

## תחרות גרוסמן

# שאלון לתלמידי תיכון

### תאריך

#### כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

#### בהצלחה!

---

שם מלא: \_\_\_\_\_

מספר תעודת זהות: \_\_\_\_\_

שם בית הספר: \_\_\_\_\_

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): \_\_\_\_\_

מספר טלפון נייד: \_\_\_\_\_

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): \_\_\_\_\_

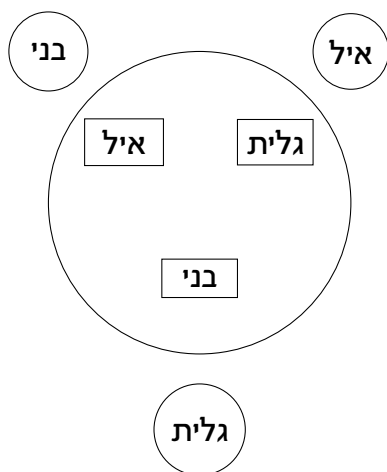
---

## שאלה 1

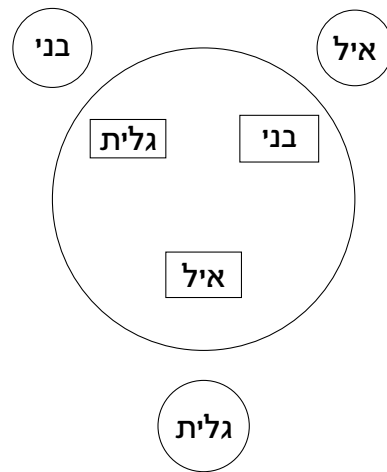
עבור אילו ערכים של  $n$  ניתן לחלק את המספרים  $1, \dots, n$  לשתי קבוצות עם אותו סכום?

## שאלה 2

יש 2026 מוזמנים למסיבה ובמסיבה יש שולחן עגול ומסתובב עם 2026 מקומות. בכל מקום בשולחן כתוב את שמו של אחד מהמוזמנים כך ששמות כל המוזמנים רשומים. המוזמנים מתיישבים סביב השולחן באופן כלשהו. הוכיחו כי אפשר לסובב את השולחן כך שלאחר מכן אף מוזמן לא יישב מול השם שלו.



אחרי הסיבוב



לפני הסיבוב

### שאלה 3

איילת נמצאת בחדר ובו חמישה פתקים, כל אחד מהם בצבע אדום או בצבע ירוק. היא רוצה לדעת איזה צבע מופיע יותר פעמים, אבל יש לה בעיה: היא עיוורת צבעים ולכן אינה מבדילה בין אדום לירוק.

לעזרתה יש דג זהב שאפשר לבקש ממנו משאלות מהצורה הבאה: איילת מצביעה על שלושה פתקים לפי בחירתה, ולפתע מופיע פתק נוסף שצבעו זהה לצבע הנפוץ יותר מבין שלושת הפתקים. לאחר מספר שימושים בדג הזהב עליה להכריז על אחד הפתקים שהצבע שלו הופיע יותר פעמים מהצבע השני בחמישיה המקורית.

כיצד על איילת לפעול? נסו להשתמש בכמה שפחות משאלות.

דוגמא: אילו היו בהתחלה שלושה פתקים בסך הכל (במקום חמישה), על איילת להצביע על שלושתם כך שדג הזהב יפיק פתק חדש, ואז עליה להכריז על הפתק החדש.

## שאלה 4

שאלה זו דנה באוסף כל המחרוזות באורך שלוש המורכבות מהספרות 0, 1, 2. יש 27 מחרוזות כאלה:

000, 001, 002, 010, ..., 220, 221, 222.

נקרא לשתי מחרוזות 'שכנות' אם הן שונות בתו אחד בלבד – או הראשון, או השני, או השלישי. לדוגמא, 110 ו-120 הן שכנות אבל 120 ו-101 אינן שכנות. נרצה לחלק את אוסף המחרוזות הנ"ל לשלושה חלקים.

