

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

תאריך

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

מספר טלפון נייד: _____

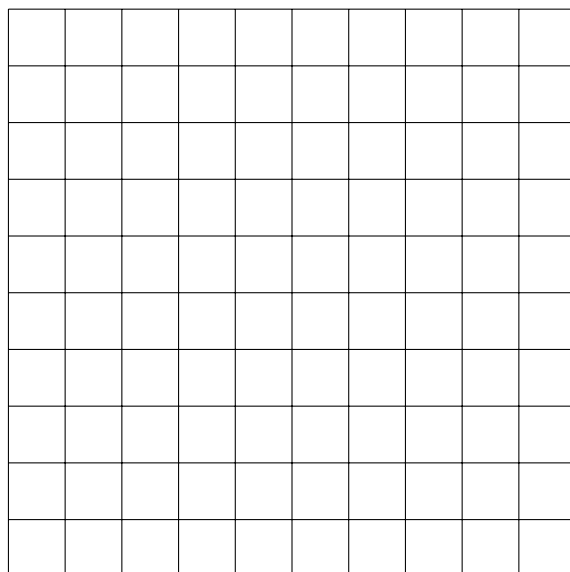
כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

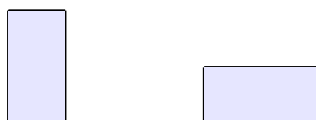
הוסיפו פעולות חשבון וסוגריים בין הספרות בצד שמאל כדי לקבל תרגיל נכון:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ = \ 2025$$

שאלה 2



רוצים לכסות לוח משבצות 10×10 ב-50 אבני דומינו 2×1 , כך שאבני הדומינו יכולות להיות אופקיות או אנכיות:



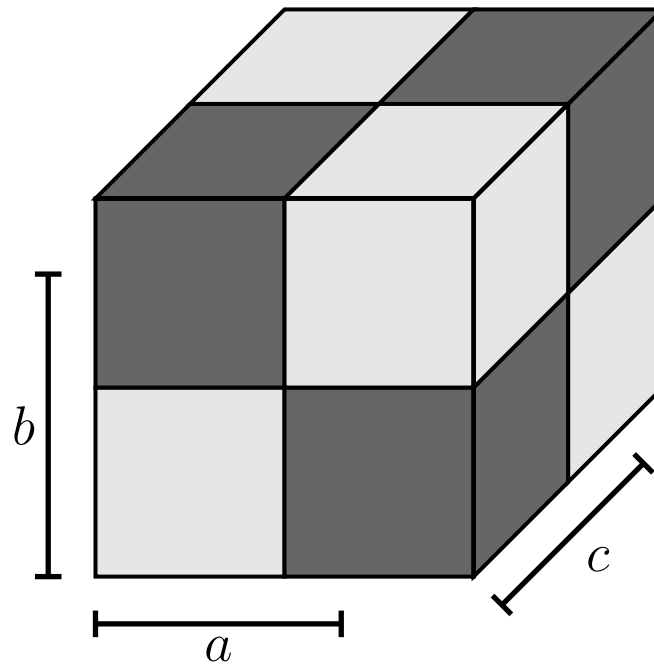
האם אפשר לעשות זאת כך שמספר האופקיות שווה למספר האנכיות?

שאלה 3

במדינת עשאל, על כל שטר רשום ערך שהוא חזקה של 10, כלומר הערכים האפשריים הם: אחד, עשר, מאה, אלף, עשרת אלפים, וכן הלאה. הוכיחו שאם פורטים שטר, ומקבלים בתמורה מספר שטרות המסתכמים לערך שלו, אז אפשר לחלק את השטרות לחמישה חלקים שערכם שווה.

שאלה 4

בונים קוביה $2 \times 2 \times 2$ בעזרת 4 קוביות שחורות ו-4 קוביות לבנות המונחות לסירוגין כמו שמתואר בציור. מהקוביה שהתקבלה חותכים תיבה בממדים $a \times b \times c$ כמו בציור, עבור $0 < a, b, c < 2$ כלשהם.



האם רוב נפח התיבה שחור או לבן? מדוע? האם הדבר תלוי בערכים המדויקים של a, b, c ?

