין הוא אפס אם ורק אם צד שמאל הוא אפס.

ואפס הוא המספר החד-ספרתי היחיד שמתחלק ב-11.

3. נגרד את כל המשבצות פרט לשורה הראשונה ולעמודה האחרונה. המספרים החסרים מסודרים בסדר עולה מהפינה השמאלית עליונה עד הפינה הימנית תחתונה.

כדי לראות שזה אופטימלי, נסתכל על הסידור הבא:

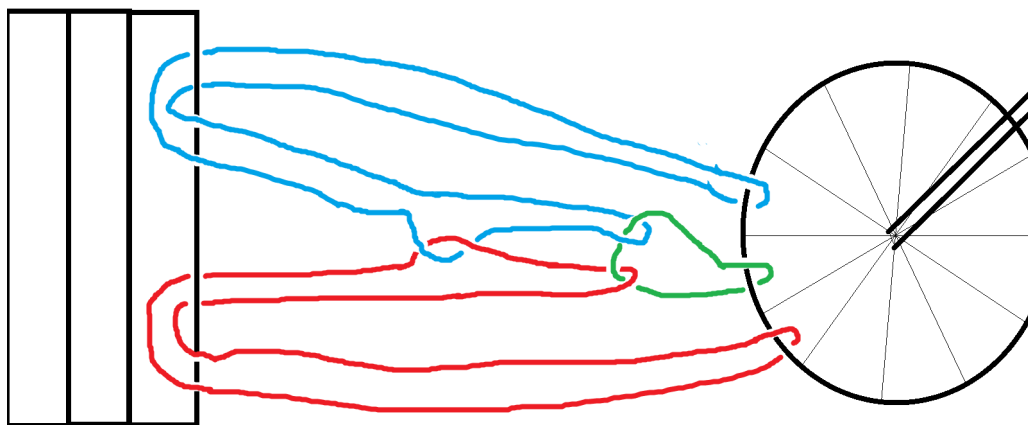
1	2	4	7
3	5	8	10
6	9	11	12

נניח שאנו מתחייבים על סידורים בהם כל אלכסון מכיל את אותם מספרים כמו הסידור הנ"ל. בכל דרך בה נסדר את המספרים בכל אלכסון נקבל טבלה חוקית, לכן מכל אלכסון נצטרך לשאול לפחות על כל המשבצות פרט לאחת.

4. אפשר בעזרת שלוש מכפלות: נחשב תחילה את $s = (a+b)(c+d)$. כעת נחשב את $t = ac+bd$, ואת ההפרש $s - t = ad + bc$.

אפשר גם בעזרת שתי מכפלות בלבד: נחשב את $r = (a-b)(c-d)$ ואת $s = (a+b)(c+d)$ כמו קודם. כיוון ש- r, s אינם בכתב סתרים, אפשר לחלק ב-2 ולקבל $(s \pm r)/2$

5. יש הרבה דרכים לעשות זאת. הנה אחת:



אם מסירים שתי שרשראות, אפשר למשוך את השלישית ולראות שהיא נפרדת לחלוטין מהגדר. הסרה של שרשרת אחת, לא משנה איזו, תוביל למצב שהשתיים האחרות יוצרות ביחד שרשרת של שתי חוליות המלופפת פעם או פעמיים סביב העמוד של הגדר.

6. נראה קודם שאפשר תמיד לפתור את הבעיה עם 51 ישרים. נעביר ישר שמחלק את הנקודות לשני חצאים בגדלים 50,51: נבחר כיוון גנרי, ונזיז אותו מעבר אחד של הקבוצה לעבר השני, וכך נמצא מיקום כנ"ל. נסתכל על הקמור של קבוצת הנקודות, ונתרכז בנקודות שמופיעות על השפה. נבחר שתי נקודות סמוכות משני צידי הישר הראשון, ונעביר ישר שמפריד אותן מכל השאר. נמחוק אותן, ונחזור על התהליך עד שנפריד את כל הנקודות.

כעת נראה שאי אפשר יותר טוב. נמקם 101 נקודות במעגל. כל ישר יכול לפגוע בכלל היותר שניים מהמרווחים בין הנקודות. מכיוון שצריך לפגוע ב-101 כאלה, מספר הישרים הוא לפחות 51.

7. נסתכל על סדרת המספרים שמופיעים בראש החפיסה. יהי m המספר הכי גדול שמופיע אינסוף פעמים. בפרט, יש שתי הופעות של m שביניהן אין הופעה של מספר גדול יותר. זה לא יכול להיות אם $m > 1$.

פתרון קצת אחר: נסתכל על קבוצת מספרי הקלפים שמקומם שווה למספרם מסודרים מהגדול לקטן. אם קבוצה זאת מכילה את 1 אז סיימנו, אחרת היא תמיד גדלה בסדר הלקסיקוגרפי. אבל יש רק 2^{99} קבוצות אפשריות שלא מכילות את 1, וזה גם חסם על מספר הצעדים.