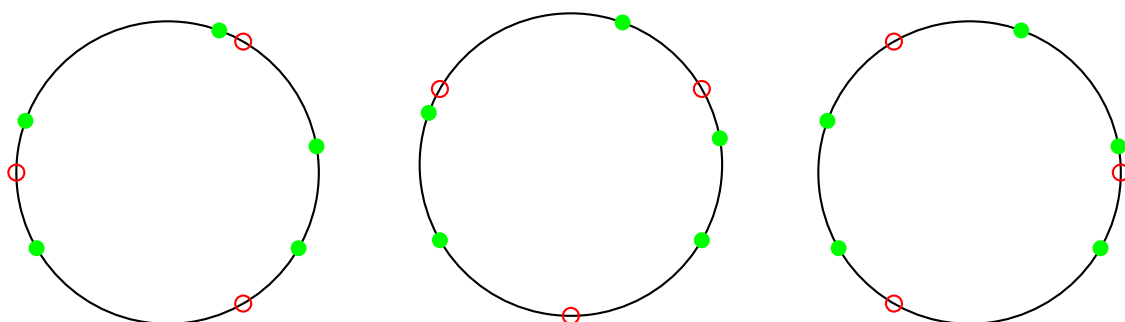
1. חלקו את האוסף לשלושה חלקים כך שאף חלק לא יכלול שתי מחרוזות שכנות.
  2. הראו שבכל חלוקה המקיימת את תנאי הסעיף הקודם, כל חלק כולל 9 מחרוזות בדיוק.
  3. הראו שאם מותר שלכל מחרוזת תהיה שכנה אחת לכל היותר באותו חלק, אז אפשר גם לחלק לשלושה חלקים כך שלא כל חלק כולל 9 מחרוזות בדיוק.
- יחד עם תיאור החלוקות, יש להסביר בקצרה מדוע הן מקיימות את הדרישות.

## שאלה 5

על מעגל שאורך היקפו 1 בוחרים  $m$  נקודות ירוקות. לאחר מכן, ממקמים  $n$  נקודות אדומות, במרחקים שווים אחת מהשניה (כמו סימוני השעות בשעון). נסמן ב- $d(m, n)$  את המרחק הכי גדול כך שלא משנה כיצד בחרנו את הנקודות הירוקות, תמיד ניתן למקם את הנקודות האדומות כך שכל אחת מהן תהיה במרחק של לפחות  $d(m, n)$  מכל אחת מהנקודות הירוקות. מצאו נוסחה מפורשת עבור  $d(m, n)$ .

הנה דוגמה עבור  $d(5, 3)$ :

הנקודות הירוקות מסומנות ב-  $\bullet$ , והנקודות האדומות מסומנות ב-  $\circ$  :



בדוגמה הזו, הנקודות הירוקות באותם מקומות, והנקודות האדומות במקומות שונים אך במרחקים שווים אחת מהשניה.

## שאלה 6

הראו שניתן לצבוע את המספרים הממשיים בשני צבעים כך שקיימים אינסוף "מרחקים צבעוניים" בין 0 ל-1. המשמעות של זה היא שקיימים אינסוף מספרים  $0 < r < 1$  כך שכל זוג מספרים ממשיים  $a, b$  המקיימים  $|a - b| = r$  הם בעלי צבע שונה.

## שאלה 7

במחשבון מופיע בהתחלה המספר 0, ויש שישה מקשים שמחשבים את הפונקציות הטריגונומטיות והפונקציות ההופכיות שלהן:

$$\boxed{\sin} \quad \boxed{\arcsin} \quad \boxed{\cos} \quad \boxed{\arccos} \quad \boxed{\tan} \quad \boxed{\arctan}$$

הראו שאפשר להגיע מ-0 לכל שבר חיובי על ידי רצף הקשות מסוים על ששת המקשים.  
דוגמה:

$$\sin(\arctan(\sin(\arctan(\sin(\arctan(\cos(0))))))) = \frac{1}{2}$$

הערה:  $\arcsin, \arctan$  מחזירים זווית בין  $-90^\circ$  ל-  $90^\circ$ .  $\arccos$  מחזיר זווית בין  $0^\circ$  ל-  $180^\circ$ .