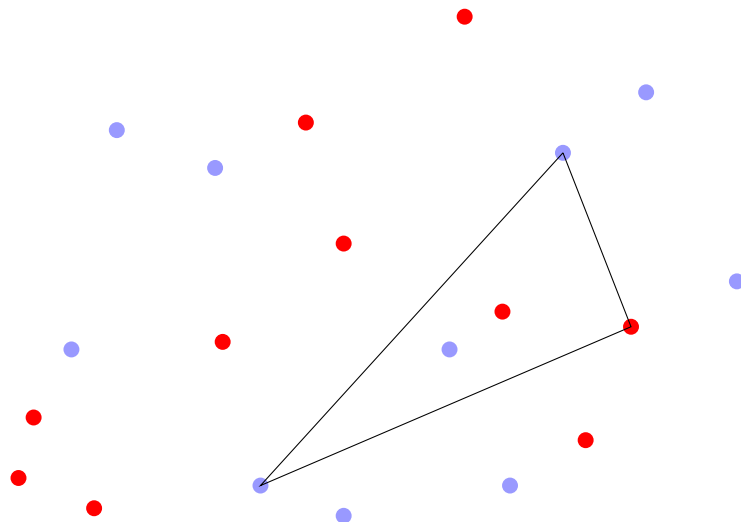
שאלה 5

ועדה העוסקת במינוי תפקידים מקיימת הצבעות אנונימיות בהרכב של שלושה חברים, כך שאף בחירה של חבר ועדה לא נחשפת לאחרים. לצורך כך, נרכשה מכונה משוכללת שקובעת את הכרעת הרוב. המכונה מקבלת שלוש מעטפות סגורות שבכל אחת יש פתק "בעד" או "נגד", ומחזירה מעטפה סגורה חדשה ובה פתק עם הכרעת הרוב "בעד" או "נגד", וכן משמידה את שלוש המעטפות שקיבלה.

יום אחד ישבה הועדה בהרכב מיוחד של חמישה חברים, והם רצו לערוך הצבעה אנונימית על מינוי מסוים. מצאו דרך להשתמש במכונה כדי לקבוע את הכרעת הרוב של חמשת החברים. מותר לבקש מכל שופט מספר עותקים של הצבעתו, ומותר להפעיל את המכונה מספר פעמים – נסו כמה שפחות. בסופו של דבר, יש להישאר עם מעטפה אחת בלבד ובה הכרעת הרוב.

שאלה 6

שוקי צייר במישור 10 נקודות אדומות ו-10 נקודות כחולות. לכל 3 נקודות מבין ה-20 הוא חישב את שטח המשולש שביניהן. הראו שסכום השטחים של כל המשולשים שקודקודיהם צבועים באותו הצבע קטן מסכום השטחים של כל המשולשים שאחד מקודקודיהם בצבע שונה מהשניים האחרים.



שאלה 7

גברת איקס ומר עיגול משחקים על לוח משבצות ריבועי $n \times n$ כאשר n הוא לפחות 4. בהתחלה הלוח ריק, ומר עיגול בוחר משבצת ומסמן בה $\bigcirc$, ואז גברת איקס בוחרת משבצת ריקה ומסמנת $\times$, וכן הלאה לסירוגין. המטרה של גברת איקס היא שיהיו n איקסים שכל אחד מהם בשורה אחרת וכל אחד בעמודה אחרת, והמטרה של מר עיגול היא למנוע מזה לקרות. לדוגמה:

$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
$\times$	$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

מר עיגול מנצח

$\bigcirc$	$\times$		$\times$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$	
$\times$			$\bigcirc$
	$\bigcirc$		$\times$

גברת איקס מנצחת

מי מהשחקנים יכול/ה להבטיח את השגת המטרה? כיצד?

פתרונות

שאלה 1

$$\begin{aligned}(1+2) \times 3 \times (4+5+6) \times (7+8) &= 2025 \\ -1+2 \times (-3+(4 \times 5 \times 6+7) \times 8) &= 2025 \\ 1+(2 \times (3+4 \times 5 \times 6)+7) \times 8 &= 2025 \\ (1+2+3 \times 4 \times (5+6)) \times (7+8) &= 2025 \\ (-1-2+(3+4 \times 5) \times 6) \times (7+8) &= 2025\end{aligned}$$

פתרון בונוס לשנה הבאה:

$$1 \times 2 \times (-3+(4 \times 5 \times 6+7) \times 8) = 2026$$

שאלה 2

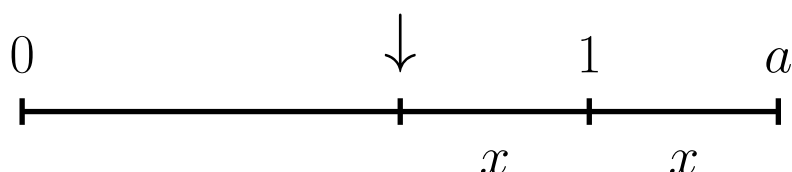
נשים לב שכל דומינו אנכי מכסה בדיוק משבצת אחת מאחת השורות 1, 3, 5, 7, 9. אם יש 25 אנכיים אז לפחות אחת מ-5 השורות האלה חופפת למספר אי זוגי של דומינו אנכיים, ונשאר בה מספר אי-זוגי של משבצות פנויות. מכיוון שכל דומינו אופקי באותה שורה מכסה 2 משבצות, אי אפשר להשלים את הריצוף של שורה כזאת.

