תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

8 בספטמבר 2023

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: ______________________________

מספר תעודת זהות: ______________________________

שם בית הספר: ______________________________

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): ______________________________

מספר טלפון נייד: ______________________________

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): ______________________________

____

שאלה 1

נתונה סדרה חשבונית של מספרים טבעיים באורך 10 שהפרשה הוא 11.
הוכיחו כי מכפלת כל המספרים בסדרה מתחלקת ב-$10!$.

שאלה 2

כרטיס חישגד מכיל את המספרים 1 עד nm, מסודרים בסדר כלשהו בטבלה של n שורות ו-m עמודות. ידוע שהמספרים בכל שורה גדלים משמאל לימין, והמספרים בכל עמודה גדלים מלמעלה למטה. דוגמה עבור $n = 3$ ו-$m = 4$:

1	2	3	9
4	6	7	10
5	8	11	12

כאשר קונים את הכרטיס כל המספרים מוסתרים, וצריך "לגרד" את הכרטיס בשביל לחשוף אותם.
כמה משבצות תמיד מספיק לחשוף כדי לדעת בוודאות את כל הטבלה?

שאלה 3

ניזכר שפולינום הוא פונקציה מהצורה $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ עבור n טבעי ומקדמים $a_0, \ldots, a_n$ שבשאלה זו יכולים להיות מספרים מרוכבים כלשהם. מיצאו את כל זוגות הפולינומים p ו-q כך ש-$p(x)q(x) = p\left(q(x)\right)$.

שאלה 4

יהי q ראשוני אי-זוגי. הוכיחו שלא יכול להיות שכל $(q-1)$ המספרים

$$1^2+1+q,\ 2^2+2+q,\ \ldots,\ (q-1)^2+(q-1)+q$$

הם כולם מכפלה של שני ראשוניים (לאו דווקא שונים).

שאלה 5

נתבונן בסדרת המספרים הטבעיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_0 = 4$ ו-$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n-1)}{2}$ לכל $n \geq 0$.

נגדיר סדרה חדשה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: $b_n = 0$ אם a_n זוגי ו-$b_n = 1$ אם a_n אי-זוגי. הוכיחו כי לכל m טבעי הסדרה

$$b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, \ldots$$

איננה מחזורית.

שאלה 6

לאדם יש מספר טבעי סודי x שאותו חווה מנסה לגלות. בכל שלב מותר לחווה לשאול את אדם רק שאלות מהצורה "האם $x+n$ הוא מספר ראשוני?", כאשר n הוא בעצמו מספר טבעי שאותו חווה בוחרת.

הוכיחו כי חווה יכולה לגלות את x במספר סופי של שאלות.

שאלה 7

צובעים את המישור בשני צבעים כך שמתקיימת התכונה הבאה: לכל $a > 0$ יש במישור משולש שווה צלעות שאורך צלעו a ושלושת הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

הראו שלכל שלושה מספרים $a, b, c > 0$ כך שסכום כל שניים גדול מהשלישי אפשר למצוא משולש במישור שאורך צלעותיו הם a, b ו-c ושלושת הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

תשובות

1. נשים לב ש-11 הוא ראשוני, ובפרט יש לו הופכי כפלי m מודולו $10!$. נסמן את האיבר הראשון בסדרה ב-a. מכפלת עשרת האיברים הראשונים מקיימת

$$\prod_{t=0}^{9}(a+11t) \equiv 11^{10}\prod_{t=0}^{9}(ma+t) \pmod{10!}.$$

צד ימין מתחלק ב-$10!$ כי המנה היא המקדם הבינומי $\binom{ma+9}{10}$.

2. נגרד את כל המשבצות פרט לשורה הראשונה ולעמודה האחרונה. המספרים החסרים מסודרים בסדר עולה מהפינה השמאלית עליונה עד הפינה הימנית תחתונה.

כדי לראות שזה אופטימלי, נסתכל על הסידור הבא (לקחנו דוגמה קונקרטית):

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 6 & 9 & 11 & 12 \end{matrix}$$

נניח שאנו מתחייבים על סידורים בהם כל אלכסון מכיל את אותם מספרים כמו הסידור הנ"ל. בכל דרך בה נסדר את המספרים בכל אלכסון נקבל טבלה חוקית, לכן מכל אלכסון נצטרך לשאול לפחות על כל המשבצות פרט לאחת.

3. נבחן תחילה את הדרגות של שני הפולינומים:

$$\deg(P(x)Q(x)) = \deg P + \deg Q, \quad \deg(P(Q(x)) = \deg P \cdot \deg Q$$

מכאן מקבלים שאו ששני הפולינומים הם קבועים, או ששניהם ריבועיים. אם שניהם קבועים אז או ש-$Q=1$ או ש-$P=0$.

המקרה היותר מעניין הוא בו שני הפולינומים ריבועיים. נמצא שורש (אולי מרוכב) של Q ונציב אותו במשוואה, ונקבל $P(0)=0$. נרשום בהתאם $P=ax^2+bx$. אז

$$(ax^2+bx)\cdot Q = aQ^2+bQ = (aQ+b)\cdot Q$$

לכן מתקיים

$$.P = ax^2+b, \quad Q = x^2+\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}$$

4. נסמן למען הנוחות $P(x)=x^2+x+q$. נסמן ב-a את הגורם הראשוני הקטן ביותר של $P(1)=q+2$ וב-b את הגורם הראשוני הקטן ביותר של $P(2)=q+6$. נשים לב ש-$a\neq b$ כי אחרת a מחלק את 4, אבל $a,b>2$ כי $q+2, q+6$ הם אי-זוגיים.