## פתרונות

### שאלה 1

תנאי הכרחי הוא שסכום המספרים מ-1 עד  $n$  יהיה זוגי, כי בכל קבוצה יש אותו סכום. נראה שזה גם תנאי מספיק, כלומר בהכרח יש פיתרון במקרה זה.

קודם כל נהפוך את התנאי למפורש יותר. מכיוון שסכום המספרים הוא  $\frac{n(n+1)}{2}$ , צריך ש- $n(n+1)$  יתחלק ב-4, ולכן  $n$  בהכרח משאיר שארית של 0 או 3 בחלוקה ל-4 (ע"י בדיקת ארבעה מקרים). כדי לבנות את הדוגמה, אפשר ללכת בכמה כיוונים.

1. פיתרון אחד הוא באינדוקציה. במקרה ש- $n = 3, 4$  יש חלוקות מתאימות: במקרה  $n = 3$  החלוקה היחידה היא  $\{1, 2\}$  ו- $\{3\}$ . אם  $n = 4$  החלוקה היחידה היא  $\{1, 4\}$  ו- $\{2, 3\}$ . כדי לסיים נשים לב שאם יש חלוקה מתאימה עבור  $n$  אז יש גם ל- $n+4$ , בגלל שבקבוצה  $\{n+1, n+4\}$  יש אותו סכום כמו ב- $\{n+2, n+3\}$ .

2. פיתרון נוסף (אך שקול) הוא לשים לב לתבנית שנוצרה בפיתרון האחרון: אם  $n \equiv 0 \pmod 4$  אפשר לשים בקבוצה אחת את כל המספרים שמשאירים שארית חלוקה 1 או 0 ב-4 ובקבוצה השנייה את המשלים. אם  $n \equiv 3 \pmod 4$  אפשר בקבוצה אחת לשים את כל המספרים שמשאירים שארית חלוקה 0 או 3 ב-4 ובקבוצה השנייה את המשלים.

3. הערה: את שני הפתרונות האחרונים אפשר לגלות אם מפעילים אלגוריתם חמדני, כלומר מתחילים עם קבוצה אחת ריקה וקבוצה שנייה עם האיבר  $n$ , ובכל צעד משבצים את האיבר הכי גדול שעוד לא שובץ בקבוצה שבה סכום האיברים קטן יותר.

4. אפשר לחלק את המספרים גם באופן הבא: אם  $n = 4m$  ניקח את החלוקה

$$\{1, \dots, m, 3m+1, \dots, 4m\}, \{m+1, \dots, 3m\}$$

ואם  $n = 4m+3$  ניקח את החלוקה

$$\{1, \dots, m+1, 3m+2, \dots, 4m+2\}, \{m+2, \dots, 3m+1, 4m+3\}.$$

### שאלה 2

נסמן  $n = 2026$ . נסמן את שמות המוזמנים ב- $1, 2, \dots, n$  וב- $a(1), a(2), \dots, a(n)$  את השמות הרשומים בסדר שהם רשומים.

נניח בשלילה שאין סיבוב מתאים. נובע שלכל  $i$ , אם מסובבים  $i$  פעמים אז קיים  $j$  כך שבמקום ה- $j$  רשום  $j$ , כלומר

$$a(j) \equiv j + i \pmod n.$$

בהינתן  $j$  יש לכל היותר  $i$  אחד שמקיים זאת. נובע שכאשר עוברים על כל  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  אז מקבלים את כל הערכים האפשריים של  $a(j) - j$  מודולו  $n$ . נובע ש-

$$\sum_{j=1}^n (a(j) - j) \equiv \sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2} \pmod n.$$

מצד שני,

$$\sum_{j=1}^n (a(j) - j) = 0$$

כי  $a(1), \dots, a(n)$  זה סידור של  $1, 2, \dots, n$ . קיבלנו ש-

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod n$$

מה ששקול לכך ש- $n$  אי-זוגי, סתירה.