שאלה 3

ניקח את השטר עם הערך הכי קטן 10^n . מכיוון שיש יותר משטר אחד, בהכרח השטר המקורי הוא 10^m גדול יותר, ולכן כפולה של 10^n . $10^{n+1} = 10 \cdot 10^n$. כדי להגיע לסכום שמתחלק ב- 10^{n+1} חייבים להיות לפחות 9 שטרות נוספים של 10^n , כי התחלנו מהשטר הכי קטן, ולא ייתכנו שטרות עם ערכים אחרים שאינם כפולה של 10^{n+1} בעצמם. אם עשרת השטרות האלה הם הכול, אז נשים שני שטרות בכל ערימה וסיימנו. אחרת, נחשוב על עשרת השטרות ביחד כשטר של 10^{n+1} , ובאינדוקציה על מספר השטרות יש חלוקה לחמישה חלקים שווים ערך, שמתאימה כמובן לבעיה המקורית אם פורטים את השטר הזה בחזרה.

שאלה 4

אם a, b, c קטנים מ-1 אז כל התיבה בצבע לבן. אם למשל a גדול מ-1 אז נחתוך את התיבה בניצב לציר ל-2 תיבות במקום המסומן בחץ, במרחק שווה למרחק של הקצה מ-1 בכיוון השני. החלק שסביב 1 יהיה צבוע בשחור ולבן באופן שווה, כי לכל נקודה יש תמונת מראה שהיא בצבע שונה ממנה, ביחס למישור העובר ב-1.



לכן מספיק לדון בתיבה שנשארה, שזה שקול למקרה ש- a קטן מ-1. חותכים שוב עבור b ועבור c לפי הצורך, וכפי שראינו, התיבה שנשארה היא לבנה, ולכן רוב התיבה המקורית לבנה.

שאלה 5

אם x, y, z הם שלושה פתקים נסמן ב- $\text{maj}(x, y, z)$ את הפתק שהמכונה מנפקת, כלומר הנפוץ מבין השלושה. נסמן ב- $x_1, \dots, x_5$ את חמשת הפתקים. אפשר להשתמש ארבע פעמים במכונה כדי לחשב את הנוסחה הבאה:

$$\text{maj}(x_1, \text{maj}(x_2, x_4, x_5), \text{maj}(x_2, x_3, \text{maj}(x_3, x_4, x_5))).$$

בכל המקרים הנוסחה נותנת את בחירת הרוב. כדי לראות זאת נחלק לכמה מקרים. נוח לסמן ב-Y את "בעד" וב-N את "נגד". אם $x_4 = x_5 = Y$ אז ניתן לפשט את הביטוי כדלקמן:

$$\text{maj}(x_1, Y, \text{maj}(x_2, x_3, Y)) = \begin{cases} Y & \text{if } x_1 = Y \text{ or } x_2 = Y \text{ or } x_3 = Y, \\ N & \text{if } x_1 = x_2 = x_3 = N. \end{cases}$$

באופן דומה, אם $x_4 = x_5 = N$ אז הביטוי הוא:

$$\text{maj}(x_1, N, \text{maj}(x_2, x_3, N)) = \begin{cases} N & \text{if } x_1 = N \text{ or } x_2 = N \text{ or } x_3 = N, \\ Y & \text{if } x_1 = x_2 = x_3 = Y. \end{cases}$$

לבסוף, אם $x_4 \neq x_5$ אז מקבלים:

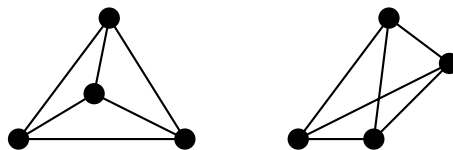
$$\text{maj}(x_1, x_2, \text{maj}(x_2, x_3, x_3)) = \text{maj}(x_1, x_2, x_3).$$

בכל המקרים ניתן לבדוק שהנוסחה נכונה.

