

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

8 בספטמבר 2023

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

נתונה סדרה חשבונית של מספרים טבעיים באורך 10 שהפרשה הוא 11.
הוכיחו כי מכפלת כל המספרים בסדרה מתחלקת ב-10!

שאלה 2

כרטיס חישגד מכיל את המספרים 1 עד nm , מסודרים בסדר כלשהו בטבלה של n שורות ו- m עמודות. ידוע שהמספרים בכל שורה גדלים משמאל לימין, והמספרים בכל עמודה גדלים מלמעלה למטה. דוגמה עבור $n = 3$ ו- $m = 4$:

1	2	3	9
4	6	7	10
5	8	11	12

כאשר קונים את הכרטיס כל המספרים מוסתרים, וצריך "לגרד" את הכרטיס בשביל לחשוף אותם. כמה משבצות תמיד מספיק לחשוף כדי לדעת בוודאות את כל הטבלה?

שאלה 3

ניזכר שפולינום הוא פונקציה מהצורה $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ עבור n טבעי ומקדמים a_0, \dots, a_n שבשאלה זו יכולים להיות מספרים מרוכבים כלשהם. מיצאו את כל זוגות הפולינומים p ו- q כך ש- $p(x)q(x) = p(q(x))$.

שאלה 4

יהי q ראשוני אי-זוגי. הוכיחו שלא יכול להיות שכל $(q - 1)$ המספרים

$$1^2 + 1 + q, 2^2 + 2 + q, \dots, (q - 1)^2 + (q - 1) + q$$

הם כולם מכפלה של שני ראשוניים (לאו דווקא שונים).

שאלה 5

נתבונן בסדרת המספרים הטבעיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_0 = 4$ ו- $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n-1)}{2}$ לכל $n \geq 0$.

נגדיר סדרה חדשה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: $b_n = 0$ אם a_n זוגי ו- $b_n = 1$ אם a_n אי-זוגי. הוכיחו כי לכל m טבעי הסדרה

$$b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, \dots$$

איננה מחזורית.

שאלה 6

לאדם יש מספר טבעי סודי x שאותו חווה מנסה לגלות. בכל שלב מותר לחווה לשאול את אדם רק שאלות מהצורה "האם $x + n$ הוא מספר ראשוני?", כאשר n הוא בעצמו מספר טבעי שאותו חווה בוחרת.

הוכיחו כי חווה יכולה לגלות את x במספר סופי של שאלות.

שאלה 7

צובעים את המישור בשני צבעים כך שמתקיימת התכונה הבאה: לכל $a > 0$ יש במישור משולש שווה צלעות שאורך צלעו a ושלושת הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

הראו שלכל שלושה מספרים $a, b, c > 0$ כך שסכום כל שניים גדול מהשלישי אפשר למצוא משולש במישור שאורך צלעותיו הם b, a ו- c ושלושת הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.