### שאלה 3

אם  $x, y, z$  הם צבעים של שלושה פתקים נסמן ב-

$$\text{maj}(x, y, z)$$

את צבע הפתק שדג הזהב מוסיף, כלומר הצבע הנפוץ מבין השלושה. נסמן ב- $x_1, \dots, x_5$  את הצבעים של חמשת הפתקים. איילת משתמשת ארבע פעמים בדג הזהב כדי לחשב את הנוסחה הבאה:

$$\text{maj}(x_1, \text{maj}(x_2, x_4, x_5), \text{maj}(x_2, x_3, \text{maj}(x_3, x_4, x_5))).$$

בכל המקרים הנוסחה נותנת את הצבע הפופולארי. כדי לראות זאת נחלק לכמה מקרים. נוח לסמן ב-1 את הצבע הירוק וב-0 את הצבע האדום. אם  $x_4 = x_5 = 1$  אז ניתן לפשט את הביטוי כדלקמן:

$$\text{maj}(x_1, 1, \text{maj}(x_2, x_3, 1)) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 = 1 \text{ or } x_2 = 1 \text{ or } x_3 = 1, \\ 0 & \text{if } x_1 = x_2 = x_3 = 0. \end{cases}$$

באופן דומה, אם  $x_4 = x_5 = 0$  אז הביטוי הוא:

$$\text{maj}(x_1, 0, \text{maj}(x_2, x_3, 0)) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 0 \text{ or } x_3 = 0, \\ 1 & \text{if } x_1 = x_2 = x_3 = 1. \end{cases}$$

לבסוף, אם  $x_4 \neq x_5$  אז מקבלים:

$$\text{maj}(x_1, x_2, \text{maj}(x_2, x_3, x_3)) = \text{maj}(x_1, x_2, x_3).$$

בכל המקרים ניתן לבדוק שהנוסחה נכונה.

כעת נראה ש-4 הפעלות הוא המספר המינימלי, ע"י כך שנפסול כל נוסחה עם עד 3 הפעלות. נניח תחילה שהנוסחה היא מהצורה הבאה:

$$\text{maj}(x_i, x_j, *)$$

במקרה כזה, אם הקלט הוא כך ש- $x_i = x_j = 1$  ושאר הקלט הוא 0, אז הנוסחה מחזירה 1 למרות שהתשובה הנכונה היא 0.

אם כך, הנוסחה חייבת להיות מהצורה הבאה:

$$\text{maj}(x_i, \text{maj}(x_j, x_k, x_\ell), \text{maj}(x_J, x_K, x_L))$$

ניתן גם להניח ש- $j, k, \ell$  שונים אחד מהשני (אחרת ניתן להיפטר מהפעלה אחת), וכך גם  $J, K, L$ . אם  $j, k, \ell$  ו- $J, K, L$  מכילים לפחות שני אינדקסים זהים, אז נקבל אותם להיות 1 ואת שאר הקלט להיות 0. הנוסחה מחזירה 1 למרות שהתשובה הנכונה היא 0. אחרת, נניח ש- $j = J$ , ונשים לב ש- $j, k, \ell, K, L$  מכסים את כל האינדקסים. יש שתי אפשרויות:  $x_i = x_j$  או  $x_i \neq x_j$ , כאשר באפשרות השניה,  $i$  שווה לאחד מהאינדקסים  $k, \ell, K, L$ . כדי שלא נתבלבל, נקבע את כל האינדקסים הנ"ל בהתאם לשתי האפשרויות:

$$\begin{aligned} & \text{maj}(x_1, \text{maj}(x_1, x_2, x_3), \text{maj}(x_1, x_4, x_5)) \\ & \text{maj}(x_2, \text{maj}(x_1, x_2, x_3), \text{maj}(x_1, x_4, x_5)) \end{aligned}$$

נקבע את הקלט להיות  $(1, 1, 0, 0, 0)$ . בשני המקרים הנוסחה מחזירה 1 למרות שהתשובה הנכונה היא 0.