שאלה 6

א. החלפת סדר סכימה: אם מציירים את כל הקטעים בין הנקודות, מקבלים חלוקה לאזורים קטנים. כל אזור קטן תורם לשני הסכומים של השטחים את שטחו כפול מספר המשולשים שהוא נמצא בהם. לכן אם נוכיח שכל נקודה נמצאת ביותר משולשים דו-צבעיים מאשר משולשים חד-צבעיים, אז ינבע שסכום השטחים של המשולשים הדו-צבעיים גדול מזה של החד-צבעיים.

ב. המקרה של 4 נקודות, שלוש אדומות ואחת כחולה: נשים לב שכל 4 נקודות במישור יוצרות 4 משולשים, שמוכלים זה בזה בחלקם או במלואם. יש שתי אפשרויות ליחסי ההכלה בין המשולשים, המתאימות לציורים הבאים:



בכל מקרה, כל נקודה במשולשים מכוסה על ידי שני משולשים בדיוק. נובע שכל נקודה במשולש החד-צבעי מוכלת גם באחד משלושת המשולשים הדו-צבעיים.

ג. סכום לפי רביעיות: נתבונן בכל הרביעיות של שלוש נקודות אדומות ואחת כחולה, או שלוש כחולות ואחת אדומה. כל משולש חד-צבעי שייך ל-10 רביעיות כאלה, וכל משולש דו-צבעי שייך ל-8 רביעיות כאלה, כפי שנובע מספירת הדרכים להשלים כל משולש לרביעייה, על ידי נקודה בצבע המתאים.

בהינתן נקודה, נספור את המשולשים שמכילים אותה בסך הכול כשסוכמים על פני כל הרביעיות כנ"ל. מצד אחד ספרנו כל משולש חד-צבעי 10 פעמים וכל משולש דו-צבעי 8 פעמים. מצד שני, מכיוון שאנחנו חוזרים על המקרה של 4 נקודות, בסך הכול ספרנו משולש דו-צבעי לפחות כמספר הפעמים שספרנו חד-צבעי. נובע שיש יותר משולשים דו-צבעיים שמכילים את הנקודה, כפי שרצינו להראות.

שאלה 7

גברת איקס יכולה להבטיח את השגת מטרתה, ונתאר במפורש כיצד. לאחר הצעד הראשון של מר עיגול, תבחר גברת איקס משבצת באותה השורה. מכיוון שסדר העמודות או השורות לא משנה, אפשר לומר שהלוח נראה כעת כך:

×	○					

מבחינתה של גברת איקס, אפשר להמשיך את המשחק בתת-לוח $(n-1) \times (n-1)$ ללא העמודה והשורה של האיקס, ואם היא תבטיח את ניצחונה בלוח זה, אז היא תנצח גם בלוח המקורי. גם בלוח 4×4 גברת איקס תמשיך כך, אבל לאחר עיגול-איקס-עיגול, את האיקס השני עליה להקפיד לסמן כך שעמודה אחת בדיוק תישאר ריקה. בכל מקרה, ובעזרת החלפת שורות ועמודות, לאחר עיגול-איקס-עיגול-איקס הלוח נראה כמו הציור הבא בצד ימין, חוץ מזה שבאמת יש עיגולים רק ב-2 מבין ה-3 משבצות שסומנו בעיגול, אבל לשם פשטות אפשר להניח שיש עיגולים בשלושתן:

×	○	○	?
?	×	○	?
?	?	×	?
		?	○

×	○	○	?
?	×	○	?
?	?		?
		?	

×	○	○	
	×	○	

בתור הבא, מר עיגול יבחר משבצת כלשהי מאלו שמסומנות בסימן שאלה, כאשר לצורך הציור השמטנו ארבעה מקרים כי הם מתקבלים על ידי החלפת שתי השורות התחתונות. אחר כך גברת איקס תסמן את המשבצת הבאה על האלכסון, מה שיכריח את מר עיגול לסמן את המשבצת הפינתית. יהיה מה שיהיה מיקומו של העיגול המסומן ב-?, ניקח איקס בשורה או בעמודה שלו, וכמו קודם נצטמצם ללוח 3×3 שמתקבל מהשמטת השורה והעמודה של אותו איקס. כעת בכל מקרה, הלוח נראה כך, וגברת איקס מנצחת בארבעה מהלכים:

×	○	×
!	×	○
!	×	○

×	○	
	×	○
	×	○

×	○	
	×	
	×	○

×	○	
	×	
		○