אם $a<b$ אז

$$q+6 \geq b^2 \geq b(a+2) \geq ab+10$$

ולכן $ab \leq q-4$. באופן דומה, אם $a>b$ אז

$$q+2 \geq a^2 \geq a(b+2) \geq ab+10$$

ולכן $ab \le q-8$.

נמצא c בין 1 ל-$ab-1$ כך ש-$c \equiv 1 \pmod a$ ו-$c \equiv 2 \pmod b$. מתקיים

$$\begin{aligned} P(c) &\equiv 1^2+1-2 \equiv 0 \pmod a \\ P(c) &\equiv 2^2+2-6 \equiv 0 \pmod b \end{aligned}$$

מכיוון ש-$c \ge 2$, מתקיים $P(c) \ge q+6 > ab$, ולכן ל-$P(c)$ יש לפחות שלושה גורמים ראשוניים. זה מסיים את ההוכחה מכיוון ש-$c < ab < q$.

5. נראה שמתוך $b_m, \ldots, b_{m+k-1}$ ניתן לדעת את $a_m \bmod 2^k$. ההוכחה היא באינדוקציה. הטענה בבירור נכונה כאשר $k=1$. באופן כללי, מספיק להראות שההעתקה

$$c \pmod{2^k} \mapsto \binom{c}{2} \pmod{2^{k-1}}$$

היא 2-ל-1, כאשר לכל ערך בצד ימין, שני הערכים שמתאימים לו בצד שמאל הם בעלי זוגיות שונה. אמנם, אם c, d הם בעלי אותו צד ימין אז

$$c(c-1) \equiv d(d-1) \pmod{2^k} \Longrightarrow (c-d)(c+d-1) \equiv 0 \pmod{2^k}$$

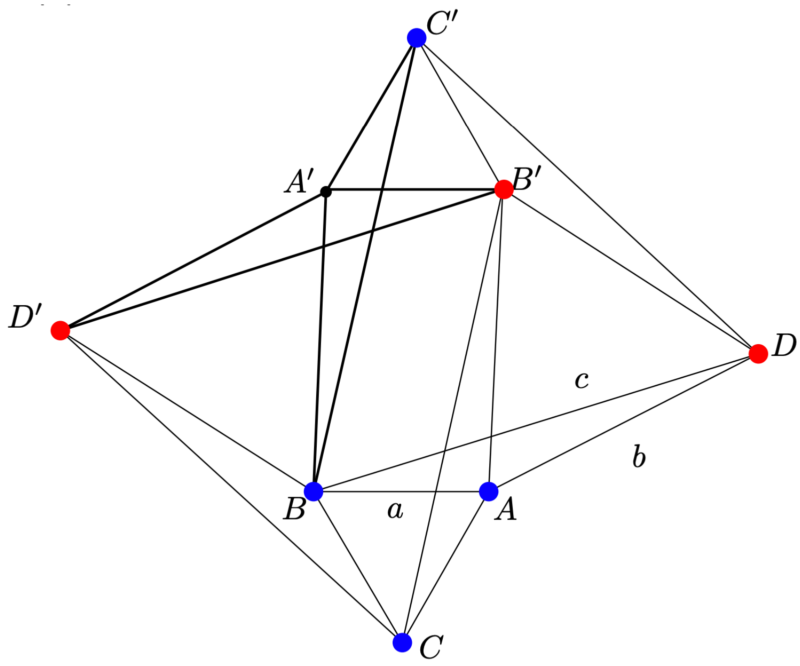
מכיוון שלשני הגורמים זוגיות שונה, אנו מסיקים שאם $c \neq d$ אז $d = -1-c \bmod 2^k$, מה שמסיים את צעד האינדוקציה.

כעת, נניח שהסדרה b_n מחזורית החל מ-m מסוים. אז לכל k, הסדרה $a_n \bmod 2^k$ מחזורית החל מ-m, ובפרט $a_m \equiv a_{m+p} \bmod 2^k$ לכל k, כאשר p גודל המחזור. אבל זה אומר ש-$a_m = a_{m+p}$, והגענו לסתירה.

6. אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות ש-x ראשוני: ננסה $y = 1, 2, \ldots$ עד ש-$x+y$ ראשוני.

נניח שידוע שהפתרון אינו ראשוני קטן מ-p. נראה איך לבדוק האם הפתרון הוא p. לכל $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, נמצא ראשוני $p_a = m_a p + a$, ונשאל האם $x + (p_a - p)$ ראשוני. אם $x = p$, אז כולם יהיו ראשוניים. אחרת, מכיוון ש-x ראשוני גדול מ-p, הוא מותיר שארית $b \neq 0$ בחלוקה ב-p. לכן $x + (p_{p-b} - p)$ יהיה כפולה של p שגדולה מ-p, ומכאן שזה יהיה מספר לא ראשוני.

7. את ההוכחה אפשר לתמצת בציור הבא:



במילים: נקרא לשני הצבעים שלנו "כחול" ו"אדום". בהינתן אורכי הצלעות a, b, c נבנה את הקונפיגורציה שבציור שבה המשולשים הבאים שווי צלעות: ABC, $A'B'C'$ (עם אורך צלע a), ADB' ו-$A'D'B$ (עם אורך צלע b), ו-$B'D'C$, BDC' (עם אורך צלע c).

נניח את הקונפיגורציה במישור שלנו כך ש-A, B, C צבועות באותו צבע, נגיד כחול. אם D כחולה מצאנו משולש כנדרש (ABD), ולכן אפשר להניח ש-D אדומה, ובאותו אופן אפשר להניח ש-B', D' אדומות. אם C' אדומה שוב מצאנו משולש כנדרש ($C'B'D$) ולכן אפשר להניח ש-C' כחולה ובאותו אופן A' כחולה. אבל עכשיו המשולש $A'BC'$ הוא המשולש שחיפשנו.