## שאלה 4

לשתי מחרוזות שכנות בהכרח יש סכום ספרות עם שארית שונה בחלוקה ב-3. נעזר בהבחנה זו בכדי לפתור את שני הסעיפים הראשונים.

בשביל הסעיף הראשון, אפשר לחלק לשלושה חלקים, שבכל אחד מהם סכום הספרות נותן שארית חלוקה שונה ב-3, כמתואר בטבלה הבאה (כל עמודה מתארת חלק בחלוקה):

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 000 | 001 | 002 |
| 012 | 010 | 011 |
| 021 | 022 | 020 |
| 102 | 100 | 101 |
| 111 | 112 | 110 |
| 120 | 121 | 122 |
| 201 | 202 | 201 |
| 210 | 211 | 212 |
| 222 | 220 | 221 |

בעמודה השמאלית סכום הספרות מתחלק ב-3, בעמודה האמצעית סכום הספרות משאיר שארית חלוקה 1 ב-3, ובעמודה הימנית סכום הספרות משאיר שארית חלוקה 2.

הטבלה בנויה באופן כזה שבכל שורה יש שלוש מחרוזות ששתי הספרות השמאליות שלהן זהות. בשביל הסעיף השני נעזר שוב בטבלה: כל חלק בחלוקה יכול להכיל לכל היותר מחרוזת אחת מכל שורה, כי בכל שורה יש שלוש מחרוזות שכל שתיים מהן הן שכנות (נובע ממה שתואר עד כה). זה מראה שבכל חלק יש לכל היותר 9 מחרוזות ולכן בכל חלק יש לכל הפחות 9 מחרוזות.

הטבלה הבאה מתארת חלוקה שפותרת את הסעיף האחרון (כל עמודה מתארת חלק בחלוקה):

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 001 | 011 | 021 |
| 002 | 012 | 022 |
| 010 | 101 | 201 |
| 020 | 102 | 202 |
| 100 | 110 | 210 |
| 121 | 120 | 220 |
| 122 | 221 | 111 |
| 200 | 222 | 112 |
| 211 | 000 |     |
| 212 |     |     |

בחלק הראשון משמאל יש 10 מחרוזות. כעת נתאר את הבניה באופן מילולי ובפרט נסביר למה לכל מחרוזת יש לכל היותר שכן אחד בחלק שלה.

כל מחרוזת באשר היא אפשר לתאר באופן יחיד כשרשור (משמאל לימין) של שתי מחרוזות: מחרוזת ראשונה (רישא) שמסתיימת בספרה שונה מאפס, ומחרוזת שנייה (סיפא) שכולה אפסים. בפרט, אם המחרוזת לא מסתיימת באפס אז הסיפא ריקה, ואם המחרוזת היא מחרוזת אפסים אז הרישא ריקה. בעמודה השמאלית בטבלה מופיעות כל המחרוזות כך שסכום הספרות של הרישא שלהן, לא כולל הספרה האחרונה של הרישא, מתחלק ב-3. בעמודה האמצעית מופיעות המחרוזות כך שהסכום הנ"ל משאיר שארית חלוקה 1 בחלוקה ב-3, ובעמודה הימנית מופיעות המחרוזות כך שהסכום הנ"ל משאיר שארית חלוקה 2 ב-3.

דוגמא: למחרוזת 120 יש רישא באורך 2 שהיא 12 וסיפא באורך 1 שהיא 0. סכום הספרות של הרישא, לא כולל הספרה האחרונה של הרישא (2) הוא 1 ולכן מחרוזת זו בעמודה האמצעית.

כעת ניקח מחרוזת א' ונניח שיש מחרוזת ב' ששכנה לה ונמצאת באותו חלק. נסביר למה מחרוזת ב' נקבעת ביחידות.

אם למחרוזות יש סיפא באותו אורך אז הספרה היחידה ששונה ביניהן היא ברישא. אם הספרה הזו היא לא הספרה האחרונה של הרישא נקבל סתירה, כי לסכום הספרות של הרישות - לא כולל הספרה האחרונה - יש את אותה שארית חלוקה ב-3. לכן הספרה הזו היא הספרה האחרונה, והספרה האחרונה ברישא שונה מאפס בהגדרה, ולכן במקרה זה מחרוזת ב' נקבעת לפי מחרוזת א' (אם הרישא של א' מסתיימת ב-1 אז נחליף את 1 ב-2, ואם היא מסתיימת ב-2 אז נחליף את 2 ב-1).

כאן השתמשנו בכך ששני מספרים שנבדלים ב-1 או 2 נותנים שארית חלוקה שונה ב-3.

דוגמא: השכן היחיד של 001 בעמודה השמאלית שגם יש לו סיפא באותו אורך (אורך 0 במקרה זה) הוא 002.

כעת נסביר למה מגיעים לסתירה אם הסיפות הן באורכים שונים. נניח שלמחרוזת א' יש סיפא ארוכה יותר. ההבדל בין המחרוזות חייב להיות בספרה בודדת שנמצאת ברישא של מחרוזת ב' ורק שם. אם נסתכל על סכום הספרות של הרישות של שתי המחרוזות, לא כולל הספרה האחרונה של הרישא, נקבל שהסכום נבדל במספר שהוא 1 או 2: ההפרש הוא בדיוק הספרה האחרונה של הרישא של מחרוזת א', ספרה שנספרת בסכום הספרות של מחרוזת ב' אבל לא בסכום הספרות של מחרוזת א'. כדי לסיים שוב ניזכר בכך שלמספרים שנבדלים ב-1 או 2 יש שארית חלוקה שונה ב-3.

דוגמא: למחרוזת 210 יש סיפא באורך 1 ולמחרוזת 212 יש סיפא באורך 0 והן שכנות: הן נבדלות רק בספרה אחת שגורמת לכך שאורכי הסיפות יהיו שונים. סכום הספרות של הרישא במחרוזת הראשונה, לא כולל הספרה האחרונה ברישא, הוא 2 ובמחרוזת השנייה הוא 2+1.

## שאלה 5

התשובה היא  $1/(2mn)$ .

אם  $n = 1$  אז זו שאלה על מיקום נקודה אדומה באופן הרחוק ביותר מ- $m$  נקודות נתונות ואז התשובה היא  $1/(2m)$ : אי-אפשר יותר טוב מזה בגלל המקרה שבו הנקודות הירוקות ממוקמות במרחקים שווים, ותמיד אפשר להשיג מרחק זה כי לפי עיקרון שובך היונים יש שתי נקודות ירוקות שכנות במרחק שהוא לפחות  $1/m$  אחת מהשנייה ולכן אפשר לשים נקודה אדומה בדיוק ביניהן ולהשיג מרחק  $1/(2m)$ .

אם אורך המעגל היה  $r$  אז התשובה הייתה הופכת להיות  $r/(2m)$  עם אותו טיעון.

למעשה, אפשר לעשות רדוקציה למקרה  $n = 1$ . נבחר קשת באורך  $1/n$  על המעגל. נעתיק כל נקודה על המעגל לנקודה 'מודולו  $1/n$ ', כלומר נזיז כל נקודה בכפולה של  $1/n$  כדי שתהיה בתוך הקשת שבחרנו. באופן זה, קיבלנו קשת באורך  $1/n$  עם נקודה אדומה בודדת (הנקודות האדומות התלכדו)

ויש  $m$  נקודות ירוקות נתונות. אנחנו רוצים למקם את הנקודה האדומה הבודדת רחוק ככל הניתן מהנקודות הירקות, כשמרחק הוא מודולו  $1/n$ , כלומר חושבים על קצוות הקשת כמחוברות זו לזו. זה בדיוק המקרה  $n = 1$  של הבעיה עם מעגל שאורכו  $1/m$  במקום 1. לפי הטיעון בתחילת הפיתרון, מקבלים שהתשובה היא  $1/(2mn)$ .

## שאלה 6

נגדיר גרף על קבוצת המספרים הממשיים כך ששני מספרים ממשיים מחוברים זה לזה בצלע אם ההפרש ביניהם (בערך מוחלט) הוא אחד חלקי מספר אי-זוגי:  $1/5, 1/3, 1/1$  וכו'. ההבחנה הבסיסית היא שמספיק להוכיח שהגרף הזה הוא דו-צדדי. אכן, מכאן נובע שהצדדים שלו מגדירים את החלוקה הנדרשת.

כעת, דו-צדדיותו של הגרף שקולה לכך שאין בו מעגלים אי-זוגיים, וזה נובע מכך שמעגל אי-זוגי שקול לסדרה באורך אי-זוגי של מספרים מהצורה פלוס או מינוס של אחד חלקי מספר אי-זוגי אשר מסתכמים לאפס. אך סדרה כזו איננה קיימת. אכן, הכפילו בכל המכנים של מספרים בסדרה וכך תקבלו סכום של מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים אשר שווה לאפס, וזה כמובן לא אפשרי.

## שאלה 7

ראשית נראה איך הטענה נובעת במהירות בהינתן שתי העובדות הבאות אותן נוכיח בסוף הפיתרון:

$$1. \text{ אם אפשר להגיע למספר } x \text{ חיובי אז אפשר להגיע ל-} \sqrt{x^2/(x^2+1)}.$$

$$2. \text{ אם אפשר להגיע למספר } x \text{ חיובי אז אפשר להגיע ל-} 1/x.$$

כעת אפשר להראות, באינדוקציה חזקה על  $a+b$ , שלכל שני שלמים חיוביים  $a, b$  ניתן להגיע ל- $\sqrt{a/b}$  (ולכן בפרט אפשר להגיע לכל רציונלי חיובי ע"י בחירת  $a = bq^2$  לרציונלי  $q$ ). בסיס האינדוקציה הוא מיידי כי אם  $a = b = 1$  אז  $\sqrt{a/b} = 1 = \cos 0$ . נסביר כעת את צעד האינדוקציה.

אם  $a = b$  אז סיימנו כי  $\sqrt{a/b} = \cos 0$ . אם  $a < b$  אז לפי הנחת האינדוקציה ניתן להגיע ל- $\sqrt{a/(b-a)}$  כי  $x = \sqrt{a/(b-a)} < a + b$ . לכן אפשר להגיע גם ל-

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{a/(b-a)}{a/(b-a)+1}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

אם  $a > b$  אז באופן דומה אפשר להגיע ל- $\sqrt{b/a}$  כי  $x = \sqrt{b/a}$  ולכן אפשר להגיע גם ל- $1/x = \sqrt{a/b}$ . כעת נוכיח את העובדות מתחילת הפיתרון. העובדה הראשונה נובעת מ-

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

עבור  $x$  חיובי. זהות זו נובעת אם נסתכל על משולש ישר זווית עם אורכי צלעות  $1, x, \sqrt{x^2+1}$ . הסינוס של הזווית מול הצלע באורך  $x$  הוא  $x/\sqrt{x^2+1}$ . הזווית הזו היא  $\arctan x$  כי הטנגנס שלה הוא  $x$ .

בשביל העובדה השנייה, נעזר ב- $\arccos(\sin t) = \frac{\pi}{2} - t$  עבור  $|t| \leq \pi/2$  וב- $\tan(\pi/2 - t) = \cot t$  עבור  $0 < |t| < \pi/2$  כדי לקבל

$$\tan(\arccos(\sin(\arctan x))) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{x}.$$